

# 大气光传播研究中的湍流谱与间歇性<sup>\*</sup>

饶瑞中<sup>\*\*</sup>

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 国家 863 计划大气光学重点实验室 合肥 230031)

**【摘要】** 指出湍流大气中光传播理论分析与数值模拟方法存在的问题, 简要分析了湍流谱的适用性与局限性, 考察了湍流特征尺度在光传播问题中的作用, 构造了与实验结果相符的湍流温度场的间歇性模型, 为分析湍流间歇性对光传播的影响奠定了基础。

**关键词** 光传播; 大气湍流; 湍流谱; 间歇性

中图分类号 O533; P425.2<sup>+</sup>1; P425.2<sup>+</sup>2

## 1 光传播的多层相位屏分析与数值模拟

在弱、强起伏条件下, 已有多种理论方法研究湍流大气中的光传播问题。对于发生在两种极限条件之间的传播问题, 数值模拟方法已成为主要的研究途径。如果介质非均匀尺度远大于光波长  $\lambda$ , 则可认为只存在着前向小角散射而没有后向散射, 波数  $k = 2\pi/\lambda$  的光波的电场沿  $E = ue^{ikz}$  沿  $z$  方向的传播问题可进行傍轴近似, 得到抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 u - ik(n-1)u \quad (1)$$

如果只考虑方程右边场的导数项, 则方程对应于自由空间中点光源的前向扩散, 其解为源位于  $(x', y', z')$  的 Green 函数

$$u = (z - z')^{-1} \exp\{-ik[(x - x')^2 + (y - y')^2] / (2|z - z'|)\} \quad (2)$$

如果只考虑方程右边与折射率有关的项, 则方程的解反映了介质折射率起伏的作用。其解对应于在光的传播方向上积分光学路径导致的相位调制

$$u = \exp\{ik \int_{z'}^{z+z} [n(\mathbf{r}, z') - 1] dz'\} = \exp\{ik\theta(\mathbf{r})\} \quad (3)$$

如果将广延的随机介质分割为一系列平行薄片, 一个薄片引起的相位调制可以归结为一个位于该片中心的无穷薄的相位屏。光场经该相位屏调制, 然后根据式(2)传播至下一个相位屏的位置。如果各片足够薄(尺度为  $\delta$  的一个非均匀元素引起的相位改变很小, 即  $k\sigma_n \delta \ll 1$ ,  $\sigma_n$  为  $n$  起伏的均方差), 上述求解步骤应是合理的, 但必须考虑相位屏间的相关性。如果各相位屏统计独立, 则每个薄片的厚度不得小于非均匀介质的相关尺度。

在传播方向上一小步的解最终可由综合自由传播和相位调制二者得到, 具体的求解可在 Fourier 频域方便地进行。这种多层相位屏分析方法等同于光传播的路径积分的离散解, 当  $\delta$  足够小并采用合适的网格, 结果是严格的。其局限在于有限网格数目所确定的有限空间动态范围。对于高空间分辨率、长传播距离的问题需要大量的计算时间。这种方法已在湍流大气中的光传播问题中得到了广泛的应用<sup>[1,2]</sup>, 获得了诸如光强概率分布等重要的发现。

在数值模拟中湍流介质的构造通常是依据湍流的二阶统计性质(空间谱密度)进行的。厚度为  $\delta$  的薄层所对应的相位屏  $\theta(\mathbf{r})$  的空间谱密度与湍流折射率的空间谱密度的关系为

$$\Phi_{\theta}(\mathbf{K}) = 2\pi K^2 \delta \Phi_n \quad \mathbf{K}, K_z = 0 \quad (4)$$

这种构造相位屏的方法存在两个问题:(1)一般数值模拟中采用的湍流谱的耗散区形式与实际情况不符。因而耗散区湍流的影响不能正确反映。(2)即使采用了完全正确的湍流谱, 也只反映了

湍流的二阶统计性质,其高阶统计性质的正确与否不能确定,因而不能反映湍流的间歇性特征。为解决这个问题,则必须构造能全面反映湍流特性的相位屏,仅仅利用谱特征是不够的。

