

块H-矩阵的刻画*

高中喜** 黄廷祝

(电子科技大学应用数学学院 成都 610054)

【摘要】根据块对角占优、块严格对角占优和不可约对角占优矩阵的概念，针对 α 连对角占优矩阵，应用分块技术，给出和引进了块弱不可约 α 严格对角占优矩阵的概念，并在此基础上给出了简捷的块H-矩阵的充要条件和充分条件的刻画，推广和包含了已有的相应结果。

关 键 词 矩阵；块对角占优； α 连对角占优；不可约；方向图
中图分类号 O241.6

Equivalent Conditions of Block H-Matrices

Gao Zhongxi Huang Tingzhu

(College of Applied Mathematics, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract Based on the block diagonally dominant matrices, block strictly diagonally dominant matrices and irreducible diagonally dominant matrix, by the block α -connective diagonally dominant, the irreducibly block diagonal dominance is introduced and the block method are applied, and new simple equivalent conditions of the block H-matrices are obtained, which generalizes and includes the corresponding results of the matrices.

Key words matrix; block diagonally dominant matrix; α -connective matrix; irreducibility; directed graph

1 注 记

设 $A=(a_{ij}) \in C^{n,n}$ ，分块如下

$$A=(A_{ij})_{k,k} \quad (1)$$

式中 A_{ii} 为 r_i 阶方阵， $i \in \langle K \rangle = \{1, 2, \dots, k\}$ ，且 $\sum_{i=1}^k r_i = n$ 。

记

$$R_i(A) = \sum_{j \neq i} \|A_{ij}\| \quad S_i(A) = \sum_{j \neq i} \|A_{ji}\| \quad \forall i, j \in \langle K \rangle$$

式中 $\|\cdot\|$ 为向量范数诱导的矩阵范数(下同)。以 $G(A)$ 表示矩阵 $\|A_{ij}\|_{k,k}$ 的方向图，其顶点集及弧集分别记作 $V(A)$ 和 $E(A)$ ， e_{ij} 表示从顶点 i 到顶点 j 的弧， $C(A)$ 表示 $G(A)$ 中非平凡环路集合。对任意固定 $\alpha \in [0, 1]$ ，记

$$V_c(A) = \{i \in V(A) | i \in g \in C(A)\} \quad V_N(A) = V(A) \setminus V_c(A)$$

2002年1月7日收稿

* 四川省跨世纪杰出青年科技学术带头人基金资助项目，编号：JSA1081

** 男 26岁 硕士生

$$J_c^a(A) = \{g \in C(A) \mid \prod_{i \in g} \|A_{ii}^{-1}\|^{-1} > (\prod_{i \in g} R_i(A))^a (\prod_{i \in g} S_i(A))^{1-a}\}$$

$$q_c^a(A) = \{g \in C(A) \mid \prod_{i \in g} \|A_{ii}^{-1}\|^{-1} = (\prod_{i \in g} R_i(A))^a (\prod_{i \in g} S_i(A))^{1-a}\}$$

$$G^+ = \{j \in V(A) \mid e_{ij} \in E(A)\}$$

$A[s]$ 为行列足码皆在 $s = \{i_1 < i_2 < \dots < i_m\} \subseteq V(A)$ 中的 $|s| = m$ 阶主子阵, $m \in \langle M \rangle \subset \langle K \rangle$, 记 $\underline{A} = (\underline{A}_{ij})_{k,k}$, 其中 $s(\underline{A})$ 表示 $\underline{A}$ 的谱, 即特征值集合, $\underline{A}_{ii} = \|A_{ii}^{-1}\|^{-1}$, $\underline{A}_{ij} = -\|A_{ij}\|$, $i \neq j$, $i, j \in \langle K \rangle$ 。

若 $A = (a_{ij}) \in C^{n,n}$, 满足 $V(A) = V_c(A)$, 则称 A 为块弱不可约阵^[2], 记为 $A \in BWI$ 。

定义 1^[2] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n,n}$ 形如式(1)分块, 且 A_{ii} 是非奇异, $i \in \langle K \rangle$, 若

$$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} \geq R_i(A) \quad i \in \langle K \rangle \quad (2)$$

则称 A 为块对角占优矩阵, 记为 $A \in G_0$ 。若上式中的不等号均为严格的, 则称 A 为严格块对角占优矩阵, 记为 $A \in G$ 。若存在正对角矩阵 X , 使 $B = AX$ 为严格块对角占优矩阵, 则称 A 为块H-矩阵, 记为 $A \in G^*$ 。

