加权信号张量子空间拟合算法

李　楠，程锦房，钱　富

(海军工程大学兵器工程系　武汉　430033)

【摘要】提出了一种基于三阶张量高阶奇异值分解的声矢量阵列加权信号张量子空间拟合算法。首先对声矢量阵接收信号进行三阶张量建模，并通过高阶奇异值分解得到信号张量子空间，从而结合加权信号子空间拟合算法进行空间方位谱估计。由于基于高阶奇异值分解得到的信号张量子空间相比于传统的矩阵奇异值分解得到的信号子空间能够更好地抑制噪声，并且体现了多维数据之间的关联关系，因此具有更高的方位估计精度。理论和仿真结果表明：该方法在低信噪比、等强度不相关信号和强相关信号条件下仍具有良好的目标分辩能力和稳定性，工程应用价值较高。

关　键　词　方位估计;　高阶奇异值分解;　多维数据;　信号张量子空间

中图分类号　TN911.7　　文献标志码　A　　doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2013.04.003

Weighted Signal Tensor Subspace Fitting Algorithm

LI Nan, CHENG Jin-fang, and QIAN Fu

(Department of Weaponry Engineering, Naval University of Engineering　Wuhan　430033)

Abstract　A weighted signal tensor subspace fitting algorithm is presented for vector hydrophone array based on higher order singular value decomposition (HOSVD). In this paper, the 3rd order tensor of the received signals from vector hydrophones array is modeled at first, then the signal tensor subspace is derived from HOSVD, and lastly, the DOA is estimated with the weighted signal subspace fitting. The 3rd tensor-based signal subspace estimation via HOSVD is a better estimate of the desired signal subspace than the subspace estimate obtained by the SVD of a matrix which exploits the structure inherent in the multi dimensional measurement data. Theoretical and simulation results show that the proposed method exhibits high resolution and robustness performance under scenarios of low signal noise ratio (SNR), non-correlative and tight-correlative signals with the same power.

Key words　DOA estimation;　HOSVD;　multidimensional data;　signal tensor subspace

声矢量水听器技术自20世纪90年代引入我国以来，给水下声场计算和算法研究带来了重大的突破，由于声矢量水听器由无指向性的声压水听器和具有与频率无关的偶极子自然指向性的质点振速水听器复合而成，能够同时、共点测量声场中的声压和质点振速矢量，从而较之以往的声压水听器具有明显优势[1]。

子空间拟合算法于20世纪90年代初提出，其基本思想在于构造阵列接收数据的子空间和阵列流形之间的一个拟合关系，主要包括信号子空间拟合(SF)算法、噪声子空间拟合(NF)算法以及加权信号/噪声子信号空间拟合(WSSF/WNSF)算法[2]。与噪声子空间拟合算法相比，信号子空间拟合算法的优势在于能够分离相关/相干信号，且对噪声的扰动不敏感。基于声矢量阵列的加权信号子空间拟合算法国内外鲜有文献发表[3-4]，且方法均局限于通过二维矩阵方式对观测数据进行组织和处理，没有充分挖掘声矢量阵多维数据信息之间的关联，从而形成更有效的参数估计方法。

本文借鉴张量运算的优势，将二维矩阵观测数据向高维推广，通过二维矩阵所无法实现的多维数据匹配操作，并结合加权信号张量子空间拟合算法，以期能够实现更为精准的空间方位估计，张量相关的定义和计算参见文献[5]。

1　声矢量阵测量模型

假设信号满足窄带远场平面波条件，各入射信号统计独立，各阵元接收的背景噪声为高斯白噪声，噪声的相关时间半径小于数据采集的时间间隔，各阵元收到的背景噪声是相互独立的。

设均匀声矢量线阵由 M 个基元组成，接收到 K

收稿日期：2012－05－31；修回日期：2012－08－29

基金项目：部级基金

作者简介：李楠(1984－)，男，博士生，主要从事阵列信号处理方面的研究.

