

引用格式: 赖华东, 罗朋, 徐今强, 等. 基于广义似然比的非圆信号频谱感知方法 [J]. 电子科技大学学报, 2025, 54(3): 377-383.

LAI H D, LUO P, XU J Q, et al. Spectrum sensing for non-circular signals based on generalized likelihood ratio[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2025, 54(3): 377-383.

基于广义似然比的非圆信号频谱感知方法



赖华东^{1,2,3}, 罗朋^{1,2}, 徐今强^{1,3}, 刘洛辛^{1,2*}

(1. 广东海洋大学 电子与信息工程学院, 湛江 524088; 2. 广东省南海海洋牧场智能装备重点实验室, 湛江 524088;

3. 广东省计算机控制与通信教学重点实验室, 湛江 524088)

摘要: 传统的频谱感知方案通常假设信号为圆信号, 在非圆信号的信道环境下存在一定程度的性能损失。针对这一问题, 提出了一种基于非圆信号的频谱感知方法。利用非圆信号的补偿协方差不为零的特征, 在广义似然比的框架下推导了检验统计量。该方法能够充分利用非圆信号的完整二阶统计特性, 并且无须预知主用户信号的先验知识以及背景噪声功率。另外, 推导了零假设下所提方法的统计矩, 并基于埃奇沃斯展开 (EE) 定理得到所述方法的分布函数。在此基础上, 进一步建立了判决门限的表达式。仿真结果表明, 与现有的频谱感知方法相比, 该方法具有明显的性能提升。

关键词: 频谱感知; 非圆信号; 广义似然比; 埃奇沃斯展开

中图分类号: TN92

文献标志码: A

DOI: 10.12178/1001-0548.2024075

Spectrum sensing for non-circular signals based on generalized likelihood ratio

LAI Huadong^{1,2,3}, LUO Peng^{1,2}, XU Jinqiang^{1,3}, and LIU Mingxin^{1,2*}

(1. School of Electronics and Information Engineering, Guangdong Ocean University, Zhanjiang 524088, China;

2. Guangdong Provincial Key Laboratory of Intelligent Equipment for South China Sea Marine Ranching, Zhanjiang 524088, China;

3. Guangdong Provincial Key Laboratory of Teaching for Computer Control and Communication, Zhanjiang 524088, China)

Abstract: Traditional spectrum sensing schemes that are devised under the assumption of circular signals suffers from performance degradation in the presence of non-circular signals. To overcome such drawback, a novel spectrum sensing method for non-circular signals is proposed. Within the framework of generalized likelihood ratio, the test statistic is constructed by employing the nonzero characteristic of complementary covariance of non-circular signals. The proposed method is able to utilize the complete second-order statistical properties of non-circular signals, and does not require any prior information of the primary signals or noise power. Additionally, the statistical moments of proposed method are derived under null hypothesis, and the cumulative distribution function of proposed method is also obtained based on edgeworth expansion. On this basis, the analytic expression of sensing threshold is further established. Experimental results illustrate that the proposed method outperforms other state-of-the-art detectors in various scenarios.

Key words: spectrum sensing; non-circular signal; generalized likelihood ratio; edgeworth expansion

随着无线通信业务对频谱资源需求的大量增长以及频谱资源在时间和空间上的利用率低下, 频谱资源的稀缺对未来无线通信系统的设计带来了巨大的挑战。为了提高频谱资源利用率, 实现频谱资源的动态管理, 认知无线电 (cognitive radio, CR) 概念自被提出以来, 就迅速得到了国内外学者的广泛

关注^[1]。在不对主用户 (primary user, PU) 的通信造成干扰的前提下, CR 通过实时监测授权频段的频谱状态, 找出闲置的频谱空洞, 以便认知用户 (secondary user, SU) 采用动态频谱接入 (dynamic spectrum access, DSA) 的方式接入该授权频段进行通信。而实现这一技术的重要一环是判断授权频段

收稿日期: 2024-04-02

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (62171143); 广东海洋大学科研启动经费资助项目 (060302112316)

作者简介: 赖华东, 博士, 主要从事频谱感知方面的研究。

*通信作者 E-mail: liumx@gdou.edu.cn

是否出现 PU 信号,即频谱感知^[2-3]。另一方面,由于信号的随机性,在感知过程中难免会发生虚警和漏检的情况,虚警会导致较低的频谱资源利用率,而漏检则造成对主用户通信的干扰。因此,为了保证 CR 系统具有较高的检测概率和较低的虚警率,设计高效、高精度的频谱感知方法具有重要的现实意义。

文献中常用的频谱感知技术包括匹配滤波器、能量检测和循环平稳特征检测^[4]。通过最大化信噪比,匹配滤波器可以实现最优的检测性能。然而,这种方法需要事先知道授权用户的先验信息,在实际环境中是不可行的。能量检测是一种半盲检测方法,因其实现简单且不需要 PU 的先验知识而得到了广泛应用。然而,该方法易受噪声不确定性的影响,导致性能不稳定。尽管循环平稳特征检测能够对抗噪声的不确定性,但是该方法因其计算复杂度太高而不适用于实时检测系统。