块H-矩阵在数值分析、数学物理和控制论等领域中有着广泛的应用, 如何实际判定一个矩阵是块H-矩阵却是一个难题。对M阵、块H-矩阵等文献[1~6]中已有研究, 下面给出了简捷的块H-矩阵的充要条件和充分条件刻画, 包含了文献[1]的相应结果。

2 主要结果

本文给出下面的定义:

定义 2 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n,n} \cap BWI$, 若对某个 $a \in [0, 1]$, 有 $C(A) = q_c^a(A)$, 则称 A 为块弱不可约 a -对角占优矩阵, 记为 $A \in BWD_0^a$; 若 $C(A) = J_c^a(A)$, 则称 A 为块弱不可约 a -严格对角占优矩阵, 记为 $A \in BWD^a$; 若存在正对角矩阵 X , 使 $AX \in BWD^a$, 则称 A 为块拟弱不可约 a -严格对角占优矩阵, 记为 $A \in BWD^a$ 。

引理 1 设 $A = (a_{ij}) \in BWD^a$, 则 $J_c^a(A) \neq f$ 。

证明 因正纯量矩阵不改变矩阵的对角占优性, 故设正对角矩阵 $X = \text{diag}(x_1 I_{r1}, x_2 I_{r2}, \dots, x_k I_{rk})$ 满足 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k$, 且 $x_1 > x_k$, 使 $B = AX = (b_{ij}) \in BWD^a$ 。反之, 则对 $\forall g \in C(A)$ 皆有

$$\prod_{i \in g} \|A_{ii}^{-1}\|^{-1} \leq (\prod_{i \in g} R_i(A)) (\prod_{i \in g} S_i(A)) \quad (3)$$

对 $G(A)$ 中的顶点以其足码大小定义其先序。对 $\forall i_m \in V(A)$, 设 $i_{m+l} = \min_{i \in G_m^+} \{i\}$ 。因 $G_k^+ \neq f$ ($A \in BWI$), $i_{k+1} \in V(A)$ 必然存在。进而由文献[3]的引理2.6知, 存在 $g' \in C(A)$, $\gamma': i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_t \rightarrow i_{t+1} = i_1$, 满足 $i_{t+1} = \min_{i \in G_t^+} \{i\}$, $t \in \langle T \rangle$ 。于是有

$$\begin{aligned} R_{i_1}(B) &= \sum_{j \in G_{i_1}^+} \|A_{ij}\| x_j \geq x_{i_2} R_{i_1}(A) \\ &\vdots \\ R_{i_{t-1}}(B) &= \sum_{j \in G_{i_{t-1}}^+} \|A_{i_{t-1},j}\| x_j \geq x_{i_t} R_{i_{t-1}}(A) \\ R_{i_t}(B) &= \sum_{j \in G_{i_t}^+} \|A_{i_t,j}\| x_j \geq x_{i_1} R_{i_t}(A) \end{aligned}$$

进一步推得

$$\prod_{j=1}^t R_{i_j}(B) \geq \prod_{j=1}^t x_{i_j} \prod_{j=1}^t R_{i_j}(A) \quad (4)$$

注意到 $S_{i_j}(B) = x_{i_j} S_{i_j}(A)$, $\forall j \in \langle T \rangle$, 由式(2)和式(3)得

$$\left(\prod_{j=1}^t R_{i_j}(B)\right)^a \left(\prod_{j=1}^t S_{i_j}(B)\right)^{1-a} \geq \prod_{j=1}^t x_{i_j} \left(\prod_{j=1}^t R_{i_j}(A)\right)^a \left(\prod_{j=1}^t S_{i_j}(A)\right)^{1-a} \geq \prod_{j=1}^t x_{i_j} \prod_{j=1}^t \|A_{i_j i_j}^{-1}\|^{-1}$$

此即 $\left(\prod_{j=1}^t R_{i_j}(B)\right)^a \left(\prod_{j=1}^t S_{i_j}(B)\right)^{1-a} \geq \prod_{j=1}^t x_{i_j} \left(\prod_{j=1}^t \|A_{i_j i_j}^{-1}\|^{-1}\right)$ 这与 $B \in BWD^a$, 矛盾。

