

椭圆轨道上航天器位置的一种计算方法

顾晓勤*

(电子科技大学中山学院 广东 中山 528403)

【摘要】给出了沿椭圆轨道运动航天器真近点角和偏近点角的运动方程。用迭代法求出偏近点角变化规律，讨论了迭代收敛的充分条件。用数值积分方法求出真近点角与时间的关系曲线。数值模拟结果表明，该文提出的迭代计算方法有效且精度高，可作为航天器轨道计算的一种方法。

关键词 航天器；偏近点角；真近点角；迭代法

中图分类号 V412.41 文献标识码 A

A Calculating Method for Epicyclic Motion of Spacecraft

Gu Xiaoqin

(Zhongshan College, UEST of China Guangdong Zhongshan 528403)

Abstract The analytic formulations are presented of the epicyclic motion of a spacecraft about the true anomaly and the eccentric anomaly. The eccentric anomaly as a function of time is calculated by the iterative method. And the iteration's convergence-condition is discussed. The relationship between the true anomaly and the time is gotten by the numerical integral method. The numerical simulation's results of this approach are presented.

Key words spacecraft; eccentric anomaly; true anomaly; iterative method

航天器动力学研究航天器质心的轨道运动和绕质心转动的姿态运动，航天器轨道动力学超越了天体力学单纯解释、预测客观现象的局限性，可根据客观规律主动地设计和控制运动。将简化为质点的地球和航天器组成封闭系统，互相以万有引力吸引，称作二体系统。航天器绕地球的稳定运动一般为椭圆运动，遥感卫星、一般商用卫星等常采用小偏心率椭圆轨道，文献[1, 2]讨论了小偏心率的影响。本文讨论任意偏心率的椭圆轨道，运用迭代法求解Kepler方程，得到偏近点角与时间的关系，通过数值积分方法求得真近点角变化规律。

1 航天器的Kepler运动

m_e 和 m 分别表示地球和航天器，如图1所示，二体系统总质心 O ， $m r_1 + m_e r_2 = 0$ ， m_e 至 m 矢径 r ， $m \frac{d^2 r_1}{dt^2} = -m_e \frac{d^2 r_2}{dt^2} = -\frac{G m m_e}{r^3} \frac{d^2 r}{dt^2}$ 。推导得到

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{m}{r^3} r = 0 \quad (1)$$

式中 引力参数 $m = G(m_e + m)$ 。由于航天器质量 m 远远小于地球质量 m_e ，可知地球质心 O_e 与系统总质心 O 接近重合。可以足够精确地认为 O_e 与 O 重合，设

航天器 m 沿椭圆轨道绕地球质心 O_e 运动，椭圆右端点 π 为近地点，左端点 a 为远地点，如图2所示。以椭圆中

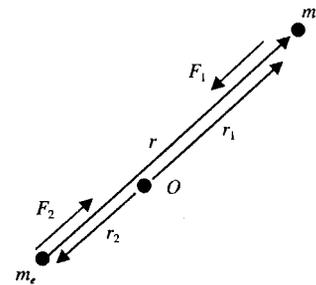


图1 二体系统

2003年8月30日收稿

* 男 39岁 博士 教授 主要从事动力学控制及计算机仿真方面的研究

心 O_0 为原点建立直角坐标系 O_0xy ；以 O_e 为极点、沿 $O_e\pi$ 的射线为极轴建立极坐标。航天器 m 位置由直角坐标 (x, y) 表示，也可以用极径 $r(=O_em)$ 和真近点角 q 确定。由图1可知地球质心和航天器质心连线 O_em 矢径的为 r ，将式(1)与 r 叉积，得到动量矩积分 $r \times v = h$ ，写成标量形式

$$r^2 \frac{dq}{dt} = h \quad (2)$$

将式(1)各项与动量矩 h 叉积，得到Laplace积分 $\frac{1}{m} v \times h - \frac{r}{r} = e$ ，
并与 r 点积，得到

$$r e \cos q = \frac{h^2}{m} - r \quad (3)$$

定义半轴参数 $p = h^2/m$ ^[3]，整理式(3)导出航天器 m 在轨道平面内以极坐标 r, q 表示的轨道方程

$$r = \frac{p}{1 + e \cos q} \quad (4)$$

联立式(2)、(4)，整理得到

$$\frac{dq}{(1 + e \cos q)^2} = w dt \quad (5)$$

式中 $w = h/p^2 = \sqrt{m/p^3}$ 。为了使式(5)可积，以 O_0 为圆心、以长半轴 a 为半径作辅助圆，设 m' 为辅助圆上与航天器 m 横坐标相同的对应点，称 $\angle \pi O_0 m'$ 为偏近点角，记作 E 。航天器 m 在直角坐标系 O_0xy 中有

$$x = a \cos E \quad y = b \sin E \quad (6)$$

式中 b 为椭圆短半轴。在极坐标中有

$$r \cos q = x - ae = a(\cos E - e) \quad r \sin q = y = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (7)$$

由式(7)得到以 E 为自变量的轨道方程^[3]

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (8)$$

由式(7)、(8)得到真近点角 q 与偏近点角 E 之间的微分关系

$$\frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E} dE = dq \quad (9)$$

将式(7)~(9)代入代式(5)得到积分结果为

$$E - e \sin E = w(t - t) \quad (10)$$

式中 t 为过近地点 π 时刻。

2 迭代求解

为求偏近点角 E 与时间 t 的关系，采用迭代法求解方程，将式(10)改写成等价的第 $k+1$ 次迭代形式

$$E_{k+1} = f(E_k) \quad f(E) = w(t - t) + e \sin E \quad (11)$$

取迭代初始值 $E_0 = w(t - t)$ ，当 $|E_{k+1} - E_k| < e$ 时停止迭代计算， e 按照精度要求确定。采用Lipschitz条件验证 $f(E_k)$ 是否收敛比较困难，本文用充分条件来导出迭代收敛对椭圆轨道参数的要求^[4]。