近年来,利用接收端的信号相关性进行频谱感知的方法备受关注。其核心思想是利用接收信号的协方差矩阵在主用户信号存在与否的差异,设计出鲁棒的检测方法。具体来说,当授权频段被主用户 PU 占用时,采样信号由于包含 PU 信号而具有很强的相关性,接收信号的协方差矩阵是任意的对称正定厄密特矩阵;而在频段闲置时,由于采样信号只来源于噪声,其协方差矩阵是一个对角矩阵^[5-6]。基于上述协方差矩阵的结构性差异,一系列无须预知信道先验知识的全盲检测器被提出,包括以协方差绝对值(covariance absolute value, CAV)为代表的协方差检测方法^[7],以尺度最大特征值(scaled maximum eigenvalue, SLE)为代表的特征值检测方法^[8],以 JOHN 为代表的局部最大势不变检验^[9],以及以算术几何均值(arithmetic to geometric mean, AGM)为代表的广义似然比(generalized likelihood ratio, GLR)检验^[10]。CAV 方法因只需计算信号的采样协方差矩阵而具有低的实现复杂度。然而,该方法的性能在有色或非白噪声环境中大幅度下降。SLE 方法在信号存在强相关性时优于传统的能量检测器,但由于假设采样数量和信号维度都是无穷大,导致理论的检测门限难以计算。JOHN 方法在低信噪比的情形具有最优的检测性能,但可能在其他高信噪比的信道环境下表现不理想。AGM 统计量最初起源于多元统计分析,在经过国内外学者的深入研究后,被广泛应用于频谱感知的各个领域,取得了不错的感知效果。然而,这些方法都是构建

在圆信号的基础上,即只考虑接收信号的标准协方差矩阵。事实上,实际通信系统中常见的信号通常会表现出非圆特性,如偏置正交相移键控(offset quadrature phase shift keying, OQPSK)和二进相移键控(binary phase shift keying, BPSK)等^[11]。这些信号的补偿协方差矩阵不为零,其完整的二阶统计属性由标准协方差矩阵和补偿协方差矩阵来刻画。因此,对于只利用信号的标准协方差矩阵而忽略补偿协方差矩阵的方法,由于丢失了部分统计特性,导致在非圆信号的信道环境下检测效果并不好。为了实现更优的感知性能,文献[12]提出了一种基于非圆信号协方差的频谱感知(non-circular covariance, NCC)方法。该方法在采样点数非常小、信噪比较低的情况下具有良好的检测效果。然而,NCC 在不均匀天线噪声方差的情形下表现并不理想。

受到 AGM 方法在 GLR 范式的深厚根源以及在频谱感知领域中良好检测性能的启发^[13-14],本文在 GLR 框架下,利用非圆信号的补偿协方差矩阵不为零的特征,将 AGM 方法拓展到非圆信号的情形,提出了一种基于非圆信号的算术几何均值(non-circular arithmetic to geometric mean, NC-AGM)方法。另外,所提 NC-AGM 方法利用了校准接收机系统中噪声方差相等的特性(均匀噪声),表现优于现存的 NCC 方法。通过埃奇沃斯展开(edgeworth expansion, EE),本文推导了所提方法的虚警率、检测门限的分析表达式。本文方法无须知道主用户、噪声以及信道的先验信息,是一种全盲的检测方法。

1 问题形成

1.1 非圆信号

假设随机变量 $\mathbf{z}$ 服从零均值复高斯分布。对于任意实数 α , 如果旋转变量 $\mathbf{z}' = \mathbf{e}^{j\alpha} \mathbf{z}$ 具有和原始信号 $\mathbf{z}$ 相同的概率密度函数,那么随机变量 $\mathbf{z}$ 称之为圆信号,反之亦然。不难看出旋转变量 $\mathbf{z}'$ 的标准协方差矩阵为:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' &= E(\mathbf{z}'(\mathbf{z}')^H) = E(\mathbf{e}^{j\alpha} \mathbf{z} \mathbf{z}^H \mathbf{e}^{-j\alpha}) = \\ &E(\mathbf{z} \mathbf{z}^H) = \mathbf{R} \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{R}$ 表示随机变量 $\mathbf{z}$ 的标准协方差矩阵; $\mathbf{R}'$ 表示旋转变量 $\mathbf{z}'$ 的标准协方差矩阵; 符号 $(\cdot)^H$ 表示共轭转置运算符。

因此,信号的圆特征没有对标准协方差矩阵施加任何额外条件。另一方面,旋转变量 $\mathbf{z}'$ 的补偿协

方差矩阵可以写成:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{R}}' &= E(\mathbf{z}'(\mathbf{z}')^T) = E(\mathbf{e}^{f\alpha} \mathbf{z} \mathbf{z}^T \mathbf{e}^{f\alpha}) = \\ &= \mathbf{e}^{2f\alpha} E(\mathbf{z} \mathbf{z}^T) = \mathbf{e}^{2f\alpha} \tilde{\mathbf{R}}\end{aligned}\quad (2)$$

式中, $\tilde{\mathbf{R}}$ 表示随机变量 $\mathbf{z}$ 的补偿协方差矩阵; $\tilde{\mathbf{R}}'$ 表示旋转变量 $\mathbf{z}'$ 的补偿协方差矩阵; 符号 $(\cdot)^T$ 代表转置运算符。

