相位舍位对 DDS谱分布的影响

张玉兴* 彭清泉
(电子科技大学电子工程系 成都 610054)

【摘要】 采用严格的信号分析方法,运用离散傅里叶变换(DFT)和傅里叶变换(FT)详细推导了理想状态和相位舍位条件下直接数字频率合成器(DDS)的频谱分布规律。所得到的理论推算结果与目前公认的结果一致,这对实际的 DDS系统设计有着极大的参考价值。

关 键 词 直接数字频率合成器; 相位累加器; 相位舍位; 离散傅里叶变换; 傅里叶变换
中图分类号 TN74

DDS作为一种新型的频率合成技术,由于其具有频率分辨率高、捷变速度快以及可灵活产生多种信号等优点,自 70年代初问世以来一直倍受亲睐。特别是近几年,DDS技术的不断完善以及集成工艺水平的迅速提高加速了 DDS产品更新换代的步伐,DDS已进入实用化阶段。生产出高时钟频率、低杂散、低成本、低功耗、集 DAC于一体并同时具有多种调制功能的 DDS芯片是 DDS技术发展的总趋势。目前据有关资料报道: ADS-43x系列 DDS时钟频率可达 1.6 GHz, L(1 kHz) < −100 dBc/Hz[1];适用于无线通信的低功耗多芯片组件(MCM) DDS时钟频率可达 2.0 GHz[2];内部集成有 14位 DAC的 MCM DDS OTDDS-1024时钟频率达到 1.0 GHz,在此基础上推出的 FAST系列时钟频率可达 20 GHz[3]。同时,基于 DDS的系统也相继推出。以 DDS为核心构成的相控阵雷达实验系统已经研制成功[4],DDS也可用于雷达的波形产生和误差校正[5]。另外已有 DDS技术用于个人手提电话和远距离数字无线通信系统的报道。可以预料,随着低价格、高时钟频率、高性能的新一代 DDS芯片的问世,DDS的应用前景将不可估量。

DDS作为一种全数字器件,不可避免地会带来杂散信号,杂散多且较难预知一直是限制 DDS应用的主要因素。为了获得尽可能纯的信号,除在 DDS芯片内采用有效的杂散抑制技术外,更现实的是在设计时尽量避开杂散多而强的区域。由此可见研究 DDS谱分布已显得尤为必要。在此之前,Nicholas III等人用数论的方法近似推导出了相位舍位对 DDS谱分布的影响[6],kroupa等人也有数篇文章采用理论推导和计算机模拟的方法得到了 DDS谱分析的经验结果[7,8]。本文则采用严格的信号分析方法来详细地推导相位舍位时 DDS的谱分布。

1 DDS的工作原理

下面以 DDS合成正弦波为例来介绍 DDS的工作原理。一个完整的 DDS内部结构如图 1所示。相位累加器在每一个时钟上升沿与频率控制码 K 累加一次,当累加器计数大于 2^N 时,相位累加器相当于做一次模余运算。正弦查询表 ROM在每一个时钟周期内,根据送给 ROM的地址(相位累加器的前 m 位相位值)取出 ROM中已存储与该地址相对应的正弦幅值,最后将该值送给 DAC和 LPF实现量化幅值到一个纯净的正弦信号间的转换。可以看出,输出频率 f_0 与时钟频率

① 1997年 1月 10日收稿, 1997年 3月 4日修改定稿
* 男 54岁 大学 副教授

f_c之间的关系

满足

$$f_0=\frac{K}{2^N}f_c \tag{1}$$

DDS的最小频率分辨率$\Delta f_{\min}$可达

$$\Delta f_{min}=\frac{1}{2^N}f_c \tag{2}$$

由 DDS内部结构知影响 DDS谱分布的因素有:相位累加器的输出存在舍位;正弦查询表 ROM输出码长有限;DAC输入的数据总线有限以及 DAC的非线性。另外时钟的串扰可给 DDS新增很多杂散,但可通过适当布线布局等方式予以很好抑制。限于篇幅,本文只研究相位舍位对 DDS频谱的影响。