定理 1 设 $A=(a_{ij}) \in BWD^a$, 则 $A \in G^*$ 。

证明 因为 $A \in WD^a$, 由文献[1]知 A 非奇异, 且为正稳定阵。否则, $\forall l \in s(A)$ 有 $\operatorname{Re} l \leq 0$, 故

$$\underline{A}_l = \underline{A} - lI$$

对 $\forall g \in C(A)$ 满足

$$\prod_{i \in g} |\underline{A}_{ii} - l| \geq \prod_{i \in g} |\underline{A}_{ii}| > \left(\prod_{i \in g} R_i(\underline{A})\right)^a \left(\prod_{i \in g} S_i(\underline{A})\right)^{1-a} = \left(\prod_{i \in g} R_i(\underline{A}_l)\right)^a \left(\prod_{i \in g} S_i(\underline{A}_l)\right)^{1-a}$$

由文献[3]的定理2.7知 $\underline{A}_l$ 非奇异。这与 $l \in s(\underline{A})$ 矛盾, 故 $\underline{A}$ 为正稳定阵, 再由文献[3]知 $A \in G^*$ 。

定理 2 设 $A=(a_{ij}) \cap BWI$, 则 $A \in G^*$ 的充要条件是对某个 $a \in [0, 1]$, $A \in BWD^a$ 。

证明 必要性: 设正对角矩阵 X 使 $B=AX=B_{ij} \in BD$, 即 $\|B_{ii}^{-1}\|^{-1} > R_i(B)$, $\forall i \in \langle K \rangle$ 。有以下两种情形:

1) $\prod_{i \in g} R_i(B) \prod_{i \in g} S_i(B)$, $\forall g \in C(B)$, 得

$$\prod_{i \in g} \|B_{ii}^{-1}\|^{-1} > \prod_{i \in g} R_i(B) = \left(\prod_{i \in g} R_i(B)\right)^a \left(\prod_{i \in g} S_i(B)\right)^{1-a} \quad \forall g \in C(B)$$

故 $J_c^a(B) = C(B)$, 即 $B \in BWD^a$, 又由 $C(B) = C(A)$, 知 $A \in BWD^a$ 。

2) 存在 $g_1, g_2, \dots, g_l \in C(B)$ 使得 $\prod_{i \in g_j} R_i(B) \neq \prod_{i \in g_j} S_i(B)$, $j \in \langle M \rangle$ 。又由 $\forall g \in C(B)$,

$$\prod_{i \in g} R_i(B) > 0, \prod_{i \in g} S_i(B) > 0 \text{ 且 } \lim_{a \rightarrow 1^-} \left(\prod_{i \in g_j} S_i(B) / \prod_{i \in g} R_i(B)\right) = 1, j \in \langle M \rangle。$$

又因存在 $a_j \in (0, 1)$, 使得当 $1 > a > a_j$ 时满足 $g_j \in J_c^a(B)$, $\forall j \in \langle M \rangle$, 而对 $\forall g \in C(B) \setminus \{g_1, \dots, g_s\}$ 由 1) 知皆有 $g \in J_c^a(B)$ 。故 $\forall a \in (a_0, 1)$, 皆有 $g \in J_c^a(B)$, $\forall g \in C(B)$, 这里 $a_0 = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 。所以 $\forall a \in (a_0, 1)$, 由 $J_c^a(B) = C(B)$, 故 $A \in BWD^a$ 。

充分性: 设正对角阵 Y , 使 $AY \in BWD^a$ 。由定理1知有正对角阵 Z 使得 $AYZ \in BD$, 令 $X=YZ$, 则 X 为正对角阵, 由 $AX \in BD$ 知 $A \in G^*$ 。

定理 3 设 $A=(a_{ij}) \in C^{n,n}$, 则 $A \in G^*$ 的充要条件是 $\|A_{ii}^{-1}\| \neq 0$, $\forall i \in \langle K \rangle$, 对某个 $a \in [0, 1]$ 有 $A[V_c(A)] \in BWD^a$ 。

证明 只须证明 $C(A) \neq f$ 且 $V_N(A) \neq f$ 时成立。设有 n 阶置换阵 P 分块形式同 A , 使

$$PAP^T = (B_{ij})_{2,2}$$

其中 $B_{21}=0, V(B_{11})=V_N(A)$, $V(B_{22})=V_c(A)$, 则 B_{11} 为块上三角矩阵, 其中主对角线上为 $A_{i_1 i_1} \dots A_{i_k i_k}$, $V_N(A) = \{i_j, j \in \langle 1, 2, \dots, l \rangle\}$, $B_{22} \in BWI$ 。