## 2 湍流统计理论的谱模型

在可见波段对于干燥空气的情况下,一般认为折射率起伏特性与温度起伏特性一致。在同时考虑到大、小尺度湍流起伏时,理论研究者使用得最广泛的是 Tatarskii 谱和 von Karman 谱的综合谱,被称为 von Karman 谱<sup>[3]</sup>,其三维谱密度为

$$\Phi_n(K) = 0.033 C_n^2 (K^2 + L_0^{-2})^{-1/6} \exp[-(K l_0 / 5.92)^2] \quad (5)$$

由 Tatarskii 引入的耗散区的高斯下降趋势从未得到实验结果的验证,而对应于大尺度湍流起伏的 von Karman 谱形式适用于只具有一个特征尺度(管道直径)的管道流体,而大气湍流却具有许多特征尺度。在大气边界层,我们需要考虑高度、边界层厚度、地面非均匀尺度等,这是只有一个特征尺度的 von Karman 谱所不能描述的。

Hill 根据单点温度测量结果和理论考虑提出了一个普适谱模型, Frehlich 将其拟合为

$$\Phi_n(K) = 0.033 C_n^2 K^{-11/3} \exp(-\delta K l_0) \sum_{n=0}^4 a_n (K l_0)^n \quad (6)$$

式中 参量  $a_0=1.000\ 00$ ,  $a_1=1.109\ 00$ ,  $a_2=0.709\ 37$ ,  $a_3=-0.280\ 86$ ,  $a_4=0.082\ 77$ ,  $\delta=1.109\ 00$ 。该模型最显著的特征是  $K l_0=1$  处的拐点,它表明了湍流耗散区的出现。Tatarskii 等也从理论上证明了这个拐点的存在,其位置与实验结果存在一定的差别<sup>[4]</sup>。Frehlich 从激光闪烁实验结果拟合出与一个与 Hill 谱模型相似的模型,其中各参量为  $a_0=1$ ,  $a_1=1.428$ ,  $a_2=1.199$ ,  $a_3=0.141\ 4$ ,  $a_4=0$ ,  $\delta=1.19^3$ 。

湍流折射率谱的选用应借鉴湍流温度谱研究的进展。She & Jackson 研究了湍流温度谱的大量实验数据(Re 数在 130~13 000),认为整个一维湍流谱不能由  $K^{-5/3} \exp(-K l_0)$  的形式拟合<sup>[9]</sup>。他们提出了下述形式描述整个谱

$$\Phi_0(K) = \Phi_0(l_0^{-1}) [(K l_0)^{-5/3} + \alpha (K l_0)^{-\beta}] \exp(-\mu K l_0) \quad (7)$$

式中  $\alpha, \beta, \mu$  为可调节的参量。根据耗散谱的峰值出现在  $K = l_0^{-1}$  而定出  $\mu$ 。最优拟合得出  $\alpha=0.8$ ,  $\beta=1$ 。在  $K = l_0^{-1}$  附近谱密度具有  $K^{-1}$  的趋势。

## 3 湍流特征尺度对光传播的影响

大尺度湍流在光波传播过程中起着重要的作用,特别是与相位有关的问题,不少研究工作对此进行了探讨<sup>[3,7]</sup>。几乎所有的牵涉到湍流外尺度的理论分析都使用 von Karman 模型,然而将此模型与实验测得的时间谱或空间谱相比较,不管选取多大的外尺度值,理论计算结果与实验结果都不能建立可靠的联系。有关光波相位起伏的结果表明,利用 von Karman 模型以及其他只包括一个外尺度的模型的计算结果与实验结果都不相符<sup>[8]</sup>。

近年来由于自适应光学的兴起,与波前相联系的物理量的起伏问题成为研究热点,外尺度的影响也得到了广泛的研究<sup>[9~11]</sup>。这些工作基本上都是理论分析或数值计算,虽然也使用了一些有别于 von Karman 谱的其他模型,所得结果均未与实验结果相比较,可靠程度如何,尚难进行合理的判断。但无论使用哪一种模型,实际上都假定发生区的湍流也是各向同性的,这与实际情况不符合,也违背了湍流统计理论的基本假设与理论基础。总之,在湍流统计理论的框架内讨论外尺度的影响能否得到有意义的结果值得三思。

湍流耗散区的情况则是普适的,由于其尺度比惯性区更小,它对光传播问题产生影响的几率要远高于发生区。大量的研究工作探讨了湍流内尺度对光传播的影响。现在已能断定, Tatarskii 谱的耗散区形式不符合真实情况。自从 Hill 谱模型提出后,在许多数值工作得到了采用<sup>[1,5]</sup>。但 Hill 谱至今仍未得到普遍认可<sup>[12]</sup>。在理论研究中, Tatarskii 及 von Karman 谱模型仍常被采用。

