

掺铒光纤放大器速率方程数值求解收敛速度的研究^{* *}

彭拥军^{* *} 邱 昆 唐明光

(电子科技大学光纤通信国家重点实验室 成都 610054)

【摘要】 针对采用迭代法对掺铒光纤放大器(EDFA)速率方程数值求解时收敛速度慢的问题,借鉴收缩映射的思想,提出了加速迭代收敛的计算方法。在设计功率放大 EDFA 时,该方法能快速地达到收敛,从而缩短设计时间。

关键词 掺铒光纤放大器; 收缩映射; 速率方程; 迭代法

中图分类号 TN914.1

分析、设计掺铒光纤放大器(EDFA)时,必须对它的速率方程进行求解。如果用 EDFA 的精确模型,则必须用迭代法对速率方程进行数值求解。用文献[1]中介绍的迭代法求解速率方程耦合微分方程组时,如果泵浦功率较大或掺铒光纤(EDF)的截止波长 λ_s 与泵浦波长较 λ_g 接近,即数值孔径 NA 较大时,迭代收敛速度相当缓慢,极费时间。本文借鉴了收缩映射的思想^[2],提出了加速迭代收敛的方法,用该方法能快速地达到收敛。

1 收缩映射和迭代法

区间 $[a, b]$ 上的函数 $\varphi(x)$, 如果存在一个数 q , 且 $0 < q < 1$, 对于该区间上任意两点 x_1, x_2 , 不等式 $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < q|x_1 - x_2|$ 成立, 那么该函数 $\varphi(x)$ 就是收缩映射。

在用迭代法求解方程 $x = \varphi(x)$ 时, 如果函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是一个收缩映射, 则属于该区间上的任意点 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = \varphi(x_n)$ 必须收敛于方程 $x = \varphi(x)$ 的根。因为 $\varphi(x)$ 是一个收缩映射, 区间 $[a, b]$ 经过映射后得到一系列子区间 $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$, 且 $|a_n - b_n| < q^n|a - b|$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $q^n \rightarrow 0 (0 < q < 1)$, 则 $|a_n - b_n| \rightarrow 0$, 也就是说经过多次迭代后, 映射图像区间收缩为一点, 该点就是方程 $x = \varphi(x)$ 的根。

2 迭代法数值求解 EDFA 的速率方程

当 EDFA 用作功率放大器时, 如果采用反向泵浦结构, 则光功率速率方程为^[1]

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_k^\pm}{dz} = & \pm \frac{2\rho_0\sigma_a(\nu_k)}{J^c\omega_k^2} p_k^\pm \int_0^{a_0} \left\{ \frac{\eta_k - \eta_p}{1 + \eta_p} \psi q^- - 1 + \sum_j \frac{\eta_k - \eta_j}{1 + \eta_j} \psi_j p_j^\pm \right\} \times \\
 e_y & \left\{ 1 + q^- \psi + \sum_j p_j^\pm \psi_j \right\}^{-1} \psi_k r dr \quad (1) \\
 \frac{dq^-}{dz} = & - \frac{2\rho_0\sigma_a(\nu_p)}{\omega_p^2} q^- \int_0^{a_0} \left\{ \sum_j \frac{\eta_p - \eta_j}{1 + \eta_j} \psi_j q^- - 1 \right\} \times
 \end{aligned}$$

* 1998 年 4 月 14 日收稿, 1998 年 5 月 19 日修改定稿

* 国家科委 863 高科技项目, 基金号: 863. 307. 2. 3

* * 男 29 岁 硕士

$$\left\{ 1 + q^- \psi + \sum_j p_j^\pm \psi_j^{-1} \psi_r dr \right. \quad (2)$$

如果只考虑一路光信号, 此时速率方程变为

$$\frac{dp}{dz} = \frac{2\rho_0\sigma_a(v_s)}{\omega_k^2} p \int_0^{a_0} \left\{ \frac{\eta_s - \eta_p}{1 + \eta_p} \psi q^- - \left[1 + q^- \psi_p + p \psi_j^{-1} \right] \psi_r dr \right. \quad (3)$$

$$\frac{dq^-}{dz} = -\frac{2\rho_0\sigma_a(v_p)}{\omega_p^2} q^- \int_0^{a_0} \left\{ \frac{\eta_p - \eta_s}{1 + \eta_s} \psi q^- - \left[1 + q^- \psi_p + p \psi_j^{-1} \right] \psi_r dr \right. \quad (4)$$