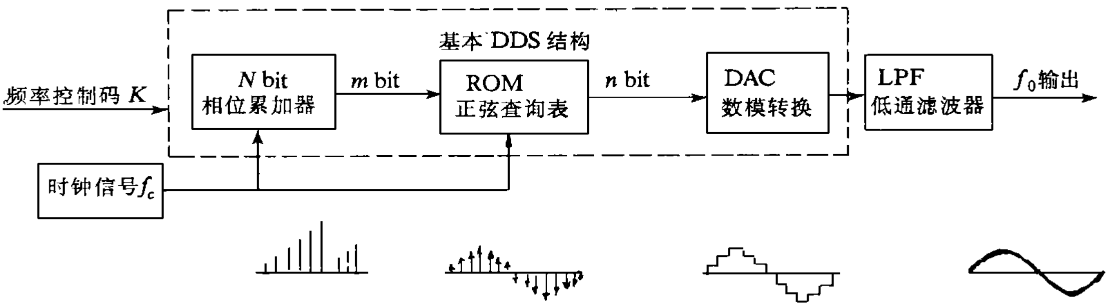

图 1 DDS用于合成正弦波框图

2 理想 DDS的谱分析

所谓理想 DDS是指:1) 无相位舍位;2) ROM输出值用无限长的码来表示;3) DAC的分辨率无限小并具有理想的数模转换特性;4) 无时钟串扰。

本文给出了 $K=3,N=4$时理想 DDS输出波形,如图 2所示。图中的阶梯波即为 DDS的输出波形,其数学表达式可写为

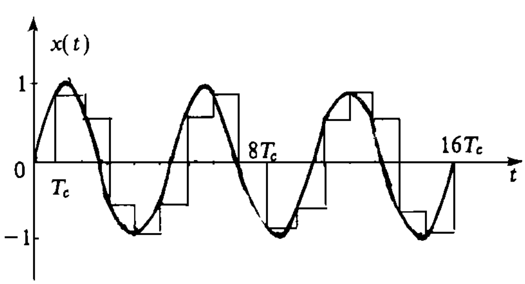

图 2 $f_0=\frac{K}{2^N}f_c=\frac{3}{16}f_c$时 DDS输出波形

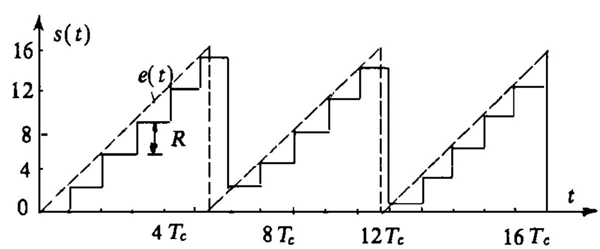

图 3 $R=3,B'=4$时相位舍位误差序列 $S(t)$

$$X(t)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sin k_0 t W(t-rT_c)*P_{T_c}(t-\frac{1}{2}T_c) \tag{3}$$

其中定义

$$P_{T_c}(t-\frac{1}{2}T_c)=\begin{cases}1 & 0\leqslant t<T_c\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{4}$$

对$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \sin k_0 t W(t - rT_c)$作离散傅里叶变换[9]

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \sin k_0 t W(t - rT_c) \overset{\text{DFT}}{\leftrightarrow} \frac{-j\pi}{T_c}\sum_{r=-\infty}^{\infty}[W(k + rk_c - k_0) - W(k + rk_c + k_0)] \tag{5}$$

又

$$P_{T_c}(t - \frac{1}{2}T_c) \overset{\text{FT}}{\leftrightarrow} T_c S_a(\frac{kF_c}{2})\exp(\frac{jkT_c}{2}) \tag{6}$$

其中定义

$$S_a(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{7}$$

根据式(5)、(6)及 $S_a(x) = S_a(-x)$可得阶梯波 $X(t)$的谱分布为

$$X(k) = -j c\sum_{r=-\infty}^{\infty} S_a(\frac{f_0 - rf_c}{f_c}c)\exp(j\frac{f_0 - rf_c}{f_c}c)W(k + rk_c - k_0) +$$

$$j c\sum_{r=-\infty}^{\infty} S_a(\frac{f_0 + rf_c}{f_c}c)\exp(j\frac{f_0 + rf_c}{f_c}c)W(k + rk_c + k_0) \tag{8}$$

$X(k)$即为理想 DDS输出信号的频域表达式。由此可见,理想 DDS输出信号的谱线仅位于 $lk_c \pm k_0$ 处($l = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots\cdots$)。根据奈奎斯特取样准则 $k_0 \leqslant \frac{1}{2}k_c$,不难得出理想 DDS输出频谱在 k_0 处信号最强,其幅值达 $cS_a(\frac{f_0}{f_c}c)$。