在光波起伏频谱的研究中虽然考虑了不同的湍流谱模型,但频谱的高频部分却得到了一个共同的渐近形式:即以指数 $-8/3$ 的幂律下降。虽然 Tatarskii 曾提及该结果的使用条件是湍流内尺度远小于 Fresnel 尺度,但很少有人考虑到这个条件。光强起伏频谱的实验结果表明高频部分的形状与 $-8/3$  幂律有很大偏离<sup>[13]</sup>。近年来有关光波到达角起伏频谱和波前相关量的起伏频谱的研究工作都建立在湍流惯性区的特性之上,所得频谱的高频特征也与实验结果不符。

解决这个问题需要从频谱的整个理论分析过程入手,运用数值计算方法,舍去一切数学上的近似假设<sup>[13]</sup>。以球面波对数振幅  $c$  的起伏频谱密度  $W_x(f)$  为例,分析表明:在许多情况下,即使在较低的时间频率  $f$  惯性区对光波起伏频谱的贡献已经无足轻重,而在较高的  $f$ ,起伏频谱的特征与惯性区完全无关。图 1 左边是湍流内尺度  $l_0=1$  mm 用 Frehlich 湍流谱计算的对数振幅的起伏频谱(用特征频率  $f_0=v\sqrt{\lambda L}$  的值进行归一化,  $v$  是风速,  $L$  是传播距离)。在  $f_0$  之上存在着一段区域,斜率很接近于 $-8/3$ 。但在此区域之上频谱密度偏离 $-8/3$  幂律,以更快的趋势下降。类似的结果在闪烁实验中已经观察到。图 1 右边表示对数光强起伏频谱的一个实测结果,在  $10\sim 100$  Hz 范围内,频谱密度呈 $-8/3$  幂律,而后迅速下降;更高频率处的无规律起伏可能由噪声引起。一般而言,风速越小,湍流内尺度越大,耗散区的湍流谱对光波起伏频谱的影响就越明显。因此,我们需要知道耗散区湍流谱的正确形式。

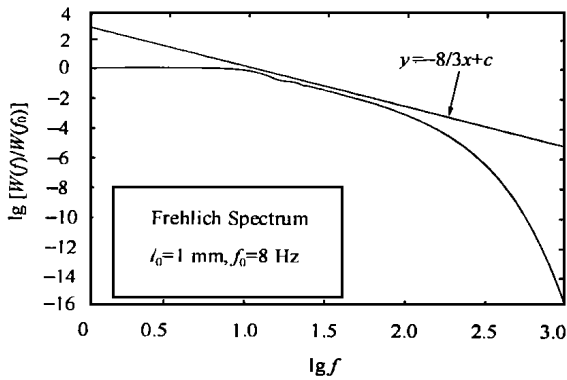


图 1 用 Frehlich 湍流谱计算的对数振幅频谱

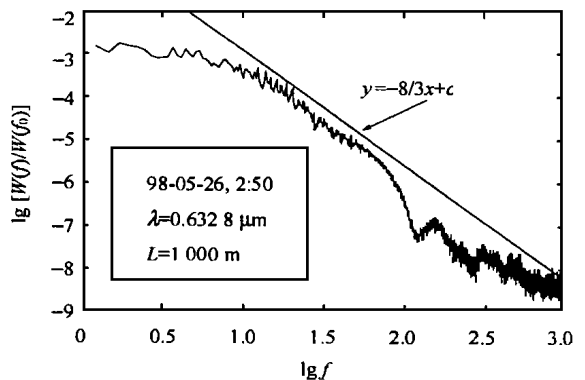


图 2 实测的对数光强起伏频谱

### 4 湍流的间歇性及其模型

在 Kolmogorov 湍流统计理论(K41)中,速度场结构函数 $\langle |\delta u(l)|^p \rangle \sim \epsilon^{p/3} l^{p/3}$ ,  $\epsilon$  是平均的能量耗散率。实验测得的结构函数的标度指数也与 K41 结果相差甚远<sup>[14 15]</sup>,  $\epsilon$  存在着严重的间歇性,但在充分发展的湍流场中存在着一个惯性区,其中  $\epsilon$  的结构函数满足标度律 $\langle |\epsilon(l)|^p \rangle \sim l^p$ ,同时速度场的结构函数也满足标度律 $\langle |\delta u(l)|^p \rangle \sim l^{\xi_p}$ 。两种结构函数的标度指数的关系为

