

# 分析电磁散射问题的 MGFFT 方法\*

龙 毅\*\* 徐 军 薛良金

(电子科技大学应用物理所 成都 610054)

**【摘要】** 采用多重网格法(MG)分析电大尺寸物体的电磁散射, 这种 MG 方法与已有的几种多重矩量法有本质的不同, 与其他多层方法相比, 它是一种高效率的迭代方法。再利用积分方程的卷积特性引入 FFT 方法快速计算迭代过程中矩阵与矢量的乘积, 从而构成 MGFFT 新算法, 数值结果表明 MGFFT 方法具有很高的计算效率, 适用于电大尺寸问题的分析。

**关键词** 电磁散射; 积分方程法; 多重网格法; 快速傅里叶变换; 电大尺寸物体

**中图分类号** TN011

近年来, 人们为了提高矩量法的计算效率, 建立了各种基于矩量法的多层方法, 最先提出的是网络分解法<sup>[1]</sup>, 这种方法给出粗、细网格层的基函数, 通过它们之间的几何位置和函数值的关系求出转换矩阵, 对转换后的低阶方程进行求解。如果对残量方程进行降阶处理, 就构成了文献[2]给出的积分方程的多重网格法。若将待求问题划分成几个小结构, 对每一小结构在细网格层进行单独求解, 然后以这些小结构上的解作基函数, 构造出整个结构的基函数, 而转换矩阵通过 Galerkin 法求得, 对方程进行转换然后求解, 即为文献[3]提出的多层矩量法和文献[4]提出的改进型矩量法。显然, 这时如果对残量方程进行转换然后求解, 就是文献[5]给出的多层矩量法, 上述这些方法的侧重点是要构造出合适的基函数转换矩阵, 对矩阵方程或残量方程进行降阶处理。文献[6]从函数空间的角度, 对上述方法的降阶处理过程给出了多分辨的统一解释, 并用小波变换实现粗细网格层之间基函数的转换。

本文所用的多重网格法是采用特殊的迭代方法分层逐步消除高频误差分量, 粗细层的变换不能视作降阶处理, 而是逐步消除误差分量的一种巧妙的方法<sup>[7]</sup>, 即一旦迭代法在细网格上收敛放慢, 即误差已经光滑了, 则转移到较粗的一层网格上去消除摆动误差分量, 这样一层一层做下去直到消除各种频率的误差分量, 再一层一层返回到细网格上来, 得到精确的迭代解。

## 1 MGFFT 算法

我们选择如图 1 所示的 TM 波垂直入射的无限长金属带条的散射为研究模型, 金属带条宽度为  $2a$ , 其上的电流满足如下的积分方程

$$E_z^i(x) = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{-a}^a J(x')G(x, x')dx' \quad (1)$$

式中  $J(x')$  为  $z$  方向电流密度;  $E_z^i(x)$  为入射电场; Green 函数  $G(x, x')$  为

$$G(x, x') = -j\pi H_0^{(2)}(k_0|x-x'|) \quad (2)$$

式中  $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ ;  $x$  和  $x'$  分别为场点和源点坐标;  $H_0^{(2)}(\cdot)$  为第二类零阶 Hankel 函数。

对方程 (1) 用脉冲基函数展开电流密度, 并采用点匹配, 得到离散后的  $N$  阶线性方程组为<sup>[8]</sup>

$$Z I = V \quad (3)$$

矩阵  $Z$ 、 $V$  的元素为

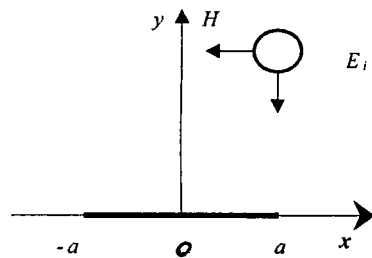


图 1 TM 波垂直入射二维金属带条

1998 年 11 月 24 日收稿, 1998 年 12 月 17 日修改定稿

\* 国防科技预研基金资助项目, 基金号: 97J1.3.4

\*\* 男 34 岁 博士 讲师

$$V_i = E'_i(x_i)w_i \quad (4)$$

$$Z_{ij} = \begin{cases} \frac{\omega\mu_0}{4} w_i w_j H_0^{(2)}(k_0 |x_i - x_j|) & i \neq j \\ w_i^2 \frac{\omega\mu_0}{4} \left[ 1 - j \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma k_0 w_i}{4e}\right) \right] & i = j \end{cases} \quad (5)$$