由文献[2]知 $A \in G^*$ 的充分必要条件 $B_{11} \in H$, $B_{22} \in H$ 由定理2易知结论成立。同理 $V(B_{11})=V_c(A)$, $V(B_{22})=V_N(A)$ 时仍然成立。由引理1及定理3得

推论 1 设 $A=(a_{ij}) \in C^{n,n}$ 满足 $C(A) \neq f$, 则 $A \in G^*$ 的必要条件是 $\|A_{ii}^{-1}\| \neq 0$, $1 \leq i \leq K$ 且 $J_c^a(A[V_c(A)]) \in BWD^a \neq f$, 某个 $a \in [0, 1]$ 。

注: 当 $r_i=1$ 时上述引理1和定理1~3分别是文献[1]的引理1~3及定理1, 即本文的结果包含了文献[1]的相应结果。

参 考 文 献

- 1 李竹香, 逢明贤. 按环路 α -对角占优及应用. 计算数学, 2001, (3): 271-278
- 2 Berman A, Plemmons R J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Academic Press, New York, 1994
- 3 Brualdi R A. Matrices, eigenvalues, and directed graphs. Linear and Multilinear Algebra, 1982, (11): 143-165
- 4 黄廷祝, 白中治, 游兆永. 块对角占优的推广与特征值分布. 应用数学学报, 1998, 21(2): 277-281
- 5 黄廷祝. Ostrowski 定理的推广与非奇H-矩阵条件. 计算数学, 1994, 16(1): 19-24
- 6 黄廷祝. 块H阵 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界和最小奇异值的下界. 电子科技大学学报, 1996, 25(4): 441-444

· 科研成果介绍 ·

现代知识产权分析

主研人员: 李仕民 唐小我 肖延高 井润田 魏立新 阳晓明

现代知识产权分析运用跨学科和定性与定量相结合方法, 在产权科学内涵、企业产权结构, 国有企业性质与国有企业改革, 经济时代与核心资源变迁以及企业产权配置、期权理论、腐败寻租与产权化动态激励机制定量分析等方面进行广泛、深入的综合研究, 取得了一系列丰硕研究成果。

在产权概念与企业理论方面, 廓清了我国在产权概念上的误区, 深入分析企业产权的形成和分化过程, 研究了企业及企业的产权制度改革。

在国有企业改革方面, 提出国有企业的产权关系必须向建立民商事法律关系变革, 遵循政企分开、政资分开、两权分开等基本准则, 建立规范的制度安排。国有产权的实现机制可以和应当多元化。

在现代企业激励机制方面, 提出知识经济时代的核心资源是智能, 对企业经理的激励是企业激励机制的核心。

该研究成果学术观点正确, 论证严谨, 富有创新, 在国内管理学和经济学界产生重要影响, 已被国内多家企业应用于经营管理实践中发表的论文被多次引用或列入文献索引, 对我国在产权领域的理论与实践具有重要的学术和应用价值。

大型重要特殊矩阵类的理论及其数值分析

主研人员: 黄廷祝 黎 稳 王川龙

若干大型重要特殊矩阵类的理论和数值分析问题是计算与应用数学中的前沿课题。该成果在特殊矩阵类及应用和相关数值分析问题, 一般复方阵的数值特征等方面进行了出色的研究, 解决了美国数学家关于Boole矩阵行空间基数的猜想及关于矩阵分裂的猜想并回答了四个公开问题, 建立了一些有重要应用的特殊矩阵(并行)计算方法的收敛性理论, 获得了一般复方阵若干重要数值特征的实用优良估计。发表论文80多篇, 已由SCI收录的有19篇, EI收录有23篇, 而且被国内外同行引用的有50多篇次。

大气和烟尘光传输特性测量和建模

主研人员: 刘炎焱 王俊波 杨小丽 万德明 刘赤宇 陈孝查

大气和烟尘光传输特性测量和建模课题提供了烟尘中激光传输特性模型和初步软件, 为分析烟尘、海雾对激光系统影响提供了一种良好的分析手段; 对三种烟雾器材综合传输特性进行了测试试验工作, 为“大气激光通信”提供了大气吸收数据。

· 甬 江 ·