$$\xi_p = (p/3) + \tau_{p/3} \tag{9}$$

许多基于湍流速度场或能量耗散率场的间歇性模型相继提出,一般假定  $\epsilon$  具有某种特定的概率分布。它们包含一些可调节的参量,但很难合理地确定。根据  $\beta$  模型<sup>[16]</sup>,能量耗散率和速度场结构函数的标度指数为

$$\tau_q = -(1-q)\log_2 \beta, \quad \zeta_p = (p/3) - [1 - (p/3)] \log_2 \beta \tag{10}$$

根据 She 等的对数 Poisson 模型<sup>[17]</sup>,能量耗散率和速度场结构函数的标度指数为

$$\tau_q = -(2q/3) + 2[1 - (2/3)^q], \quad \zeta_p = (p/9) + 2[1 - (2/3)^{p/3}] \tag{11}$$

此模型基于可靠的物理论证,不需要可调节的参量。根据这个模型推得的速度场结构函数的标度指数与实验结果吻合<sup>[17]</sup>。

对于湍流温度场  $\theta$ ,  $\vartheta \sim N^{1/2} \epsilon^{-1/6} l^{1/3}$ 。在 K41 中, 温度脉动耗散率  $N$  同样假定为与  $\epsilon$  相仿的与尺度  $l$  无关的常量, 温度场的结构函数为  $\langle |\vartheta(l)|^p \rangle \sim N^{p/2} \epsilon^{-p/6} l^{p/3}$ 。实际上, 湍流温度场也存在间歇性,  $\vartheta$  满足标度律  $\langle |\vartheta(l)|^p \rangle \sim l^{p\alpha_p}$ 。实验结果表明,  $\alpha_p$  大大偏离了  $p/3$ 。  $N$  存在着间歇性。假定  $N$  满足标度律  $\langle |N(l)|^p \rangle \sim l^{p\beta}$ , 则  $\alpha_p$  依赖于  $\epsilon$  和  $N$  的结构函数的标度指数。在尚无可靠的实验根据和理论论证  $\epsilon$  和  $N$  的关系的状态下, 假定二者统计独立不失为简化处理问题的一个有效手段。这样可得

$$\alpha_p = (p/3) + \eta_{p/3} + \tau_{-p/6} \quad (12)$$

对  $\epsilon$  采用对数 Poisson 模型, 用  $\beta$  模型描述  $N$  的间歇性, 就得到温度场结构函数的标度指数<sup>[18]</sup>

$$\alpha_p = (p/3) + (2/9) - 2[(3/2)^{p/6} - 1] \quad (13)$$

式(13)与实验结果<sup>[15]</sup>的比较如图 3 所示, 两者吻合得很好。

Shertzer 等提出在统计矩阶次的三个区域对温度场间歇性模型检验, 主要针对低阶次 ( $< 1$ ) 和高阶次 ( $> 5$ )。按此标准, 本模型存在着缺陷, 即在低阶次 ( $< 1$ ) 上不符合湍流的统计特征, 因为结构函数的标度指数在 0 阶上应为 0, 但根据本模型却为  $2/9$ 。原因来自  $\beta$  模型。为克服这一缺陷, 我们引入一个二重分形模型 ( $\beta$  模型对应于一个均匀分形) 代替  $\beta$  模型描述  $N$ ; 即结构函数 1 阶以上的统计矩仍由  $\beta$  模型描述, 而在 1 阶以下不存在间歇性。这样  $N$  和温度场的结构函数的标度指数可分别表示为

$$\eta_p = \begin{cases} 0 & (p \leq 1) \\ \mu(1-p) & (p > 1) \end{cases}, \alpha_p = \begin{cases} (4p/9) - 2[(3/2)^{p/6} - 1] & (p \leq 2) \\ (p/3 + 2/9) - 2[(3/2)^{p/6} - 1] & (p > 2) \end{cases} \quad (14)$$