式中  $w_i, w_j$  分别为第  $i$  和  $j$  个单元的宽度,  $\gamma=1.718$  是 Euler 常数。

由于矩阵  $Z$  是一非稀疏矩阵, 直接求解这一方程的计算量为  $O(N^3)$ ,  $N$  为未知量个数, 而一般迭代法求解的计算量为  $O(pN^2)$ ,  $p$  为迭代次数, 通常  $p \geq N$ , 因此计算量仍为  $O(N^3)$ , 本文采用 MG 迭代加速收敛, 这时的迭代次数  $p \ll N$ , 可显著提高计算效率。多重网格法有多种循环迭代方式, 最常用的是  $V$  循环, 为表述方便, 用下式表示矩阵方程

$$L u = f \quad (6)$$

假定  $u^h$  代表方程的精确解,  $v^h$  为误差方程的迭代解,  $f^h$  为最细网格上的激励源, 则有如下的 MG 迭代  $V$  循环算法:

1) 以  $v^{h(0)}$  为初值, 在细网格上对  $L_h u^h = f^h$  做  $v_1$  次迭代, 得近似值  $v^h$  及残量

$$\gamma^h = f^h - L_h v^h$$

2) 在第二层网格上以  $v^{2h(0)} = 0$  为初值, 对

$$L_{2h} u^{2h} = f^{2h} = I_h^{2h} \gamma^h$$

做  $v_1$  次迭代, 得  $v^{2h}$  及残量

$$\gamma^{2h} = f^{2h} - L_{2h} v^{2h}$$

3) 在第三层网格上以  $v^{4h(0)} = 0$  为初值, 对

$$L_{4h} u^{4h} = f^{4h} = I_{2h}^{4h} \gamma^{2h}$$

做  $v_1$  次迭代, 得  $v^{4h}$  及残量

$$\gamma^{4h} = f^{4h} - L_{4h} v^{4h}$$

4) 对  $v^{4h}$  做修正,  $v^{4h} \leftarrow v^{4h} + I_{8h}^{4h} v^{8h}$ , 然后再以新的  $v^{4h}$  为初值, 对  $L_{4h} u^{4h} = f^{4h}$  做  $v_2$  次代。

5) 对  $v^{2h}$  做修正,  $v^{2h} \leftarrow v^{2h} + I_{4h}^{2h} v^{4h}$ , 然后再以新的  $v^{2h}$  为初值, 对  $L_{2h} u^{2h} = f^{2h}$  做  $v_2$  次迭代。

6) 对  $v^h$  做修正,  $v^h \leftarrow v^h + I_{2h}^h v^{2h}$ , 然后再以新的  $v^h$  为初值, 对  $L_h u^h = f^h$  做  $v_2$  次迭代。

算法中每一层上迭代的目的是消除高频的摆动误差分量 (最粗网格上的迭代校正除外), 因此光滑迭代是非常重要的, 选择光滑迭代方法的关键是看它能否消除高频分量。经数值试验及对经典迭代的滤波特性的研究发现, CG 迭代虽然有较好的收敛特性, 但它的光滑特性较差, 不能作为光滑迭代, 而通常的 Jacobi 迭代、GS 迭代其光滑性虽好, 但对 MoM 生成的矩阵方程不能保证其收敛性, 会引入额外的误差。因此我们选用带状矩阵迭代方法 (BMIA), 它具有良好的光滑特性, 并通过选择带宽可保证迭代的收敛性, 而在最粗网格上由于方程阶数很低, 可采用直接解法, 若采用迭代法求解, 只需保证其收敛性即可, 而不需考虑其光滑特性。另外在迭代过程中, 需要多次计算矩阵与矢量的乘积, 这一计算量为  $O(N^2)$ , 利用积分方程的卷积特性, 采用 FFT 计算这一乘积的计算量为  $O(N \log N)$ 。将矩阵  $L$  扩展为循环 Toeplitz 矩阵  $W$ , 其中  $W$  的第一列满足

$$W_{N+1,1} = 0 \quad W_{2N-q,1} = W_{q+2,1} = L_{q+2,1} \quad q = 0, 1, 2, \dots, N-2 \quad (7)$$