在这种情况下, 当 $\tilde{\mathbf{R}}$ 为 $\mathbf{0}$ 时, $\mathbf{z}$ 是圆信号; 当 $\tilde{\mathbf{R}}$ 不为 $\mathbf{0}$ 时, $\mathbf{z}$ 是非圆信号。因此, 为了完全描述复高斯随机变量 $\mathbf{z}$ 的统计特性, 需要同时考虑标准协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 和补偿协方差矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}$ 。

1.2 系统模型

考虑由 M 个接收天线和 P 个主用户信号组成的多输入多输出认知无线电系统。 H_0 表示不存在主用户信号, H_1 表示主用户信号存在。则在采样时刻 n , 接收端的接收信号可以表示为:

$$\begin{cases} H_0: \mathbf{x}(n) = \sigma \mathbf{w}(n) \\ H_1: \mathbf{x}(n) = \mathbf{H} \mathbf{u}(n) + \sigma \mathbf{w}(n) \end{cases}\quad (3)$$

其中,

$$\mathbf{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_M(n)]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{w}(n) = [w_1(n), w_2(n), \dots, w_M(n)]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{u}(n) = [u_1(n), u_2(n), \dots, u_P(n)]^T \quad (6)$$

式中, $x_m(n)$ 表示第 m 根接收天线在采样时刻 n 的接收信号, $m = 1, 2, \dots, M$; $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_P] \in \mathbb{C}^{M \times P}$ 表示信道增益系数矩阵; $u_i(n) (i = 1, 2, \dots, P)$ 表示第 i 个主用户信号; 向量 $\sigma \mathbf{w}$ 表示背景噪声, 服从零均值、协方差矩阵 $\sigma^2 \mathbf{I}_M$ 的复高斯分布, 其中 σ^2 为噪声功率。假设共采集 N 个时刻的数据, 可以得到样本矩阵 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(N)] \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 。二元假设检验的目的就是利用样本矩阵 $\mathbf{X}$ 来决定是否有主用户信号的存在。为了方便研究, 对模型作出以下假设: 1) 信道增益 $\mathbf{H}$ 在感知阶段认为是一个未知的确定性矩阵; 2) 第 i 个主用户信号 $u_i(n)$ 服从非圆的复高斯分布, 即 $u_i(n) \sim \text{CN}(0, \gamma_i)$, 其中信号功率 $\gamma_i = E(|u_i|^2)$ 。另外, $E(u_i^2) = \kappa_i \mathbf{e}^{f\phi_i} \gamma_i$, κ_i 表示信号非圆率, $\phi_i \in [-\pi, \pi)$ 代表信号的非圆相位; 3) 噪声与主用户信号之间相互统计独立。

1.3 AGM 方法

基于上述二元假设检验模型 (式 (3)), 在主用户信号不存在时, 样本协方差矩阵 $\mathbf{S} = \mathbf{X} \mathbf{X}^H$ 服从不相关的威沙特分布 $\mathcal{W}_M(N, \mathbf{R}^{(0)})$ ^[15], 其中 $\mathbf{R}^{(0)}$ 表示 H_0 假设下的母体协方差矩阵:

$$\mathbf{R}^{(0)} = \sigma^2 \mathbf{I}_M \quad (7)$$

当至少有一个主用户信号存在时, 样本协方差矩阵服从相关的威沙特分布 $\mathcal{W}_M(N, \mathbf{R}^{(1)})$, 其中 $\mathbf{R}^{(1)}$ 表示 H_1 假设下的母体协方差矩阵:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \sum_{i=1}^P \gamma_i \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H + \sigma^2 \mathbf{I}_M \quad (8)$$

在不同假设下母体协方差矩阵式 (7) 和式 (8) 的差异可以用于检测主用户信号的存在与否。在 GLR 的框架下, 通过求解 $\mathbf{R}^{(0)}$ 和 $\mathbf{R}^{(1)}$ 的极大似然估计值, 可以求得 AGM 统计量如下:

$$T_{\text{AGM}} = \frac{|\mathbf{S}|}{\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M s_{i,i} \right)^M} \frac{H_0}{H_1} \eta_{\text{AGM}} \quad (9)$$

式中, T_{AGM} 表示 AGM 统计量; $s_{i,i} (i = 1, 2, \dots, M)$ 代表 $\mathbf{S}$ 的对角元素; η_{AGM} 是 AGM 方法的检测门限。

起初, AGM 统计量出现在多元统计分析的相关文献中^[13], 因其良好的性能, 随后被广泛应用于检测高斯信号^[14]。然而, AGM 检测器并没有将复值数据的全部统计特征用于信号检测, 导致其在非圆信号的环境下表现并不理想。

2 NC-AGM 方法

为了针对非圆信号设计出更优的感知方法, 本文提出了一种鲁棒的 NC-AGM 方法。本方法充分利用了信号的二阶统计特性, 即同时将标准协方差矩阵和补偿协方差矩阵应用于频谱感知, 因而能够取得更优的检测性能。在 GLR 框架下, 本文通过极大似然估计方法构建出检验统计量的表达式。具体实现过程如下。

对于复随机变量 $\mathbf{x}$, 引入增广向量 $\underline{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}^T, \mathbf{x}^H]^T$, 其概率密度函数为^[16]:

$$\underline{\mathbf{x}} \sim \frac{1}{\pi^M |\underline{\mathbf{R}}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \underline{\mathbf{x}}^H \underline{\mathbf{R}}^{-1} \underline{\mathbf{x}} \right\} \quad (10)$$