式中 a_0 为掺铒半径; a 为 EDF 芯径; z 为 EDF 纵向坐标; “±” 为与轴同向或反向; p_k^\pm 为频率为 ν_k 的信号光功率; ρ_0 为铒粒子浓度; r 为 EDF 径向坐标; $\sigma_a(\nu_k)$ 为频率 ν_k 处铒粒子的吸收截面; $\sigma_e(\nu_k)$ 为频率 ν_k 处铒粒子的发射截面; $\sigma_a(\nu_p)$ 为频率 ν_p 处铒粒子的吸收截面; $\sigma_e(\nu_p)$ 为频率 ν_p 处铒粒子的发射截面; $\eta(\nu_k)$ 、 $\eta(\nu_p)$ 分别为频率 ν_k 、 ν_p 处铒粒子的吸收与发射截面之比; ψ_k 、 ψ_j 为信号光包络; ψ_p 为泵浦光包络; ω_k 、 ω_p 分别为信号、泵浦光功率模半径。其中, 频率为 ν_k 的信号光归一化功率 P_k^\pm 为 p_k^\pm 与信号光饱和功率 p_{sot}^k 之比; 频率为 ν_p 的泵浦光归一化功率 q^- 为频率 ν_p 处泵浦光功率 p_p^- 与其饱和光功率 p_{sot}^p 之比, 且

$$p_{sot}^k = \frac{h\nu_k\pi\omega_k^2}{\sigma_a(\nu_k)[1 + \eta(\nu_k)]\tau}$$

$$p_{sot}^p = \frac{h\nu_p\pi\omega_p^2}{\sigma_a(\nu_p)[1 + \eta(\nu_p)]\tau}$$

式中 h 为普朗克常数; τ 为亚稳态粒子寿命;

用四阶龙格—库塔法和迭代法求解式(3)和式(4)时, 初始条件为

$$p(z) \Big|_{z=0} = p(0), \quad q^-(z) \Big|_{z=L} = q^-(L) \quad (5)$$

式中 L 为掺铒光纤长度。

求解式(3)和式(4)时必须采用正、反向循环积分。先对 $q^-(0)$ 进行正向积分, 用正向积分得到的 $p(L)$ 值作为初始条件再进行反向积分。第二次正向积分时用上一次反向积分所得的 $q^-(0)$ 和 $p(0)$ 值作为初始条件, 反向积分时则利用正向积分所得 $p(L)$ 和初始 $q^-(L)$ 值, 如此连续计算, 直到所得 $q^-(L)$ 与 $p(0)$ 的计算值相对于 $q^-(L)$ 与 $p(0)$ 的初始值同时达到精度要求, 终止迭代^[1]。如果掺铒光纤的截止波长稍大或者泵浦功率较大时, 该方法的收敛速度则极为缓慢。