个远场窄带信号，各个信号源相对于均匀线阵的入射方位角为$(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_K)$，则该阵接收的信号为：

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{S}(t)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{N}(t) \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{X}(t)\in\mathbb{C}^{3M\times 1}$、$\boldsymbol{S}(t)\in\mathbb{C}^{K\times 1}$和$\boldsymbol{N}(t)\in\mathbb{C}^{3M\times 1}$均为平稳随机过程；该阵的流形矢量$\boldsymbol{A}=[a(\theta_1)\otimes u_1,a(\theta_2)\otimes u_2,\cdots,a(\theta_K)\otimes u_K]\in\mathbb{C}^{3M\times K}$；$\boldsymbol{a}(\theta_k)=[1,\mathrm{e}^{(-\mathrm{j}2\pi d\sin(\theta_k)/\lambda)},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi d(M-1)\sin(\theta_k)/\lambda}]^{\mathrm{T}}$为声压阵的流形矢量；$\otimes$表示Kronecker积；$\boldsymbol{u}_k=[1,\cos\theta_k,\sin\theta_k]^{\mathrm{T}}$。

对于L次快拍下的矢量阵接收数据，可以构造一个三阶张量输出模型[5]：

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}=\boldsymbol{\mathcal{A}}\times_3\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\mathcal{N}} \tag{2}$$

式中，$\times_3$表示张量与矩阵的3-模乘积[6]；$\boldsymbol{\mathcal{X}}\in\mathbb{C}^{M\times 3\times L}$；$\boldsymbol{\mathcal{A}}\in\mathbb{C}^{M\times 3\times K}$和$\boldsymbol{\mathcal{N}}\in\mathbb{C}^{M\times 3\times L}$分别满足如下等式：

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,j,l}=X_{3(j-1)+i,l}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{i,j,l}=A_{3(j-1)+i,l}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{N}}_{i,j,l}=N_{3(j-1)+i,l}$$

2　基于高阶奇异值分解的信号张量子空间估计

为得到信号张量子空间，需要对三阶张量$\boldsymbol{\mathcal{X}}$进行高阶奇异值分解[6](HOSVD)，即：

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}=\boldsymbol{\mathcal{S}}\times_1\boldsymbol{U}_1\times_2\boldsymbol{U}_2\times_3\boldsymbol{U}_3 \tag{3}$$

式中，张量核$\boldsymbol{\mathcal{S}}\in\mathbb{C}^{M\times 3\times L}$；1-模奇异矩阵$\boldsymbol{U}_1\in\mathbb{C}^{M\times M}$；2-模奇异矩阵$\boldsymbol{U}_2\in\mathbb{C}^{3\times 3}$；3-模奇异矩阵$\boldsymbol{U}_3\in\mathbb{C}^{L\times L}$。

如果忽略噪声的影响，并假设信源数K为已知，则三阶张量可以近似表示为：

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}=\boldsymbol{\mathcal{S}}^{[S]}\times_1\boldsymbol{U}_1^{[S]}\times_2\boldsymbol{U}_2^{[S]}\times_3\boldsymbol{U}_3^{[S]} \tag{4}$$

式中，张量核$\boldsymbol{\mathcal{S}}^{[S]}\in\mathbb{C}^{M\times\min(3,K)\times L}$；矩阵$\boldsymbol{U}_1^{[S]}\in\mathbb{C}^{M\times K}$；矩阵$\boldsymbol{U}_2^{[S]}\in\mathbb{C}^{3\times\min(3,K)}$；矩阵$\boldsymbol{U}_3^{[S]}\in\mathbb{C}^{L\times K}$。

由此可以得到声矢量阵输出模型的信号张量子空间[7-8]为：

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[s]}=\boldsymbol{\mathcal{S}}^{[S]}\times_1\boldsymbol{U}_1^{[S]}\times_2\boldsymbol{U}_2^{[S]} \tag{5}$$

3　加权信号张量子空间拟合算法

信号张量子空间与阵列流形张量张成的子空间是同一空间，所以存在一个满秩矩阵$\boldsymbol{T}$[9]，使得：

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[s]}=\boldsymbol{\mathcal{A}}\times_3\boldsymbol{T} \tag{6}$$

由于噪声的存在，信号张量子空间$\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[s]}$与阵列流形张量$\boldsymbol{\mathcal{A}}$张成的空间不相等，所以式(6)不一定成立，为解决该问题，可以通过构造一个拟合关系，找出式(6)成立的一个矩阵，使两者在最小二乘意义下达到最小，即：

$$\theta,\hat{\boldsymbol{T}}=\min\left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[s]}-\boldsymbol{\mathcal{A}}\times_3\boldsymbol{T}\right\|_F^2 \tag{7}$$

式中，参数θ是需要求出的；而矩阵$\hat{\boldsymbol{T}}$是一个辅助参量。式(6)的张量最小二乘问题利用张量的矩阵3模展开可以转化为矩阵最小二乘的形式：

$$\theta,\hat{\boldsymbol{T}}=\min\left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}_{(3)}^{[s]}-\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(3)}\cdot J\right\|_F^2 \tag{8}$$