式中, $\underline{\mathbf{R}}$ 为如下增广协方差矩阵:

$$\underline{\mathbf{R}} = E(\underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{x}}^H) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \tilde{\mathbf{R}} \\ \tilde{\mathbf{R}}^* & \mathbf{R}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2M \times 2M} \quad (11)$$

式中, $\mathbf{R} = E(\mathbf{x} \mathbf{x}^H)$ 代表标准协方差矩阵; $\tilde{\mathbf{R}} = E(\mathbf{x} \mathbf{x}^T)$ 表示补偿协方差矩阵; $(\cdot)^*$ 是共轭运算。引入增广样本矩阵 $\underline{\mathbf{X}} = [\underline{\mathbf{x}}(1), \dots, \underline{\mathbf{x}}(N)]$, 可以得到相应的增广样本协方差矩阵:

$$\underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{X}}^H = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{W}} & \tilde{\underline{\mathbf{W}}} \\ \tilde{\underline{\mathbf{W}}}^* & \underline{\mathbf{W}}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2M \times 2M} \quad (12)$$

式中, $\underline{\mathbf{W}}$ 为增广样本协方差矩阵; $\underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{X}}^H$ 和 $\tilde{\underline{\mathbf{W}}} = \underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{X}}^T$ 分别表示标准样本协方差矩阵和补偿样本协方差矩阵。

增广样本矩阵 $\underline{\mathbf{X}}$ 的似然函数可以表示为^[16]:

$$L(\underline{\mathbf{X}}; H_i) \propto |\underline{\mathbf{R}}^{(i)}|^{-N/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \left([\underline{\mathbf{R}}^{(i)}]^{-1} \underline{\mathbf{W}} \right) \right\} \quad (13)$$

式中, $L(\underline{\mathbf{X}}; H_i)$ 表示增广样本矩阵在 H_i ($i=0,1$) 假设下的似然函数; $\underline{\mathbf{R}}^{(i)}$ 表示在 H_i ($i=0,1$) 假设下的增广母体协方差矩阵; $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹。

则似然比统计量 ρ 可以写成:

$$\rho \triangleq \frac{\sup_{\underline{\mathbf{R}}^{(0)}} L(\underline{\mathbf{X}}; H_0)}{\sup_{\underline{\mathbf{R}}^{(1)}} L(\underline{\mathbf{X}}; H_1)} \quad (14)$$

通过对式 (13) 的自然对数关于 $\underline{\mathbf{R}}^{(0)}$ 和 $\underline{\mathbf{R}}^{(1)}$ 进行求导, 并将导数设为 0, 可以求出 $\underline{\mathbf{R}}^{(0)}$ 在 H_0 假设和 $\underline{\mathbf{R}}^{(1)}$ 在 H_1 假设的极大似然估计值分别为:

$$\hat{\underline{\mathbf{R}}}^{(0)} = \frac{\text{tr}(\underline{\mathbf{W}})}{MN} I_{2M} \quad (15)$$

$$\hat{\underline{\mathbf{R}}}^{(1)} = \frac{1}{N} \underline{\mathbf{W}} \quad (16)$$

式中, $\hat{\underline{\mathbf{R}}}^{(i)}$ 表示 $\underline{\mathbf{R}}^{(i)}$ 的极大似然估计值, $i=0,1$ 。

将式 (13)、式 (15) 和式 (16) 代入式 (14), 可以求得所提出的检验统计量为:

$$T_{\text{NC-AGM}} \triangleq \rho^{1/N} = \frac{|\underline{\mathbf{W}}|^{1/2}}{\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M w_{i,i} \right)^M} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \eta_{\text{NC-AGM}} \quad (17)$$

式中, $T_{\text{NC-AGM}}$ 表示 NC-AGM 统计量; $w_{i,i}$ ($i=1,2,\dots,M$) 表示标准样本协方差矩阵 $\underline{\mathbf{W}}$ 的对角元素; $\eta_{\text{NC-AGM}}$ 是 NC-AGM 方法的检测门限。

因此, 所提出的 NC-AGM 方法的具体检测过程如下: 1) 通过样本矩阵 $\underline{\mathbf{X}}$ 计算增广样本协方差矩阵 $\underline{\mathbf{W}}$; 2) 由式 (17) 计算 NC-AGM 检验统计量; 3) 与给定的门限 $\eta_{\text{NC-AGM}}$ 进行比较。如果 $T_{\text{NC-AGM}} \leq \eta_{\text{NC-AGM}}$, 则存在主用户信号; 反之, 如果 $T_{\text{NC-AGM}} > \eta_{\text{NC-AGM}}$, 则主用户信号不存在。

3 门限设置

在感知方法的设计过程中, 需要折中考虑虚警率和检测概率。由于检测概率在实际应用中难以得到其解析表达式, 通常都是先给定虚警率, 然后求出相应的门限, 通过该门限分析感知方法的检测性

能。为了推导 NC-AGM 统计量在 H_0 假设下的分布函数, 需要下面的定理, 即 NC-AGM 统计量的任意阶原点矩的理论表达式。

定理 1 NC-AGM 统计量的 k 阶原点矩等于:

$$T_{\text{NC-AGM}}^k = \frac{(2M)^{Mk} \Gamma_{2M}((N+k)/2) \Gamma(MN)}{\Gamma_{2M}(N/2) \Gamma(MN + Mk)} \quad (18)$$