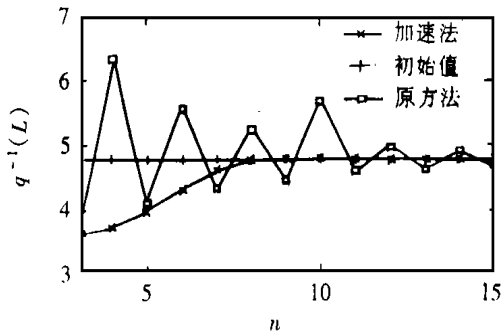


图 1 归一化泵浦输入功率与迭代次数

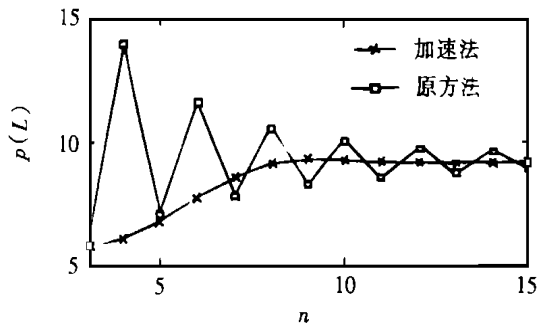


图 2 归一化信号输出功率与迭代次数

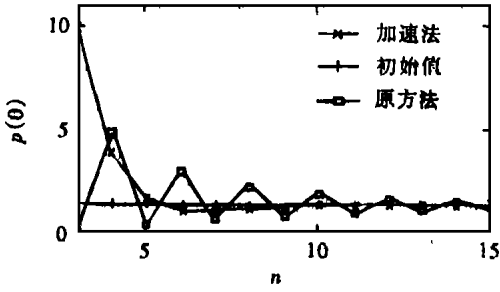


图 3 归一化信号输入功率与迭代次数

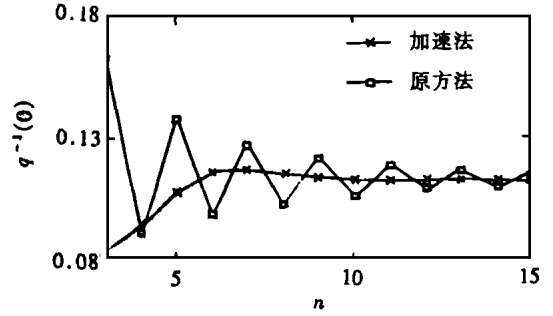


图 4 归一化泵浦输出功率与迭代次数

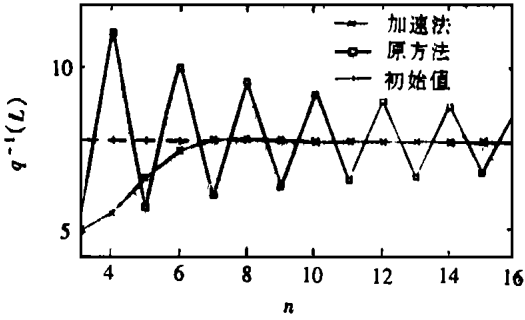


图 5 归一化泵浦输入功率与迭代次数

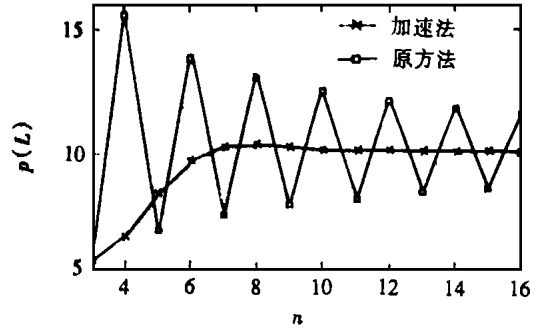


图 6 归一化信号输出功率与迭代次数

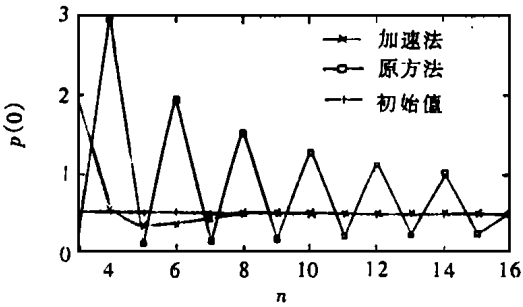


图 7 归一化信号输入功率与迭代次数

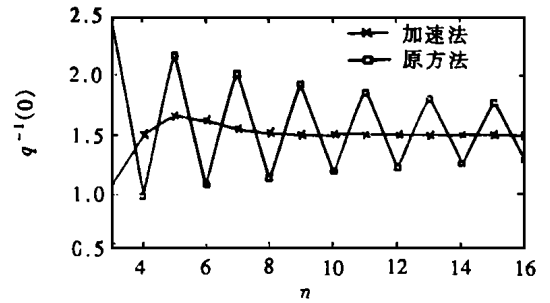


图 8 归一化泵浦输出功率与迭代次数

图 1~4 中所选的 EDFA 参数如下:

$a_0 = 1.20 \mu\text{m}$	$a = 1.20 \mu\text{m}$	$NA = 0.23$	$L = 15 \text{ m}$
$\sigma_e(v_s) = 1.70 \times 10^{-25} \text{ m}^2$	$\sigma_a(v_s) = 0.44 \times 10^{-25} \text{ m}^2$	$\sigma_e(v_p) = 0$	$\sigma_a(v_p) = 0.19 \times 10^{-25} \text{ m}^2$
$\rho = 26.88 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$	$P_s^{\text{in}} = 1 \text{ mW}$	$\tau = 10 \text{ ms}$	$\hat{\phi} = 20 \text{ nm}$
$\lambda_s = 1.53 \mu\text{m}$	$\lambda_p = 0.98 \mu\text{m}$	$P_p^{\text{in}} = 20 \text{ mW}$	精度 = 0.10%

图 5~8 所选的 EDFA 参数如下:

$a_0 = 1.20 \mu\text{m}$	$a = 1.20 \mu\text{m}$	$NA = 0.17$	$L = 15 \text{ m}$
$\sigma_e(v_s) = 1.70 \times 10^{-25} \text{ m}^2$	$\sigma_a(v_s) = 0.44 \times 10^{-25} \text{ m}^2$	$\sigma_e(v_p) = 0$	$\sigma_a(v_p) = 0.19 \times 10^{-25} \text{ m}^2$
$\rho = 26.88 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$	$P_s^{\text{in}} = 1 \text{ mW}$	$\tau = 10 \text{ ms}$	$\hat{\phi} = 20 \text{ nm}$
$\lambda_s = 1.53 \mu\text{m}$	$\lambda_p = 0.98 \mu\text{m}$	$P_p^{\text{in}} = 60 \text{ mW}$	精度 = 0.05%

用该方法计算出的结果如图 1~8 中所示。从图 1~4 可见,当泵浦功率较小 NA 值较大时,该方法收敛的,迭代收敛于方程(3)、(4)的解,总的迭代次数是 38 次;从图 5~8 可见,当泵浦功率较大而 NA 值较小时,该方法仍然是收敛的,迭代收敛方程(3)、(4)的解,总迭代次数是 173 次;如果再进一步加大泵浦功率或者数值孔径值,收敛速度会更慢,对分析、设计 EDFA 极为不利,目前采用的办法是用文献[3]中所介绍的简化计算方法,但在泵浦功率加大时计算精度不够。

3 加速收敛的方法

用上面所给出的参数迭代计算出功率速率方程的解,得出光功率沿 z 坐标的演变过程如图 9 所示。由图 9 可见,正向积分时, z 增大,信号与泵浦光功率均变大;反向积分时,信号与泵浦光功率均变小,这是因为沿 z 正向,信号功率被放大,沿 z 负向,泵浦功率因为被消耗而减小。

如果先假设 $q^-(0)=0$,此时无泵浦功率,那么第一次正向积分代表信号被吸收,导致 $p(L)$ 小于真实值, $q^-(L)=0$ 小于初始值,再利用该值和初始的 $q^-(L)$ 进行反向积分,信号功率进一步减小,而信号很小意味着消耗的泵浦功率就很少, $q^-(0)$ 小于真实值,相应地 $p(0)$ 小于初始值。第二次正向积分,用计算得出 $q^-(0)$ 值与初始的 $p(0)$ 值,反向积分时,用初始的 $q^-(L)$ 和计算出的 $p(L)$ 值,如果正向积分 $p(L)$ 大于真实值,反向积分后 $q^-(0)$ 小于真实值, $p(0)$ 大于初始值,那么 $p(L)$ 、 $q^-(0)$ 的准确值就应该在两次积分结果之间。迭代过程可以表述为