$|f'(E_k)| = |e \cos E| < e$ ，由于椭圆轨道偏心率 $e < 1$ ，所以式(12)严格满足。即迭代严格收敛。

$$|f'(E_k)| < 1 \quad (12)$$

算例：已知地球赤道半径 $R_e = 6.378 \times 10^6$ m。设近地点高度 $h = 322$ km，过近地点时刻 $t=0$ 。椭圆长半轴 $a = r / (1 - e) = (R_e + h) / (1 - e)$ ，半轴参数 $p = (R_e + h)(1 + e)$ 。航天器椭圆运动周期 $T_0 = 2\pi\sqrt{a^3/m}$ ，平均角速度 $w = 2\pi/T_0$ 。对于不同的偏心率，得到表1所示的参数。由迭代法得到在整个椭圆运动周期内偏近点角随时间变化曲线，如图3所示。对式(9)进行数值积分得到真近点角变化规律，如图4所示。为了比较真近点角与偏近点角在同一时刻之差值，计算得出如图5所示曲线。

表1 曲线参数

| 序号 | 偏心率 e | 长半轴 a/m | 半轴参数 p/m | 运动周期 T_0/s | 平均角速度 $w/rad\cdot s^{-1}$ |
|-----|---------|-------------------------|-------------------|--------------|----------------------------|
| 曲线1 | 0.1 | $7.444\ 445\times 10^6$ | 7.37×10^6 | 6 383 . 491 | $9.829\ 246\times 10^{-4}$ |
| 曲线2 | 0.2 | $8.375\ 000\times 10^6$ | 8.04×10^6 | 7 616 . 979 | $8.237\ 424\times 10^{-4}$ |
| 曲线3 | 0.3 | $9.571\ 429\times 10^6$ | 8.71×10^6 | 9 306 . 257 | $6.742\ 228\times 10^{-4}$ |

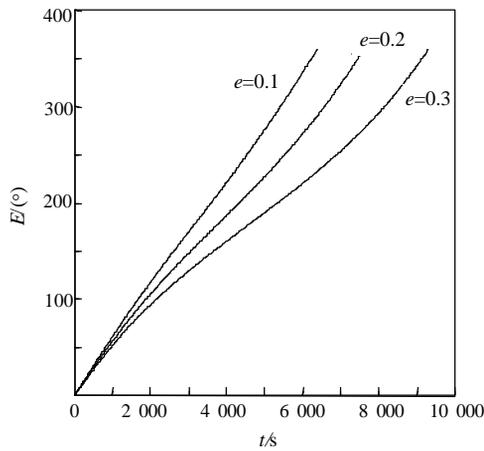


图 3 偏近点角随时间变化曲线

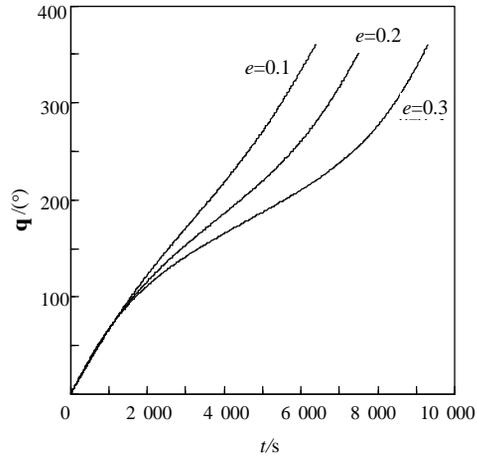


图 4 真近点角随时间变化曲线

4 结 论

随着计算技术的不断发展,运用数值模拟计算分析超越方程,是动力学发展的一个趋势。本文列写沿椭圆轨道运动的航天器真近点角方程以及偏近点角运动方程,运用迭代法求解Kepler方程,得到偏近点角与时间的关系,讨论了迭代收敛的充分条件。用数值积分方法求出真近点角与时间的关系曲线。本文所用计算方法简捷方便、易于编程,数值模拟结果表明该方法的有效性。本文的下一步工作是研究多精度计算方法,进一步提高计算模拟准确度。

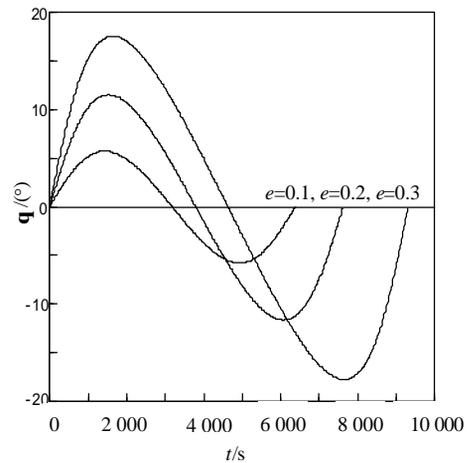


图 5 真近点角与偏近点角之差变化曲线

参 考 文 献

- [1] Hashida Y, Palmer P L. Epicyclic motion of satellites about an oblate planet[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2001, 24(3): 586-596
- [2] Meyer R X. Generalization of D'alembert's method for applications to dynamics[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2001, 24(4): 853-854
- [3] 刘延柱. 航天器姿态动力学[M]. 北京: 国防工业出版社. 1995. 13-27
- [4] 徐萃薇. 计算方法引论[M]. 北京: 高度教育出版社. 1985. 185-200

编辑 孙晓丹