3 相位舍位误差 $S(t)$

首先定义 $a = \frac{K}{2^N} = \frac{X}{Y}$ (X、Y互质),$\lambda = Gcd(K, 2^N) = 2^M$ (Gcd—最大公约数),则有 $K = \lambda X$, $2^N = 2^M Y$。根据 DDS相位累加器的工作原理知,该 DDS实际上只相当于相位累加器位数为 $N' = N - M = \log_2 Y$,输入码字为 X的 DDS,相位累加器输出的最后 M位未起任何作用。在下面的分析中,我们将相位累加器舍去的位数定为 $B' = B - M$(B为实际 DDS相位舍去的位数),并假定 $B' > 0$,因为当 $B \leqslant M$时,$B' \leqslant 0$,这意味着不存在由相位舍位引起的误差,即 $S(t) \equiv 0$。

令 $S(m)$为 $t = mT_c$时的相位舍位误差,由相位累加器的舍位规则知

$$S(m) = mX \bmod 2^{B'} \tag{9}$$

式中 mod表示模余运算。用 R表示每一个时钟周期内的误差增量,则 $R = S(1) = X \bmod 2^{B'}$。图 3给出了 $R = 3$, $B' = 4$时相位舍位误差序列 $S(t)$。图中虚线表示周期为$\frac{2^{B'}}{R}T_c$的锯齿波 $e(t)$。

参照图 3可写出相位舍位误差 $S(t)$在整个时域内的表达式为

$$S(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S(m) * P_{T_c}(t - \frac{1}{2}T_c) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e(t)W(t - mT_c) * P_{T_c}(t - \frac{1}{2}T_c) \tag{10}$$

经过变换可求得 $e(t)$的傅里叶变换为

$$E(k) = \sum_{n=1}^{\infty} j\frac{2^{B'}}{n}[W(k - nk_x) - W(k + nk_x)] + 2^{B'} cW(k) \tag{11}$$

其中

$$k_x = \frac{R}{2^{B'}}k_c \tag{12}$$

于是冲激序列$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e(t)W(t - mT_c)$的 DFT$F(k)$为

$$F(k) = \frac{1}{T_c}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} j\frac{2^{B'}}{n}[W(k + mk_c - nk_x) - W(k + mk_c + nk_x)] +$$

$$\frac{c2^{B'}}{T_c}\sum_{m=-\infty}^{\infty} W(k - mk_c) \tag{13}$$

由式(6)、(10)、(13)可得 $S(t)$的频谱分布为

$$S(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} j\frac{2^{B'}}{n} S_a(\frac{mf_c - nf_x}{f_c}c)\exp(-j\frac{mf_c - nf_x}{f_c}c)W(k + mk_c - nk_x) -$$
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} j\frac{2^{B'}}{n} S_a(\frac{mf_c + nf_x}{f_c}c)\exp(-j\frac{mf_c + nf_x}{f_c}c)W(k + mk_c + nk_x) \tag{14}$$

由式(14)可以看出,相位舍位误差 $S(t)$的频谱分布在 $mk_c \pm nk_x$ 处。在谱线位于 $mk_c + nk_x$ 处其频域内的幅值为 $\frac{2^{B'}}{n}S_a(\frac{mf_c + nf_x}{f_c}c)$,在谱线位于 $mk_c - nk_x$ 处,幅值为 $\frac{2^{B'}}{n}S_a(\frac{mf_c - nf_x}{f_c}c)$。其中 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$; $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$。

4 相位舍位对 DDS谱分布的影响

假定 DDS只存在相位舍位误差,不存在引起杂散的其他因素。由 DDS工作原理可知经相位舍位后,DDS输出的正弦波幅值在 $t = mT_c$处为

$$Z(m) = \sin[2cm\frac{X}{Y} - \frac{2c}{Y}scm)] \tag{15}$$

实际上 $\frac{2c}{Y}S(m) \ll 1$,则 $$Z(m) \approx \sin 2cm\frac{X}{Y} - \frac{2c}{Y}S(m)\cos 2cm\frac{X}{Y} \tag{16}$$

由式(23)易见,$S(t)$引起的 DDS输出误差 $h(t)$在 $t = mT_c$处为

$$h(m) = \frac{2c}{Y}S(m)\cos 2cm\frac{X}{Y} \tag{17}$$

据 DDS的工作原理知 $h(t)$可表示为

$$h(t) = \frac{2c}{Y}S(t)u(t) \tag{18}$$

式中 $$u(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty}\cos k_0 t W(t - sT_c) * P_{T_c}(t - \frac{1}{2}T_c) \tag{19}$$