式中，单位矩阵$\boldsymbol{I}_1\in\mathbb{R}^{3\times 3}$；$\boldsymbol{I}_2\in\mathbb{R}^{K\times K}$；$J=(\boldsymbol{I}_1\otimes\boldsymbol{I}_2)$；$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(3)}$表示三阶张量的3-模矩阵展开[6]。

固定矩阵$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(3)}$可求出矩阵$\hat{\boldsymbol{T}}$的最小二乘解：

$$\hat{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{\mathcal{U}}_{(3)}^{[s]}\cdot(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(3)}\cdot J)^{+} \tag{9}$$

式中，$^{+}$表示矩阵的广义逆。

将式(9)代入式(8)，可得：

$$\theta=\min\left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}_{(3)}^{[s]}-\boldsymbol{\mathcal{U}}_{(3)}^{[s]}\cdot(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(3)}\cdot J)^{+}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(3)}\cdot J\right\|_F^2=$$
$$\min\mathrm{tr}\{\boldsymbol{\mathcal{U}}_{(3)}^{[s]H}\cdot\boldsymbol{\mathcal{U}}_{(3)}^{[s]}P_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{\perp}\}=\max\mathrm{tr}\{\boldsymbol{\mathcal{U}}_{(3)}^{[s]H}\cdot\boldsymbol{\mathcal{U}}_{(3)}^{[s]}P_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\} \tag{10}$$

式中，$P_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{\perp}=\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(3)}\cdot J)^{+}\cdot(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(3)}\cdot J)$。

对式(8)进一步推广可得更一般形式的加权信号张量子空间拟合问题：

$$\theta,\hat{T}=\min\left\|\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[s]}\times_3\boldsymbol{W}^{1/2}-\boldsymbol{\mathcal{A}}\times_3\boldsymbol{T}\right\|_F^2 \tag{11}$$

式中，加权矩阵$\boldsymbol{W}\in\mathbb{C}^{K\times K}$；$K$为信号源数。可得关于$\theta$的解：

$$\theta=\min\mathrm{tr}\{\boldsymbol{\mathcal{U}}_{(3)}^{[s]H}\cdot W\cdot\boldsymbol{\mathcal{U}}_{(3)}^{[s]}P_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{\perp}\}=$$
$$\max\mathrm{tr}\{\boldsymbol{\mathcal{U}}_{(3)}^{[s]H}\cdot W\cdot\boldsymbol{\mathcal{U}}_{(3)}^{[s]}P_A\} \tag{12}$$

式中，$P_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}=(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(3)}\cdot J)^{+}\cdot(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(3)}\cdot J)$。与文献[2]类似，当加权矩阵满足：

$$\boldsymbol{W}=(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_S-\sigma^2\boldsymbol{I})^2\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_S^{-1} \tag{13}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_S$为信号特征值组成的对角矩阵[10]；$\sigma^2$为噪声的功率。式(13)即为最优权的加权信号张量子空间拟合算法(WSTF)。

4　加权信号张量子空间拟合算法实现

利用无约束最小化问题的修正牛顿法[2]，式(12)的加权信号张量子空间拟合算法可以用迭代的方式实现：

$$\theta_{k+1}=\theta_k+\mu_k\boldsymbol{H}^{-1}V' \tag{14}$$

$$V'=-\mathrm{Re}\{\mathrm{diag}(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(3)}^{+}MM^{\mathrm{H}}P_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{\perp}D)\} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{H}=2\,\mathrm{Re}\{(D^{\mathrm{H}}P_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{\perp}D)\odot(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(3)}^{+}MM^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(3)}^{+\,\mathrm{H}})^{\mathrm{T}}\} \tag{16}$$

式中，μ_k表示第k次迭代过程中的步长；$\boldsymbol{H}$表示代价函数的海赛矩阵；V'表示代价函数的梯度；$M=W^{1/2}\cdot\boldsymbol{\mathcal{U}}_{(3)}^{[s]}$；$\odot$表示矩阵的Hadamard积。

$$D=[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_1}a(\theta_1)\otimes u(\theta_1)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_2}a(\theta_2)\otimes u(\theta_2)$$
$$\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_K}a(\theta_K)\otimes u(\theta_K)] \tag{17}$$