式中, 多元伽马函数和伽马函数分别定义为:

$$\Gamma_{2M}(N/2) = \pi^{M(2M-1)/2} \prod_{i=1}^{2M} \Gamma((N-i+1)/2) \quad (19)$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (20)$$

证明: 定义函数:

$$F_k(\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{R}}) = \frac{|\underline{\mathbf{W}}|^{(N+k-1)/2-M} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\mathbf{R}}^{-1} \underline{\mathbf{W}})\right)}{2^{M(N+k-2M-1)} \Gamma_{2M}((N+k)/2) |\underline{\mathbf{R}}|^{(N+k)/2}} \quad (21)$$

由文献 [16] 可知, 样本协方差矩阵的概率密度函数可以表达为:

$$\underline{\mathbf{W}} \sim F_0(\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{R}}) \quad (22)$$

则 $T_{\text{NC-AGM}}$ 的 k 阶矩 (定义为 μ_k) 可以计算为:

$$\begin{aligned} \mu_k &= \int_{\underline{\mathbf{W}} > 0} F_0(\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{R}}) \frac{|\underline{\mathbf{W}}|^{k/2}}{\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M w_{i,i} \right)^{Mk}} d\underline{\mathbf{W}} = \\ &= \frac{(2M)^{Mk} \Gamma_{2M}((N+k)/2) |\underline{\mathbf{R}}|^{k/2}}{\Gamma_{2M}(N/2)} \times \\ &= \int_{\underline{\mathbf{W}}' > 0} F_k(\underline{\mathbf{W}}', \underline{\mathbf{R}}) \left(\sum_{i=1}^M w'_{i,i} \right)^{-Mk} d\underline{\mathbf{W}}' = \\ &= \frac{(2M)^{Mk} \Gamma_{2M}((N+k)/2) |\underline{\mathbf{R}}|^{k/2}}{\Gamma_{2M}(N/2)} E \left(\sum_{i=1}^M w'_{i,i} \right)^{-Mk} \end{aligned} \quad (23)$$

式中, $\underline{\mathbf{W}}'$ 服从和 $\underline{\mathbf{W}}$ 相同的分布, 自由度为 $(N+k)$, $w'_{i,i}$ ($i=1,2,\dots,M$) 是 $\underline{\mathbf{W}}'$ 的对角元素。

另一方面, 可以证明 $\frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^M w'_{i,i}$ 服从自由度为 $2M(N+k)$ 的卡方分布。则 $\sum_{i=1}^M w'_{i,i}$ 的 $-Mk$ 阶矩为:

$$E \left(\sum_{i=1}^M w'_{i,i} \right)^{-Mk} = \frac{2^{Mk}}{\sigma^{2Mk}} E \left(\frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^M w'_{i,i} \right)^{-Mk} = \frac{\Gamma(MN)}{\sigma^{2Mk} \Gamma(MN + Mk)} \quad (24)$$

进一步地, 可以得到:

$$|\mathbf{R}|^{k/2} = \sigma^{2Mk} \quad (25)$$

将式 (24) 和式 (25) 代入到式 (23) 并整理可得到式 (18)。

由文献 [17] 可知, 当采样时间 N 和接收天线数 M 以相同比例增加时, T_{AGM} 在零假设下的经验分布函数近似于高斯分布。该性质促使我们使用高斯分布去近似 NC-AGM 统计量在 H_0 假设下的分布, 从而简化检测门限的设定。然而, 这种收敛性质只有当 N 和 M 以相同的比例趋于无穷大时适用。一般情况下, 对于渐近高斯的随机变量, 埃奇沃斯展开^[18] 因引入了额外的近似项, 可以取得比高斯分布更好的近似效果。因此, 本文将采用这种展开方法, 以保证在任意 N 和 M 的情形下可以很好地近似 NC-AGM 统计量的分布。

定理 2 对于任意的随机变量 T , 用 L 项截断的埃奇沃斯展开可以将其累积分布函数近似^[18]:

$$F(t) \approx \Phi(\tilde{t}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tilde{t}^2/2\right) \times \sum_{s=1}^L \sum_{\{I_s\}} \frac{\text{He}_{s+2r}(\tilde{t})}{v_T^{s+2r}} \prod_{\ell=1}^s \frac{1}{i_\ell!} \left(\frac{s_{\ell+2}}{(\ell+2)!}\right)^{i_\ell} \quad (26)$$

式中, $\tilde{t} = [t - E(T)]/\nu_T$; ν_T 是统计量 T 的标准差; Φ 是标准正态分布的累积分布函数; $\{I_s\}$ 是线性丢番图方程 $i_1 + 2i_2 + \dots + si_s = s$ 所有非负整数解的集合; $r = i_1 + i_2 + \dots + i_s$; s_p 代表 T 的 p 阶累积量, 可以通过以下递归公式得到:

$$s_1 = u_1 \quad (27)$$

$$s_p = u_p - \sum_{\ell=1}^{p-1} \binom{p-1}{\ell-1} s_\ell u_{p-\ell} \quad p \geq 2 \quad (28)$$

式中, $u_p = E(T^p)$ 。令符号 $\left\lfloor \frac{\ell}{2} \right\rfloor$ 代表 floor 函数 (下取整函数), 则 $\text{He}_\ell(z)$ 表示如下的厄密多项式:

$$\text{He}_\ell(z) = \ell! \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{\ell}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^k z^{\ell-2k}}{k! (\ell-2k)! 2^k} \quad (29)$$