$N$  为矩阵  $L$  的阶数, 其他元素可由循环 Toeplitz 阵的特性得到。同样将  $N$  个元素的列向量  $u$  加  $N$  个零, 使其扩展为  $2N$  个元素的列向量  $V$ , 则

$$L u = \theta \{W V\} = \theta \{ \text{FFT}^{-1} [ \text{FFT}(W_1) \text{FFT}(V) ] \} \quad (8)$$

式中  $\theta$  为截断算子, 其作用是将一个  $2N$  个元素的列向量以后的  $N$  个元素截掉, 得到一个有  $N$  个元素的列向量,  $W_1$  为矩阵  $W$  的第一列。

因此 MGFFT 方法利用 MG 加速迭代收敛，而每一迭代步中费时的矩阵与矢量乘积则采用 FFT 快速计算，极大地提高了计算效率。

此外，在迭代过程中，粗细网格层之间的转换的算子  $I$  通常采用线性插值算子，由于 BMIA 光滑特性较好，对于非常光滑的误差电流，采用如下简单的限制算子

$$I_{N/2}^N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{N \times \frac{N}{2}} \quad (9)$$

反之将细网格上的误差电流限制，变成粗网格上的误差电流时，有如下限制算子

$$I_N^{N/2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}_{\frac{N}{2} \times N} \quad (10)$$

这里也可看出光滑过程的重要性，如果光滑特性不好，误差即不光滑，那么粗细网格层之间通过线性插值的转换就很困难，并且会引入额外的误差分量，导致 MG 迭代效率的下降，甚至失败，而变成一种降阶求解方法。因此光滑迭代的选取非常重要，一方面使误差的不同频率分量分层消除，另一方面也保证了各层之间高效率地转换，而不引入额外的误差分量。

## 2 数值结果

我们对模型问题（图 1）用 MGFFT 分析，并与 CG 迭代法，BMIA 迭代法进行比较，首先分析收敛性，取金属带条的宽度为  $2a = 8\lambda_0$ 。将其分为  $N=128$  段，用 BMIA 迭代求解时，取半带宽  $b=8$ ；用 MG 求解时，采用三层网格  $V$  循环求解，最细网格层上  $N=128$  个基函数，最粗网格层上  $N=32$  个基函数，光滑迭代和粗网格修正均采用 BMIA 迭代，取半带宽  $b=8$ ，每一层前后光滑均作一次迭代。为比较方便，三种迭代均取初值为零，我们以工作单元作为比较标准，一个工作单元定义为一次矩阵与矢量的乘积。对于 CG 迭代，一次循环为两个工作单元，BMIA 一次循环为一个工作单元，而对于 MG 迭代  $V$  循环，它包含第一层网格的两次 BMIA 迭代（ $WU=2$ ），第二层网格的两次 BMIA 迭代（ $WU=1/2$ ），第三层网格的一次 BMIA（ $WU=1/16$ ），因此，一次  $V$  循环的工作量为  $WU=2.5625$ 。MG 迭代中由于粗细网格间转换计算量为  $O(N)$ ，和矩阵与矢量相乘的计算量  $O(N^2)$  相比低一阶，忽略后对整个工作量估计的影响不大。三种迭代的收敛特性如图 2 所示，要达到余量  $R$  为  $10^{-11}$  的最后结果，MG 的工作量  $WU$  不到 20，而 BMIA 则要 50，CG 的工作量接近 130。