通过与式(3)类似的推导,可得 $u(t)$的傅里叶变换为

$$U(k) = c\sum_{s=-\infty}^{\infty} S_a(\frac{sf_c - f_0}{f_c}c)\exp(-j\frac{sf_c - f_0}{f_c}c)W(k + sk_c - k_0) +$$
$$c\sum_{s=-\infty}^{\infty} S_a(\frac{sf_c + f_0}{f_c}c)\exp(-j\frac{sf_c + f_0}{f_c}c)W(k + sk_c + k_0) \tag{20}$$

由式(14)、(18)、(20)可求得由相位舍位引起的 DDS输出误差的谱分布为

$$(k) = \frac{jc2^{B'}}{Y}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}S_a(\frac{mf_c - nf_x}{f_c}c)S_a(\frac{sf_c - f_0}{f_c}c)\exp(-j\frac{pf_c - nf_x - f_0}{f_c}c)\times$$
$$W(k + pk_c - nk_x - k_0) + \frac{jc2^{B'}}{Y}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}S_a(\frac{mf_c - nf_x}{f_x}c)S_a(\frac{sf_c + f_0}{f_c}c)\times$$
$$\exp(-j\frac{pf_c - nf_x + f_0}{f_c}c)W(k + pk_c - nk_x + k_0) - \frac{jc2^{B'}}{Y}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\times$$
$$S_a(\frac{mf_c + nf_x}{f_c}c)S_a(\frac{sf_c - f_0}{f_c}c)\exp(-j\frac{pf_c + nf_x - f_0}{f_c}c)W(k + pk_c + nk_x - k_0) -$$

$$\frac{\mathrm{j} c 2^{B'}}{Y}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}S_a\left(\frac{mf_c+nf_x}{f_c}c\right)S_a\left(\frac{sf_c+f_0}{f_c}c\right)\exp\left(-\mathrm{j}\frac{pf_c+nf_x+f_0}{f_c}c\right)\times$$
$$W(k+pk_c+nk_x+k_0) \tag{21}$$

式中　$P=s+m$。

由式(21)可知,$S(t)$的存在将会引起频率为$-pf_c\pm nf_x\pm f_0$的杂散信号,其杂散分布如下:

1) 在杂散 $f=-pf_c+nf_x+f_0$ 处幅度为$\frac{c2^{B'}}{nY}S_a\left(\frac{mf_c-nf_x}{f_c}c\right)S_a\left(\frac{sf_c-f_0}{f_c}c\right)$;

2) 在杂散 $f=-pf_c+nf_x-f_0$ 处幅度为$\frac{c2^{B'}}{nY}S_a\left(\frac{mf_c-nf_x}{f_c}c\right)S_a\left(\frac{sf_c+f_0}{f_c}c\right)$;

3) 在杂散 $f=-pf_c+nf_x+f_0$ 处幅度为$\frac{c2^{B'}}{nY}S_a\left(\frac{mf_c+nf_x}{f_c}c\right)S_a\left(\frac{sf_c-f_0}{f_c}c\right)$;

4) 在杂散 $f=-pf_c-nf_x-f_0$ 处幅度为$\frac{c2^{B'}}{nY}S_a\left(\frac{mf_c+nf_x}{f_c}c\right)S_a\left(\frac{sf_c+f_0}{f_c}c\right)$。

因 f_0需满足 $f_0\leqslant 0.5f_c$,所以 $S_a\left(\frac{sf_c\pm f_0}{f_c}c\right)$在 $S=0$处取得最大值 $S_a\left(\frac{f_0}{f_c}c\right)$。当 $f_x=\frac{R}{2^{B'}}f_c<0.5f_c$时,$\frac{c2^{B'}}{nY}S_a\left(\frac{mf_c\pm nf_x}{f_c}c\right)$在 $m=0,n=1$时取得最大值$\frac{c2^{B'}}{Y}S_a\left(\frac{f_x}{f_c}c\right)$。当 $0.5f_c\leqslant f_x\leqslant f_c$时,$\frac{c2^{B'}}{nY}S_a\left(\frac{mf_c\pm nf_x}{f_c}c\right)$在 $m\mp 1,n=1$时取得最大值$\frac{c2^{B'}}{Y}S_a\left(\frac{f_c-f_x}{f_c}c\right)$。于是有如下结论:

1) 当 $f_x<0.5f_c$时,最强杂散位于$\pm f_x\pm f_0$处,幅度为$\frac{c2^{B'}}{Y}S_a\left(\frac{f_x}{f_c}c\right)S_a\left(\frac{f_0}{f_c}c\right)$;

2) 当 $0.5f_c\leqslant f_x<f_c$时,最强杂散位于$\pm f_c\pm f_x\pm f_0$处,幅度为$\frac{c2^{B'}}{Y}S_a\left(\frac{f_c-f_x}{f_c}c\right)S_a\left(\frac{f_0}{f_c}c\right)$。

由于$|S_a(x)|\leqslant 1$,所以由相位舍位引起的杂散幅度总小于$\frac{c2^{B'}}{Y}S_a\left(\frac{f_0}{f_c}c\right)$。另由式(8)得到 DDS输出信号的幅值 $cS_a\left(\frac{f_0}{f_c}c\right)$。从而可写出存在相位舍位的 DDS输出信噪比为

$$\frac{S}{N}>\frac{Y}{2^{B'}}=\frac{2^N}{2^B}=2^{N-B} \tag{22}$$

用分贝表示为

$$(S/N)_{\mathrm{dB}}>6.02(N-B) \tag{23}$$

5 结 束 语

本文采用严格的信号分析方法,在首次对相位累加器进行等效的基础上推导出了相位舍位对 DDS谱分布的影响程度,并得到以下结论:

1) 相位舍位将会产生频率为$-pf_c\pm nf_x\pm f_0$的杂散信号。

2) 当 $f_x<0.5f_c$时,由相位舍位引起的最强杂散位于$\pm f_x\pm f_c$处,幅度为 $c2^{B-N}S_a\left(\frac{f_x}{f_c}c\right)S_a\left(\frac{f_0}{f_c}c\right)$;当 $0.5f_c\leqslant f_x\leqslant f_c$时,由相位舍位引起的最强杂散位于$\pm f_c\pm f_x\pm f_0$处,幅度为 $c2^{B-N}S_a\left(\frac{f_c-f_x}{f_c}c\right)S_a\left(\frac{f_0}{f_c}c\right)$。

3) 存在相位舍位的 DDS输出信噪比优于 6.02$(N-B)$ dB。

参 考 文 献

1 Sciteq Inc. Users guide. San Diego, 1993

2 Yamagishi A, Ishikawa M, Tsukahara T et al. A 2-v 2 GHz low power direct digital frequency synthesizer chip set for wireless communication. IEEE Custom Integrated Circuits Conference, 1995: 319~ 322

3 A MCM direct digital synthesizer with 12-bit resolution. Microw J(USA), 1996, 39(5): 302~ 304

4 Garrod A. Digital modules for phased array radar. IEEE International Radar Conference, 1995: 726 ~ 731

5 Adler E D, Viveiros E A, Ton T. Direct digital synthesis applications for radar development. IEEE Internation Radar Conference, 1995: 224~ 226

6 Nicholas H T Ⅲ, Samueli H. An analysis of the output spectrum of direct digital frequency synthesizers in the presence of phase-accumulator truncation. IEEE 41st Annual Frequency Control Symposium, 1987: 495~ 502

7 Kroupa V F. Discrete sputions siganl and background noise in direct digital frequency synthesizers. Interational Frequency Control Symposium, 1993: 242~ 250

8 Kroupa V F. Spectral properties of DDFS: Computer simulations and experimental verifications. IEEE International Frequency Control Symposium, 1994: 613~ 623

9 Crochiere R E, Rabiner L R. Multirate digital signal processing. New Jersey: Prentice-Hall Inc, 1983: 13~ 18

Effect on Output Spectrum of DDS in Presence of Phase Truncation

Zhang Yuxin Peng Qingquan

(Dept. of Electronic Eng., UEST of China Chengdu 610054)

Abstract Based on rigious signal analysis, some spectrum expressions of direct digital synthesizer (DDS) are presented by employing discrete Fourier transform (DFT) and Fourier transform (FT) in this paper. First, the output characteristics of DDS with ideal parameters are discussed. Then, the distribution and amplitude of output spectrum of DDS are provided in the presence of phase-accumulator truncation in details. The deduced results are quite in agreement with general-recognized ones. The conclusion is useful for real DDS System design.

Key words direct digital synthesizer; phase accumulator; phase truncation; discrete Fourier transform; Fourier transform

编辑 徐培红