相比传统的无修正高斯近似 ($L=0$), 即:

$$F(t) \approx \Phi[(t - u_1)/\nu_T] \quad (30)$$

因引入额外的近似项 ($L>0$), L 项截断的埃奇沃斯展开 (式 (26)) 具有更高的近似精度。

证明: 埃奇沃斯展开方法的相关原理可参考文献 [18]。

则在 H_0 假设下, 当门限 $\eta_{\text{NC-AGM}}$ 给定时, 那么根据式 (17), 虚警率 P_f 可以表示为:

$$P_f = \Pr(T_{\text{NC-AGM}} < \eta_{\text{NC-AGM}} | H_0) \quad (31)$$

根据定理 2, 虚警率 P_f 可以近似为:

$$P_f \approx F(\eta_{\text{NC-AGM}}) \quad (32)$$

相反地, 当虚警率 P_f 预先给定时, 可以得到检测门限 $\eta_{\text{NC-AGM}}$ 为:

$$\eta_{\text{NC-AGM}} = F^{-1}(P_f) \quad (33)$$

式中, $F^{-1}(x)$ 表示函数 $F(x)$ 的逆, 可以通过数值分析的方法进行求解。

4 仿真分析

本节通过仿真实验测试所提的全盲 NC-AGM 方法的感知性能, 并与经典的全盲频谱感知方法进行对比, 即 NCC, CAV, SLE, JOHN, AGM。仿真实验假设瑞利衰落信道, 即信道增益矩阵 $\mathbf{H}$ 的分量由独立同分布的标准复高斯分布随机生成, 然后进行标准化以满足规定的信噪比。另外, 增益矩阵 $\mathbf{H}$ 在当次蒙特卡洛实验中一经生成就保持不变, 而在下一次蒙特卡洛实验中会重新随机生成。不失一般性, 假设噪声功率 $\sigma = 1$ 。在 H_0 假设下, 主用户信号不存在; 而在 H_1 假设下, 对主用户信号做出如下设置: 信号非圆率 $\kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_P = 1$, 非圆相位 ϕ_i 由定义在区间 $[-\pi, \pi)$ 的均匀分布产生。所有仿真实验的参数设置如表 1 所示, 相应的仿真结果通过 50 000 次蒙特卡洛实验得到。

表 1 实验参数汇总

图例	采样点数 N	接收天线数 M	信噪比 SNR/dB	主用户信号数 P /功率 · dB
图1	15 40	4 8	—	—
图2	100	4	-5	3({1, 2, 3})
图3a	60	3	-2	1(0)
图3b	60	3	-4	1(0)
图4a	100	4	-1	3(0)
图4b	120	4	-1	3(0)

4.1 验证理论虚警率的近似效果

图 1 分析了不同判决门限的情形下, 使用无修正的高斯分布 (式 (30)) 和埃奇沃斯展开 (式 (26)) 对理论虚警率的解析表达式 (32) 的逼近效果。仿真考虑了两种不同情形: $M=4$ 、 $N=15$; $M=8$ 、 $N=40$, 其中近似项数均为 $L=2$ 。从结果中不难看出, 不管接收天线数量 M 和采样点数 N 取值如何, 在只引入了两项额外近似项的情况下, 埃奇沃斯展开式比高斯分布能够更好地拟合仿真数据的虚警率, 即能够更好地模拟所提统计量的分布。

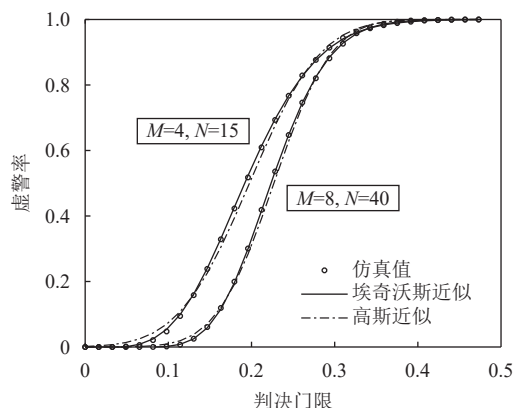


图 1 高斯分布和埃奇沃斯展开近似效果的比较

4.2 检验统计量的经验概率分布对比

图 2 比较了所述的 NC-AGM 方法与原始 AGM 方法的经验概率分布曲线。仿真参数设置为：主用户数 $P=3$ ，相应的功率为 $\gamma_1=1$ dB， $\gamma_2=2$ dB， $\gamma_3=3$ dB，接收天线数 $M=4$ ，采样点数 $N=100$ ，信噪比 $\text{SNR}=-5$ dB。从图 2 可以看出，NC-AGM 统计量在两种不同假设下的概率分布曲线的重叠面积要明显小于 AGM 方法，表明在相同的仿真条件下，所提出的 NC-AGM 检测器要明显优于原始 AGM 方法，这是由于 NC-AGM 方法能够充分利用非圆信号的二阶统计性质，即标准协方差矩阵和补偿协方差矩阵，去构建相应的检验统计量。

