

用积分方程求解散射体自然频率的新方法^{*}

吴先良^{**} 焦 丹 王良知

(安徽大学电子工程与信息科学系 合肥 230039)

【摘要】 散射物体自然频率(极点)对目标识别有重大意义,奇点展开法采用矩量法化积分方程为矩阵方程,通过求解系统矩阵行列式零点来获得极点。提出了一种直接从积分方程出发,对积分核函数作快速傅里叶变换(FFT),通过求解 FFT 获得的各分量在复平面上的零点来求取散射体极点的新方法,并以细线导体为例,在很短时间内计算出精度很高的极点。

关 键 词 极点; 散射体; 快速傅里叶变换; 积分方程

中图分类号 TN011; TN0151

物体的自然频率在复平面上的分布,只由物体本身的形状和构成材料决定,与外加激励无关,这对目标识别有重大意义,因此求取物体极点的方法一直受到人们的重视。

1971 年, C. E. Baum 提出的处理瞬态电磁场的奇点展开法,用矩量法把积分方程化成矩阵方程^[1,2],然后求解系数矩阵行列式的零点来获得极点。其中,求解系数矩阵的行列式零点的方法到目前为止主要有三大类:迭代法,围线积分法, Kuhn 法^[3]。由于矩量法本身是对积分方程的一种近似,再加上系统矩阵元素包含大量积分运算,积分精度受到计算机运算速度限制不能取得太高,以及系统矩阵阶数较高时行列式计算带来的误差,使得用奇点展开法获得的散射体的极点精度较低,甚至面目全非。

本文直接从积分方程出发,不采用矩量法,对积分核函数作快速傅里叶变换(FFT),通过求解 FFT 的各分量在复平面上的零点来获得散射体的极点,避免了上述几种误差,速度快、精度高,寻找一定区域内的极点无一遗漏,在实际应用中取得了很好的效果。

1 算法介绍

大多数电磁散射问题在复频域归于求解如下形式的积分方程

$$\int_{\Gamma} K(Z, Z', s) I(Z', s) dZ' = V(Z, s) \quad (1)$$

而积分核 $K(Z, Z', s)$ 一般为距离 R 的函数, R 又是 $(Z - Z')$ 的函数,故可以将 $K(Z, Z', s)$ 记作函数 $K(Z - Z', s)$,则式(1)化为

$$\int_{\Gamma} K(Z - Z', s) I(Z', s) dZ' = V(Z, s) \quad (2)$$

观察式(2),发现该积分方程是第一类卷积型 Fredholm 方程。这种积分方程的解是不稳定的^[4],但可以证明由它获得的零点是稳定的(见附录),这为用不稳定的积分方程式(2)求解散射物体的极点提供了理论依据。

1997 年 6 月 9 日收稿

* 国家自然科学基金资助项目

** 男 42 岁 大学 副教授

针对式 (2) 为一卷积型积分方程, 本文直接对它作傅里叶级数展开。任意定义在区间 $[-T, T]$ 上的函数 $f(t)$ 可展开成傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \exp(-\frac{n}{T}t) \quad (3)$$

其中

$$d_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \exp(i \frac{n}{T}t) dt \quad (4)$$

不妨设积分核 $K(Z-Z', s)$ 定义在区间 $[-1, 1]$ 上, 对函数 $I(Z', s), V(z, s)$ 作相应的延拓后, 分别

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l \left[\int_{-l}^l K(Z, Z', s) I(Z', s) dZ' \right] \exp(-i \frac{n}{l}z) dz = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \int_{-l}^l V(Z, s) \exp(-i \frac{n}{l}z) dz \quad (5)$$

由于式 (2) 为一卷积积分, 式 (5) 可化成乘积形式

$$2la_n(s)b_n(s) = C_n(s) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

其中

$$\begin{cases} a_n(s) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l K(Z, s) \exp(i \frac{n}{l}z) dz \\ b_n(s) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l I(Z, s) \exp(i \frac{n}{l}z) dz \\ c_n(s) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l V(Z, s) \exp(i \frac{n}{l}z) dz \end{cases} \quad (7)$$

将式 (6) 写成矩阵形式得

$$2l \begin{bmatrix} a_1(s) & & & \\ & a_2(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \\ \vdots \\ b_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(s) \\ c_2(s) \\ \vdots \\ c_n(s) \end{bmatrix} \quad (8)$$

在零激励时, 有

$$2l \begin{bmatrix} a_1(S_a) & & & \\ & a_2(S_a) & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n(S_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(S_a) \\ b_2(S_a) \\ \vdots \\ b_n(S_a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中 S_a 是散射体的极点, 式 (9) 有解的充要条件是

$$a_1(S_a)a_2(S_a)\cdots a_n(S_a) = 0 \quad (10)$$

因此散射体的极点 S_a 就是 $a_1(s), a_2(s), \dots, a_n(s)$ 的零点。而由式 (7) 可以看出, $a_n(s)$ 采用对积分核函数 $K(Z, s)$ 作快速傅里叶变换很快即可获得

2 计算实例

考虑一个细线导体的散射问题, 细线导体表面感应电流满足积分方程

$$\int_0^L I(Z', s) \left(\frac{\partial}{\partial Z^2} - \frac{S^2}{C^2} \right) K(Z, Z', s) dZ' = -sX_0 E^{inc}(Z, s) \quad (11)$$