式(14)示于图 4。经过这样的修正, 我们提出的温度场间歇性模型进一步得到了完善。

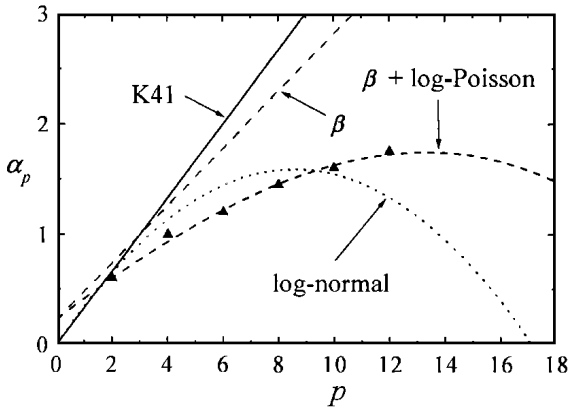


图 3 湍流温度场结构函数的标度指数的模型计算值与实验结果的比较

三角符号代表实验值<sup>[15]</sup>, 曲线对应于各种模型计算值。

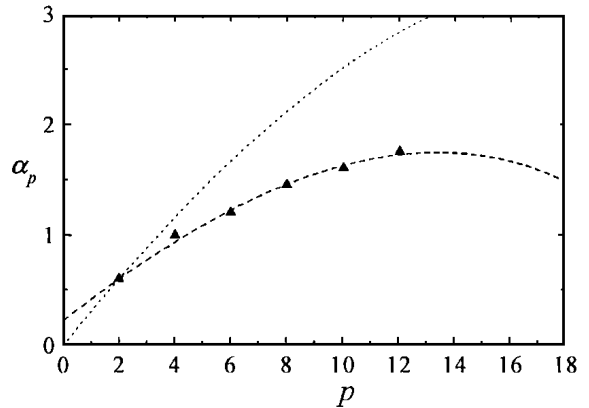


图 4 修正的  $\beta + \log$ -Poisson 模型

$p > 2$  时由虚线表示,  $p < 2$  时由点线表示。

## 5 结论

在湍流大气中光传播的研究中, 有两个问题必须认真对待: 湍流谱的正确形式和湍流的间歇性问题。目前的许多理论研究工作依然使用不符合实际情况的湍流谱。由于现在湍流研究已经对耗散区的谱形式有比较清晰的认识, 在光传播研究中应采用较为符合实际情况的湍流谱。大尺度湍流在与相位有关的传播问题中起着重要的作用, 但由于发生区内的湍流是各向异性的, 不可能通过一个简单的谱模型来描述, 因此利用任何只包括一个外尺度的湍流谱模型研究外尺度对光传播的影响的工作不可能得出有多大意义的结果。耗散区的湍流谱对光波起伏频谱的高频部分有直接影响, 可以作为利用光传播效应反演湍流谱的基础。

湍流间歇性的引入对 K41 理论修正的效果主要表现在高阶次的结构函数上。而谱密度对应于二阶结构函数, 其幂指数仅由 0.667 修正为 0.696, 变化是不明显的。因此, 如果依旧利用湍流的二阶统计特征来研究光传播问题, 湍流间歇性的引入不会带来明显不同的结果。然而, 当我们关注光传播效应的非平稳性、间歇性和高阶统计特征时, 仅仅利用湍流的二阶统计特征是不够的, 必须了解湍流的高阶统计特征。现在我们已经建立了符合实验结果的温度场间歇性模型, 如何构造统计特征满足该模型的随机介质以进行数值分析还需进一步的研究。