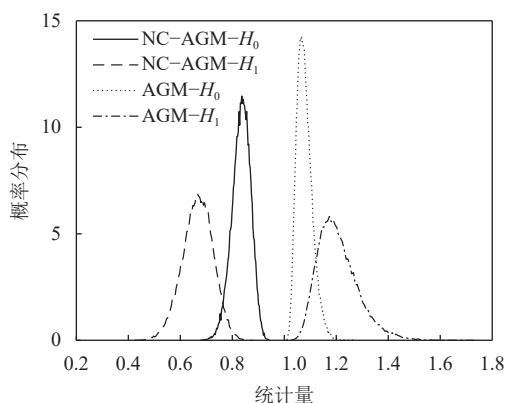


图 2 AGM 和 NC-AGM 统计量的经验概率分布对比图

4.3 不同方法的 ROC 曲线和 AUC 值对比

ROC 曲线和 AUC 值^[32]是频谱感知领域中最流行的总体性能测度，常用于度量检测方法的综合性能。给定一个阈值 $\eta_{\text{NC-AGM}}$ ，由式 (17) 得到式 (31) 中的虚警率 P_f 和检测概率 $P_d = \Pr(T_{\text{NC-AGM}} < \eta_{\text{NC-AGM}} | H_1)$ ，让阈值 $\eta_{\text{NC-AGM}}$ 在 $[0, 1]$ 的范围内进行取值，可以得到一系列的离散阈值，也就可以得到一系列的 (P_f, P_d) 数据对，即 ROC 曲线，而 AUC 值则代表 ROC 曲线下与坐标轴围成的面积。

图 3 分析了不同信噪比对所有检测器 ROC 曲线的影响。仿真采用了两种信噪比 $\text{SNR}=-2$ dB 和 $\text{SNR}=-4$ dB。其余仿真条件如下：单用户信号 $P=1$ ，功率为 0 dB，接收天线数量 $M=3$ ，采样点数 $N=60$ 。仿真结果显示，在 GLR 框架下，所提方法因能够充分利用非圆信号的完整二阶统计特性，具有比其他方法更高的 ROC 曲线，即检测性能最佳。另外，通过对比图 3a 和图 3b 可以发现，信噪比越高，检测方法的性能越好。

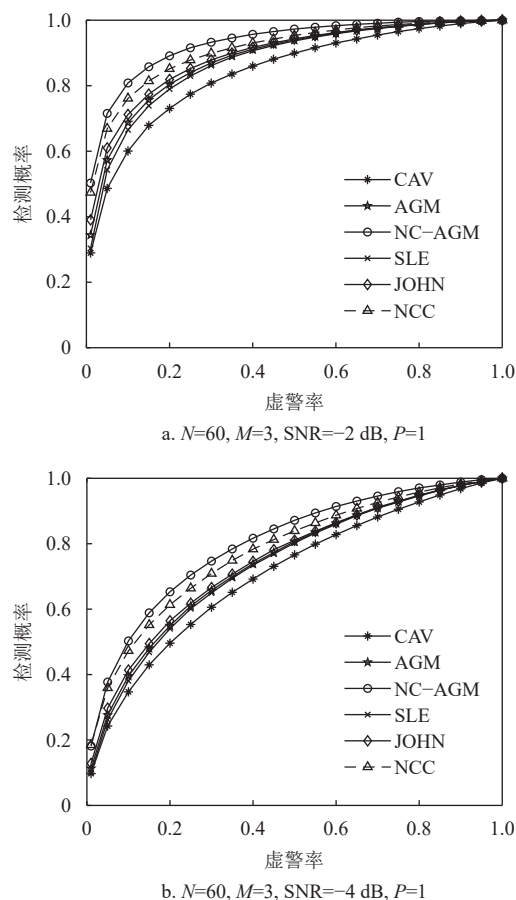


图 3 不同信噪比对感知方法 ROC 曲线的影响对比

图 4 分析了不同样本长度对所有检测方法 ROC 曲线的影响。仿真考虑了两种样本长度 $N=100$ 和 $N=120$ 。其他参数设为 $M=4$ ， $\text{SNR}=-1$ dB，主用户信号数量 $P=3$ ，功率均为 0 dB。通过对比图 4a 和图 4b 可以看出，样本长度越大，ROC 曲线越高，即检测概率更高。所提 NC-AGM 方法的 ROC 曲线优于其他对比方法，检测性能最佳。

为了进一步定量分析所有检测器的性能，在表 2 中列出了图 3 和图 4 中所有检测器 ROC 曲线对应的 AUC 数值。不难发现，在所有对比方法中，所提 NC-AGM 方法具有最大的 AUC 数值，呈现出最优的检测效果。