其中

$$K(Z, Z', s) = \frac{\exp(-\frac{s}{C}R)}{4^C R} \quad (12)$$

$$R = \sqrt{(Z - Z')^2 + a^2} \quad (13)$$

式中 L, a 分别为细线的长度、半径。经本文提出的算法处理,求解细线导体的极点问题化为求解快速傅里叶变换各项

$$a^n(s) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L K(u) \exp(i \frac{n}{L} u) du = 0 \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(14)

式中

$$K(u) = \left[\frac{\partial}{\partial u^2} - \frac{S^2}{C^2} \right] \frac{\exp(-\frac{S}{C} \sqrt{u^2 + a^2})}{4^C \frac{u^2 + a^2}{C^2}}$$

(15)

的零点问题。由此计算得细线导体的前 9 个极点如表 1 所示。

表 1 细线导体的极点 ($d/L=0.01$)

极点序号	本文算法	奇点展开法	
		迭代法	Kuhn法
1	- 0.037 663 8+ 1.006 18 I	- 0.082+ 0.926 I	- 0.082+ 0.927 I
2	- 0.039 930 6+ 1.999 29 I	- 0.120+ 1.897 I	- 0.123+ 1.906 I
3	- 0.041 532 4+ 2.996 45 I	- 0.147+ 2.874 I	- 0.153+ 2.850 I
4	- 0.042 816 9+ 3.994 75 I	- 0.169+ 3.854 I	- 0.178+ 3.826 I
5	- 0.043 903 3+ 4.993 55 I	- 0.188+ 4.835 I	- 0.200+ 4.813 I
6	- 0.044 851 8+ 5.992 62 I	- 0.205+ 5.817 I	- 0.223+ 5.791 I
7	- 0.045 698 0+ 6.991 86 I	- 0.220+ 6.800 I	- 0.239+ 6.770 I
8	- 0.046 464 7+ 7.991 21 I		
9	- 0.047 167 8+ 8.990 65 I		

和文献 [2] 比较,用本文方法计算的极点虚部远比奇点展开法更逼近于理论值,且实部也十分逼近于虚轴,是一种精度相当高的求解极点的方法。

3 结 论

本文提出的方法是一种很好的求解散射物体极点的方法。由于它没有采用传统的矩量法,直接对积分核函数作快速傅里叶变换,而 FFT 较矩量法求解积分方程的误差要小得多。另外本文的方法避免了大量系统矩阵元素的计算及高阶系统矩阵行列式的计算,大大提高了算法的精度,加快了算法的速度,可望在计算复杂散射体的极点中发挥巨大的作用,使至今只能理论计算一些简单的一维、二维和三维旋转极点的局面有所改进。

附 录

证明

对形如

$$\int_0^1 K(x,y)f(y) dy = g(x)$$

(1)

可处理成

$$\sum_{i=1}^n K(x_i,y_i)f(y_i)C_i\Delta y_i = g(x_i)$$

(2)

选择的基函数不同, C_k 也不同,令

$$\begin{bmatrix} f(y_1)c_1 \\ f(y_2)c_2 \\ \vdots \\ f(y_n)c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = Z, \begin{bmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_m) \end{bmatrix} = g, K(x_i, y_j)\Delta y_j m n = K \quad (3)$$

有

$$KZ = g \quad (4)$$

$$Z = K^{-1}g \quad (5)$$

$$f = \begin{bmatrix} Z_1/C_1 \\ Z_2/C_2 \\ \vdots \\ Z_n/C_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

和基函数的选取有关,故式(1)的解不稳定,式(4)又可写成

$$\begin{bmatrix} K(x_1, y_1)K(x_1, y_2)\cdots K(x_1, y_n) \\ K(x_2, y_1)K(x_2, y_2)\cdots K(x_2, y_n) \\ \vdots \\ K(x_m, y_1)K(x_m, y_2)\cdots K(x_m, y_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(y_1)c_1 \\ f(y_2)c_2 \\ \vdots \\ f(y_n)c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} \quad (7)$$

显然极点是 K 矩阵的行列式的零点,和基函数的选取无关,故式(1)的解虽然不稳定,但零点稳定,仅由 $K(x, y)$ 决定。

参 考 文 献

- 1 彭仲秋.瞬变电磁场.北京:高等教育出版社,1980
- 2 Tesche F M. On the analysis of scattering and antenna problems using the singularity expansion technique. IEEE, 1973, AP-21(1): 53~62
- 3 龙云亮,文希理,彭仲秋.求解 SEM 极点的 Kuhn 法.电子科技大学学报,1992, 21(4): 381~385
- 4 吉洪诺夫.不适定问题的解法.北京:地质出版社,1963

A New Algorithm for Calculating Poles of A Scattering Object

Wu Xianliang Jiao Dan Wang Liangzhi

(Dept. of Electronic Engineering and Information Science, Anhui University Hefei 230039)

Abstract The natural resonances (poles) of a scattering object are important for the target identification. A new method is proposed in this paper to calculate poles, which points out that the zeros of the fast Fourier transform of the integral kernel function are the poles of the scattering object. As an example, the poles of a thin wire conductor are obtained with high precision in very short time by using this method.

Key words poles; scattering object; fast Fourier transform; integral equation

编辑 叶 红