表 1 CG、MG 和 MGFFT 的计算时间比较

$N$	CG/s	MG/s	MGFFT/s
64	1.05	0.32	0.30
128	4.84	1.76	1.49
256	32.29	6.48	3.07

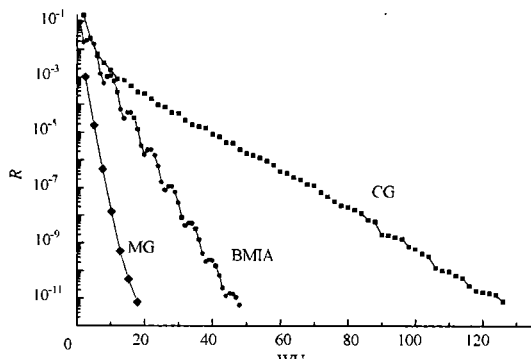


图2 积分方程的MG法和CGBMIA的收敛性

为比较计算时间, 计算中保持最细网格上一个波长内取 16 个基函数, 由于计算机内存限制, 分别取  $2a=4\lambda_0, 8\lambda_0, 16\lambda_0$ , 采用 FORTRAN 编程, 在 Pentium MMX/100MHz 的微机运行, CG、MG 和 MGFFT 所用 CPU 时间如表 1 所示。

计算中采用以 2 为基的 FFT 算法, 未知量个数分别为  $N=64, 128, 256$ 。结果表明, MG 方法比 CG 计算效率要高得多, 再结合 FFT 计算迭代过程中矩阵与矢量的乘积, 可进一步

提高计算效率, 由于 MG 是分层消除不同频率的误差分量, 未知量个数的增加不影响收敛性, 因此当未知量个数增大时, MG 的计算效率会更高, 另外由于 FFT 的计算量为  $O(N \log N)$ , 同样  $N$  越大时, FFT 的计算效率也越高。

### 3 结 论

本文提出的分析电磁散射问题的 MGFFT 方法, 从两方面解决了积分方程求解中计算效率问题, 即迭代的快速收敛和每一迭代步的计算量, 将一般迭代方法的计算量从  $O(N^3)$  降为  $O(pN \log N)$ , 由于迭代步  $p \ll N$ , 特别是  $N$  很大时, 收敛性并不受到影响, 即  $p$  基本不随  $N$  的增加而加大, 这时计算量趋于  $O(N \log N)$ , 因此特别适用于电大尺寸物体的分析, 该方法用于三维问题的分析将作进一步研究。

### 参 考 文 献

- 1 Goubar. Diakoptic theory for microstrip line structures. IEEE AP, 1982, 30: 15~26
- 2 王朝甫. 电磁问题中的多重网格方法. [学位论文]. 成都: 电子科技大学, 1995
- 3 Howard G E. Large microwave integrated circuits by multilevel moment method analysis: [Ph.D. Dissertation]. Waterloo, Ontario, Canada: University of Waterloo, 1991
- 4 Cao Wei, Xia Yiwei. Modified moment method approach to electromagnetic problems. Chinese J of Electronics, 1993, 2: 77~81
- 5 薄亚明. 电大尺寸电磁散射问题迭代解法的研究. [学位论文]. 南京: 东南大学, 1992
- 6 宋玉明. 小波在电磁理论中的应用. [学位论文]. 南京: 东南大学, 1996
- 7 Hackbush W. 多重网格方法. 北京: 科学出版社, 1988
- 8 Harrington R F. Field Computation by moment methods. Malabar: FL Krieger Publ, 1968

## A Multigrid-FFT Algorithm for Analyzing Scattering from Electrically Large Structures

Long Yi Xu Jun Xue Liangjin

(Inst. of Applied Physics, UEST of China Chengdu 610054)

**Abstract** A new Multigrid-FFT (MGFFT) algorithm, combined multigrid method with FFT, is presented in this paper for analyzing scattering from electrically large structures. Used as an efficient iterative algorithm, multigrid method (MG) is different from other multilevel MoM in nature. In the MG procedure, the FFT is applied for the calculation of the convolutional integrals involved. The numerical results shown that the MGFFT method is an efficient approach for the analysis of electrically large size problems.

**Key words** electromagnetic scattering; integral equation method; multigrid method; fast Fourier transform; electrically large structures