为保证方位估计收敛到局部最小值点，需要对方位的初始值做出估计。借鉴信号子空间投影波束形成算法的思想[11]，本文将阵列流形矢量投影到信号张量子空间$\mathcal{U}^{[s]}$中，并对投影分量采用奇异值加权的方法，从而突出目标方位：

$$\theta=\arg\max P(\theta)=$$
$$\arg\max(\sum_{i=1}^{K}\mathcal{U}^{[s]}(:,:,i)\times_1\sigma_i a(\theta)\times_2\sigma_i u(\theta)) \tag{18}$$

式中，奇异值$\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$；$\lambda_i$为第$i$个信号对应的特征值[12]。

5 仿真试验与性能分析

针对声矢量接收基阵输出，运用上节介绍的加权信号张量子空间拟合算法进行仿真试验分析。

对于某一单次试验，如果估计出的两信号源方位$\hat{\theta}_1$与$\hat{\theta}_2$满足：

$$\left|\hat{\theta}_1-\theta_1\right|+\left|\hat{\theta}_2-\theta_2\right|<\left|\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2\right| \tag{19}$$

则称该次试验中两信号源正确分辨。分辨概率是指正确分辨次数占试验总数的百分比。

当多个信号源方位能够正确分辨时，各信号源方位估计均方根误差为：

$$\varepsilon_k=\sqrt{\frac{1}{N_{\mathrm{rst}}}\sum_{n=1}^{N_{\mathrm{rst}}}\left|\hat{\theta}_k^{(n)}-\theta_k\right|}\qquad k=1,2,\cdots,K \tag{20}$$

式中，$\hat{\theta}_k^{(n)}$表示第k个信号源在第n次试验的方位估计值；N_{rst}表示能正确分辨的次数。

假设不相关CW信号源位于基阵远场的40°和45°方位，频率分别为1 kHz和1.5 kHz，且两信号源功率相等。使用10元均匀声矢量线阵的输出估计目标入射方位，阵元间距为0.5 m，以4 dB为步长在–16～16dB内改变信噪比，在每个信噪比上进行100次独立蒙特卡洛试验，每次试验的快拍数为200。表1统计了在各个信噪比上的分辩概率以及对信号入射方位估计的均方根误差。从表1中可以看出：加权信号张量子空间拟合(WSTF)方位估计算法相比于常规声压阵信号子空间拟合具有较高的分辩概率和较小的均方根误差。

加权信号子空间拟合(WSF)是一种可解强相关信号源的算法，加权信号张量子空间拟合(WSTF)算法同样保持了解强相关信号源优点。表2给出了在信号相关系数为0.93时，上述仿真模型中的统计结果，本文算法在信噪比为–8 dB时就能以0.881的概率分辨强相关信号，优于传统的声压阵信号子空间解相关信号方法估计精度。

表1 不相关信号子空间拟合算法比较

信噪比/dB	分辨概率		均方根误差/(°)	
	常规算法	本文算法	常规算法	本文算法
–16	0.362	0.470	1.921	1.601
–12	0.451	0.612	1.575	1.203
–8	0.710	0.835	1.138	1.010
–4	0.924	0.972	1.030	0.725
0	0.975	1.000	0.621	0.500
4	1.000	1.000	0.485	0.304
8	1.000	1.000	0.205	0.119
12	1.000	1.000	0.137	0.073
16	1.000	1.000	0.092	0.051

表2 强相关信号子空间拟合算法比较

信噪比/dB	分辨概率		均方根误差/(°)	
	常规算法	本文算法	常规算法	本文算法
–16	0.298	0.400	1.966	1.591
–12	0.430	0.569	1.631	1.227
–8	0.569	0.881	1.259	1.005
–4	0.863	0.905	0.995	0.731
0	1.000	0.987	0.724	0.515
4	1.000	1.000	0.510	0.326
8	1.000	1.000	0.365	0.138
12	1.000	1.000	0.107	0.090
16	1.000	1.000	0.101	0.076

6 结 论

本文将通过高阶奇异值分解得到的信号张量子空间应用到声矢量阵方位估计中，使得该算法可以利用多维信号之间的关联关系，提取了声矢量阵输出的有效信息，得到如下结论：1) 信号张量子空间对噪声的抑制效果增强，进一步提高了信噪比，从而加权信号张量子空间拟合的方位估计精度更高。2) 信号张量子空间拟合算法不仅可以在低信噪比时能够较好地分辨不相关源，而且能够在低信噪比时分辩强相关源。

参 考 文 献

[1] VAN TREES H L. Optimum array processing[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008: 12-49.