### 参 考 文 献

- 1 Flatte S M, Bracher C, Wang G. Probability-density functions of irradiance for waves in atmospheric turbulence calculated by numerical simulation. *J Opt Soc Am*. 1994, A11(7): 2 080 ~ 2 092
- 2 Martin J. Simulation of wave propagation in random media; theory and applications. In wave propagation in random media (scintillation), Tatarskii, Ishimaru & Zavorotny eds SPIE & IPP, 1992
- 3 Reinhardt G W, Collins S A Jr. Outer scale effects in turbulence-degraded light-beam spectra. *JOSA*, 1972, 62: 1 526 ~ 1 528
- 4 Tatarskii V I, Dubovikov M M, Praskovsky A A, *et al*. Temperature fluctuation spectrum in the dissipation range for statistically isotropic turbulent flow. *J Fluid Mech*, 1992, 238: 683 ~ 698
- 5 Frehlich R. Laser scintillation measurements of the temperature spectrum in the atmospheric surface layer. *J Atmos Sci*, 1992, 49(16): 1 494 ~ 1 509
- 6 She Z S, Jackson E. On the universal form of energy spectra in fully developed turbulence. *Phys Fluids* 1993, A5(7): 1 626 ~ 1 528
- 7 宋正方. 星象闪烁的时域频谱. *天体物理学报*, 1995, 15: 275 ~ 281
- 8 Lukin V P, Pakasov V V. Optical wave phase fluctuations. *Appl Opt*, 1981, 20: 121 ~ 135
- 9 Borgnino J, Martin F, Ziad A. Effect of a finite spatial-coherence outer scale on the covariance of angle-of-arrival fluctuations. *Opt Comm*, 1992 (91): 267 ~ 279
- 10 Voitikhovich V V, Cuevas S. Adaptive optics and outer scale of turbulence. *J Opt Soc Am*, 1995, A12 (11): 2 523 ~ 2 531
- 11 Orlov V G, Voitikhovich V V, Cuevas S. Model compensation and the atmosphere turbulence outer scale; computer simulations. *Appl Opt*, 1998, 37(21): 4 544 ~ 4 548
- 12 曾宗泳. 复杂地形近地面温度谱. *量子电子学报* 1998, 15(2): 134 ~ 139
- 13 饶瑞中, 王世鹏, 刘晓春, 等. 实际大气中激光闪烁的频谱特征. *中国激光*, 1999, A26(5): 411 ~ 414
- 14 Anselmetti R A, Gagne Y, E J Hopfinger *et al* High-order velocity structure functions in turbulent shear flows. *J Fluid Mech*, 1984, 140: 63 ~ 89
- 15 Antonia R A, Anselmetti F, Gagne Y, *et al*. Temperature structure functions in turbulent shear flows. *Phys Rev*, 1984, A30: 2 704 ~ 2 707
- 16 Frisch U, Sulem P L, Nelkin M. A simple model of intermittent fully developed turbulence. *J Fluid Mech*, 1978 (87): 719 ~ 736
- 17 She Z S, Waymire E C. Quantized energy cascade and Log-Poisson statistics in fully developed turbulence. *Phys Rev Lett*, 1995, 74: 262 ~ 265
- 18 Rao R. Mixed model for temperature structure functions in fully developed turbulence. *Phys Rev*, 1999, E59 (2): 1 727 ~ 1 728
- 19 Hill R J, Clifford S F. Modified spectrum of atmospheric temperature fluctuations and its application to optical propagation. *J Opt Soc Am*, 1978, 68(7): 892 ~ 899
- 20 Schertzer D, Lovejoy S, Schmitt F, *et al*. Multifractal cascade dynamics and turbulence intermittency. *Fractals* 1997, 5(3): 427 ~ 471

- 21 Schmitt F, Schertzer D, Lovejoy S, *et al.* Multifractal temperature and flux of temperature variance in fully developed turbulence. *Europhys Lett*, 1996, 34(3): 195~200
- 22 Coulman C E, Vernin J, Coquegniot Y, *et al.* Out-scale of turbulence appropriate to modeling refractive index structure profiles. *Appl Opt*, 1988, 27: 155~160
- 23 Uscinski B J. Multi-phase-screen analysis. In *wave propagation in random media (scintillation)*, Tatarskii, Ishimaru & Zavorotny eds. SPIE & IPP, 1992
- 24 Voitsekhovich V V. Outer scale of turbulence; comparison of different models. *J Opt Soc Am*, 1995, A12: 1346~1353

## Light Propagation in Atmosphere: Turbulence Spectrum and Intermittency

Rao Ruizhong

(Key Laboratory for Atmospheric Optics, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031)

**Abstract** The turbulence spectrum and intermittency problem concerning light propagation in the atmosphere are addressed. The validity and limitation of current turbulence spectrum models are discussed, and roles of turbulence characteristic scales are analyzed. An experimentally tested model for temperature structure functions in fully developed turbulence is developed. The model can be used for the construction of the random phase screen in the numerical simulation of light propagation in order to study the effect of turbulence intermittency on light propagation.

**Key words** light propagation; atmospheric turbulence, turbulence spectrum, intermittency