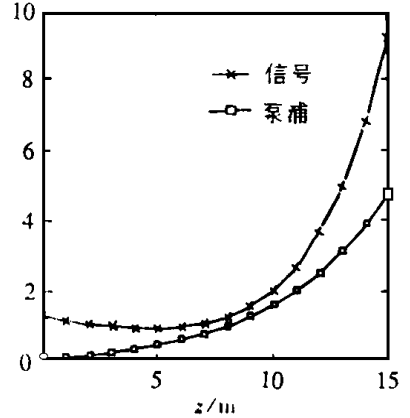


图 9 信号和泵浦光功率分析

$$\text{正向积分 } p(L) = \varphi_1[p(0), q^-(0)] \quad q^-(L) = \varphi_2[p(0), q^-(0)] \tag{6}$$

$$\text{反向积分 } p(0) = \varphi_3[p(L), q^-(L)] \quad q^-(0) = \varphi_4[p(L), q^-(L)] \tag{7}$$

$$\text{由式(6)和式(7)得到 } p(L) = \varphi_1[p(0), \varphi_4[p(L), q^-(L)]] \tag{8}$$

$$q^-(0) = \varphi_4[q^-(L), \varphi_1[p(0), q^-(0)]] \tag{9}$$

在式(8)和式(9)中, $p(0)$ 、 $q^-(L)$ 是初始值,因此迭代过程最后可以表示为

$$p(L) = f_1[p(L)], q^-(0) = f_2[q^-(0)] \tag{10}$$

由于方程(3)、(4)存在唯一解,要求函数 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 是收缩映射,最终收敛于方程(3)、(4)的解,但是采用迭代法时,收缩因子 q 偏大, $q^n \rightarrow 0 (0 < q < 1)$ 的速度慢,因而收敛慢。本文提出如下加速收敛方法:取两次计算所得 $p(L)$ 、 $q^-(0)$ 值的平均值,作为下一次迭代的初始值。由于平均后的 $p(L)$ 、 $q^-(0)$ 值更易于接近真实值,这就缩短了映射区间,等价于降低 q 值,加快了 $q^n \rightarrow 0$ 的速度,从而大大提高了收敛速度。用该方法计算出的结果如图 1~8 中带“×”的曲线所示。

从图 1~8 和表 1、2 可以看出,在相同条件下,迭代方法和加速收敛两种方法得出的结果一致,而加速法能够更快收敛。

表 1 两种方法迭代次数的比较

	泵浦功率小 NA 大	泵浦功率大 NA 小
原方法迭代次数	38	173
加速法迭代次数	15	16

表 2 两种方法计算结果比较

	$q^-(L)$	$p(L)$	$p(0)$	$q^-(0)$
原方法泵浦功率大	7.703 786	10.059 918	0.504 908	1.504 385
加速法泵浦功率大	7.704 657	10.061 331	0.505 039	1.504 285
初始值	7.704 482		0.505 149	
原方法 NA 值大	4.782 538	9.169 067	1.347 857	0.112 689
加速法 NA 值大	4.780 970	9.164 314	1.346 654	0.112 708
初始值	4.781 813		1.346 586	

4 结束语

本文所提出的方法能快速提高收敛速度,且对双向泵浦、反射型泵浦结构均适用,为采用精确模型分析、设计 EDFA 提供了极大的方便。

参 考 文 献

- 1 Emmanuel Desurvire. Erbium-Doped Fiber Amplifiers Principles and Applications. A Wiley-interscience Publication. 1994, 16 ~ 27
- 2 Vilenkin N Ya. Method of Successive Approximations. Moscow: Mir Publishers, 1979, 32 ~ 36
- 3 邱 昆. 掺铒光纤放大器的简化模型. 中国激光. 1995, A22(2): 109 ~ 111

Study of Convergence Rate of Calculating EDFA's Rate Equations

Peng Yongjun Qiu Kun Tang Mingguang

(State Keylab of Broadband Optical Fiber Transmission and Communication Networks, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract By adapting the idea of the contraction mappings in this papers, the method of speeding up the process of convergence is presented, which increases the rate of convergence greatly. The EDFA's rate equations is also solved rapidly.

Key words erbium-doped fiber amplifier; contraction mappings; rate equations; iteration method

编辑 徐培红