[2] 孙超, 李斌. 加权子空间拟合算法与应用[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1994.
SUN Chao, LI Bin. Weighted subspace fitting algorithm: theory and application[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnic University Press, 1994.

[3] 朱维庆, 刘晓东, 张东升, 等. 多子阵子空间拟合波达方位估计[J]. 声学学报, 2006, 31(2): 120-125.
ZHU Wei-qing, LIU Xiao-dong, ZHANG Dong-sheng, et al. Estimation the direction of arrival based on multi-subarray subspace fitting[J]. Acta Acoustica, 2006, 31(2): 120-125.

(下转第591页)

信学报, 2007,11(5): 116-127.
CHANG Cu-yu, XIANG Yong, SHI Mei-lin. Development and status of vehicular Ad hoc networks[J]. Journal on Communications, 2007, 11(5): 116-127.
[4] TANG G M, XIE Y. Regional perimeter routing for GPSR based on left & right-hand rules[J]. Application Research of Computers, 2011, 3(28): 1100-1104.
[5] FÜßLER H, MAUVE M, HARTENSTEIN H, et al. Mobile com poster: Location-based routing for vehicular Ad hoc networks[J]. Mobile Computing and Communications, 2003, 7(1): 47-49.
[6] MUSICKI D, KAUNE R, KOCH W. Mobile emitter geolocation and tracking using TDoA and FDoA measurements[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 3(2): 1863-1874.
[7] DAWEI L, DAN W. A node-to-node location verifcation method[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2010, 57(5): 1526-1538.
[8] SONG J H, WONG VS, LEUNG V M. Secure location verification for vehicle Ad hoc networks[C]//Global Telecommunications Conference. Piscataway: IEEE, 2008: 1-5.
[9] LIU D, NING P, DU W K. Attack-resistant location estimation in sensor networks[C]//The 4th international symposium on information processing in sensor networks (IPSN’05). Piscataway, NJ, USA: IEEE Press, 2005: 99-106.
[10] ZHOU Yu, ZHANG Hai-yan, LIU Yan-chang. An attack-resistant localization algorithm in wireless sensor networks[C]//Wireless Communications Networking and Mobile Computing. Piscataway: IEEE, 2010: 1-4.
[11] XUE Xiao-ping, LIU Ming-yang, LIN Ni-zhong, et al. Time slice-based location verification for VANET[J]. China Communication, 2011, 9(8): 45-53.
[12] LAURENDEAU C, BARBEAU M. Probabilistic localization and tracking of malicious insiders using hyperbolic position bounding in vehicular network[J]. Journal on Wireless Communications and Networking, 2009, 2(4): 1-13.

编 辑 张 俊

(上接第548页)

[4] HAARDT M, ROEMER F, GALDO G D. Higher-order SVD-based subspace estimation to improve the parameter estimation accuracy in multidimensional harmonic retrieval problems[J]. IEEE Trans Signal Process, 2008, 56(7): 3198-3213.
[5] LATHAUWER L, MOOR B, VANDER-WALLE J. A multilinear singular value decomposition[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 2000, 21(4): 1253-1278.
[6] LATHAUWER L. Signal processing based on multilinear algebra[D]. Leuven, Belgium: Katholieke University, 1997.
[7] HAARDT M. Efficient one-, two- and multi- dimensional high resolution array processing[D]. Munich, Germany: Munich University of Technology, 1996.
[8] THAKRE A, HAARDT M, ROEMER F, et al. Tensor-based spatial smoothing using multiple snapshots[J]. IEEE Trans Signal Process, 2010, 58(5): 2715-2727.
[9] NION D, SIDIROPOULOS N D. Adaptive algorithms to track the Parafac decomposition of a third-order tensor[J]. IEEE Transactions, 2009, 57(6): 2299 -2310.
[10] KOLDA T G., BADER B W. Tutorial on matlab for tensors and the tucker decomposition[EB/OL]. [2012-03-05]. http: //csmr.ca. sandia.gov/~tgkolda/pubs/index.html# SAND2004-5187.
[11] RAO B D, HARI K V S. Weighted subspace methods and spatial smoothing: analysis and comparison[J]. IEEE Trans on SP, 1993, 41(2): 788-803.
[12] VIBERG M, OTTERSTEN B. Sensor array processing based on subspace fitting[J]. IEEE Trans on SP, 1991, 39(5): 1110-1121.

编 辑 税 红