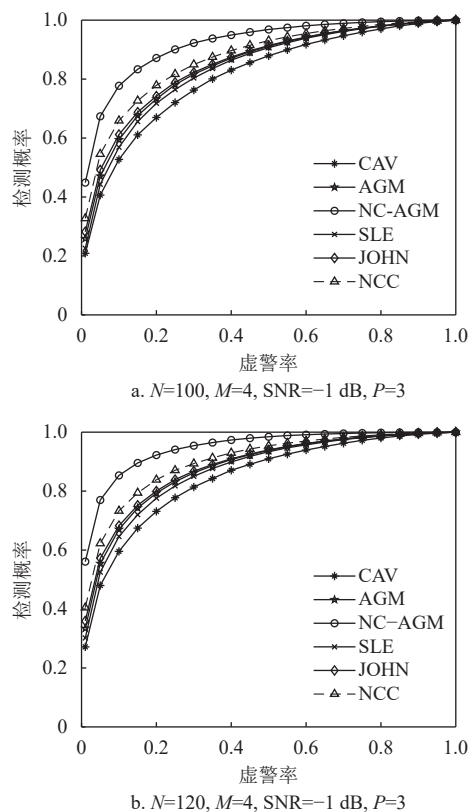


图4 不同样本长度对感知方法 ROC 曲线的影响对比

表2 各检测器统计量的 AUC 数值对比

实验方法	图3a	图3b	图4a	图4b
CAV	0.839 7	0.704 8	0.813 2	0.844 6
AGM	0.883 5	0.736 7	0.846 6	0.878 6
NC-AGM	0.932 3	0.799 6	0.920 9	0.948 8
SLE	0.875 9	0.731 6	0.837 2	0.870 1
JOHN	0.891 6	0.743 7	0.851 4	0.882 9
NCC	0.910 8	0.777 4	0.870 2	0.903 4

5 结束语

本文研究了认知无线网络中基于非圆信号的频谱感知问题, 将非圆信号补偿协方差的非零特征应用于广义似然比检验, 使得非圆信号的二阶统计信息得到利用, 实现感知性能的提升。另外, 基于埃奇沃斯展开定理, 从理论上分析了所提方法的统计矩、统计分布和判决门限等感知性能, 并与 NCC、CAV、SLE、JOHN、AGM 等常用方法进行性能对比。数值结果表明, 在相同的信道环境下, 所提的 NC-AGM 检测方法具有比原始 AGM 方法更小的重叠面积, 以及比现有检测方法更高的 ROC 曲线和更大的 AUC 值, 呈现出更优的检测性能。

参考文献

[1] CHITRA M, YASHASWINI S, DHANASEKARAN S. Performance analysis of cooperative underlay NOMA-assisted cognitive radio networks[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2024, 13(1): 203-207.

[2] 杨康. 无线电台中的频谱感知算法应用[J]. *通信技术*, 2024, 57(1): 41-46.
YANG K. Application of spectrum sensing algorithm in radio stations[J]. *Communications Technology*, 2024, 57(1): 41-46.

[3] 张展, 魏平, 高林, 等. 以欠采样速率实现盲谱感知及二维 DOA 估计[J]. *电子科技大学学报*, 2022, 51(3): 357-362.
ZHANG Z, WEI P, GAO L, et al. Achieving blind spectrum sensing and two-dimensional DOA estimation with sub-Nyquist sampling rate[J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2022, 51(3): 357-362.

[4] SHARMA S K, BOGALE T E, CHATZINOTAS S, et al. Cognitive radio techniques under practical imperfections: A survey[J]. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2015, 17(4): 1858-1884.

[5] YUAN Y Z, XU J, LIU L Y. Correlation-based maximal invariant statistic for spectrum sensing[J]. *IEEE Communications Letters*, 2023, 27(5): 1402-1406.

[6] LAI H D, LIU M X, XU J Q, et al. Improved weighted covariance-based detector for spectrum sensing in Rayleigh fading channel[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2024, 13(5): 1513-1517.

[7] ZENG Y H, LIANG Y C. Spectrum-sensing algorithms for cognitive radio based on statistical covariances[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2009, 58(4): 1804-1815.

[8] 曹开田, 杨震. 一种新型的基于最大特征值的合作频谱感知算法[J]. *电子与信息学报*, 2011, 33: 1367-1372.
CAO K T, YANG Z. A novel cooperative spectrum sensing algorithm based on the maximum eigenvalue[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33: 1367-1372.

[9] WEI L, DHARMAWANSA P, TIRKKONEN O. Multiple primary user spectrum sensing in the low SNR regime[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2013, 61(5): 1720-1731.

[10] WEI L, TIRKKONEN O. Spectrum sensing in the presence of multiple primary users[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2012, 60(5): 1268-1277.

[11] CHEVALIER P, PIPON F. New insights into optimal widely linear array receivers for the demodulation of BPSK, MSK, and GMSK signals corrupted by noncircular interferences-application to SAIC[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(3): 870-883.

[12] CHEN A Z, SHI Z P. Covariance-based spectrum sensing for noncircular signal in cognitive radio networks with uncalibrated multiple antennas[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2020, 9(5): 662-665.

[13] MAUCHLY J W. Significance test for sphericity of a normal n-variate distribution[J]. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1940, 11(2): 204-209.

[14] ZHANG R, LIM T J, LIANG Y C, et al. Multi-antenna based spectrum sensing for cognitive radios: A GLRT approach[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2010, 58(1): 84-88.

[15] DHARMAWANSA P, DISSANAYAKE P, CHEN Y. The eigenvectors of single-spiked complex wishart matrices: Finite and asymptotic analyses[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2022, 68(12): 8092-8120.

[16] SCHREIER P J, SCHARF L L. Statistical signal processing of complex-valued data: The theory of improper and noncircular signals[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

[17] LIM C H. Spectrum sensing for a radar signal with pulse compression in cognitive radios[J]. *IEEE Communications Letters*, 2022, 26(12): 3074-3078.

[18] LI S, MCKAY M R, CHEN Y. On the distribution of MIMO mutual information: An In-depth painlevé-based characterization[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(9): 5271-5296.