

一种精确测量周期信号参数的窗口和内插算法*

喻 胜** 陈光禔

(电子科技大学自动化系 CAI 室 成都 610054)

【摘要】 提出了一种基于离散傅里叶变换的改进的周期信号参数的测量算法。该算法通过对时域信号加合适的窗函数,并在频域采用相应的内插算法,可以有效地减小测量过程中信号的频谱泄漏,得到精确的测量结果。仿真实验通过与已有算法的比较证明了该方法的有效性和先进性;噪声分析实验证明了该方法的稳定性。

关键词 离散傅里叶变换; 频谱泄漏; 窗函数; 内插算法

中图分类号 TM930.128

对周期信号作 DFT 分析时^[1],由于频域的离散性,当对信号采样的记录长度未能准确地记录整数个信号周期时,信号的频率会落入两个相邻离散频点之间而造成信号的能量扩散到相邻频点处形成频谱泄漏^[2]。为了解决这一问题,F.J.Harris 提出了使用窗口法减小频谱泄漏的改进方法^[3];Jain 等人此后又提出了基于频域内插的另一种改进算法^[4]。前者虽有效减小了泄漏但没有考虑频域的离散性;后者虽考虑了频域的离散性但不能有效地减小频谱泄漏,所以都很难达到较高的测量精度。理想的方法是将以上两种算法结合起来的窗口和内插算法。本文在比较了各种窗函数的特点的基础上,提出了一种以布莱克曼窗为基础的窗口和内插算法,由于布莱克曼窗具有很好的旁瓣特性,所以本文方法具有较好的谐波干扰特性,能够得到精确的测量结果。

1 窗函数的选择

对信号作 DFT 分析时,由于信号自身频率的细微波动及存在的各种干扰等因素的影响,通常很难准确对被采样的信号记录整数个信号周期。此时在频域就会出现频谱泄漏。从时域看,这是因为此时对信号进行周期延拓时由于信号在边界点处的不连续(或其导数在边界点处的不连续)给信号带来了附加的高频分量;从频域看,记录信号的有限长度等价于对信号加矩形窗的处理,此时在频域则表现为信号频谱与矩形窗函数频谱的卷积。当被记录信号长度为整数个信号周期时,矩形窗的过零点正好对齐离散频点而无频谱泄漏;否则则出现频谱泄漏。为了有效地抑制频谱泄漏,应当根据测量的需要选用合适的时域窗函数,以得到符合要求的测量结果。以各种升余弦窗为例,由于其频谱的旁瓣幅度远小于矩形窗,所以与一般的频谱内插算法相比^[4],采用升余弦窗的内插算法能够有效地减小频谱泄漏,得到更精确的测量结果,尤其是幅度的测量结果。此外,当采用旁瓣的每倍频程衰减速度较快的窗函数时,由于旁瓣的迅速衰减,可以使当被测周期信号的频率成份有足够

间隔时各频率成份的干扰很小,从而具有很好的谐波干扰特性,能够得到非常精确的谐波分析结果。以布莱克曼(Blackman)窗为例:当对信号采样 20 个周期时,从基波频率到第一谐波的泄漏可以小到 -96 dB,此时的谐波干扰可以被忽略不计而近似得到没有频谱泄漏的结果。对于矩形窗,此时从基波泄漏到第一谐波处的分量则为 -36 dB,如图 1 所示。

表 1 列出了各种升余弦窗函数的特性。从表中可以看出布莱克曼窗具有较好的旁瓣特性。为此本文采用布莱克曼窗作为测量算法的基础。

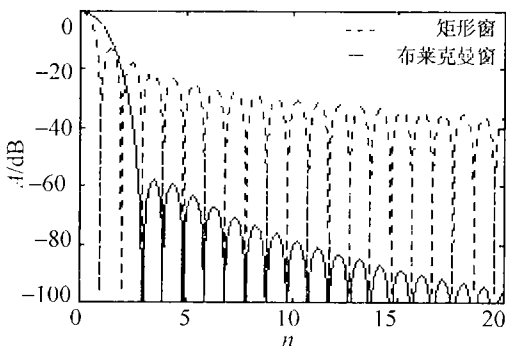


图 1 窗函数的幅频特性比较

1998 年 11 月 12 日收稿

* 国防科工委预研基金资助项目

** 男 26 岁 博士生

表 1 常用升余弦窗特性的比较

窗函数	矩形窗	哈明窗	布莱克曼窗	精确布莱克曼窗
旁瓣峰值衰减/dB	-13.26	-43.19	-58.11	-68.24
渐近线每倍频程衰减/dB	6.00	6.00	18.00	6.00
主瓣宽度 Δf	2.00	4.00	6.00	6.00

2 频域内插算法

假设被测周期信号为

$$x(t) = \sum_{m=1}^M A_m \exp(j2\pi f_m t) \tag{1}$$

式中 A_m 为包含了相位信息的复数幅度。

以采样频率 f_s 对信号采样，假设共记录 N 点，得

$$x(k\Delta t) = \sum A_m \exp(j2\pi f_m k\Delta t) \tag{2}$$

式中 $\Delta t = 1/f_s$ 为采样时间间隔。假设 f_s 满足奈奎斯特采样定理或采样前对信号进行了抗混迭滤波预处理，以确保在频域不会出现混迭现象。此时对信号作 DFT 分析得

$$X(n\Delta f) = \sum A_m D[(n - (f_m/\Delta f))] \tag{3}$$

式中 $\Delta f = 1/T$ ， T 为记录时间长度 $T = N\Delta t$ 。 $D(n)$ 为狄里切利函数

$$D(n) = \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{nm} = \frac{\sin(\pi n)}{\sin(\pi n/N)} \exp[-j\pi n(N-1)/N] \tag{4}$$

在时域对信号进行加窗处理。采用的布莱克曼窗函数见式(5)，窗函数长度与信号样点数相同

$$w(k\Delta t) = 0.42 - 0.5\cos(2\pi k\Delta t/T) + 0.08\cos(4\pi k\Delta t/T) \quad k=0, \dots, N-1 \tag{5}$$

由离散调制定理很容易求出其频域表示

$$W(n) = 0.42D(n) - 0.5 \cdot 0.5[D(n+1) + D(n-1)] + 0.08 \cdot 0.5[D(n+2) + D(n-2)] \tag{6}$$

记加窗后的信号为

$$x_w(k\Delta t) = x(k\Delta t) w(k\Delta t) \tag{7}$$

根据式(2)、(6)，其频谱 $X_W(n\Delta f)$ 可以看作是正弦信号(2)对布莱克曼窗(6)进行调制的结果

$$X_W(n\Delta f) = \sum A_m W[(n\Delta f - f_m)T] \tag{8}$$

从式(8)可以看出：加窗后的频谱是对布莱克曼窗频谱的搬移和叠加。由于布莱克曼窗的旁瓣衰减很快，所以当信号各频率成份间隔足够远时，可以看作是没有谐波干扰的情况。此时可以很准确地根据各谱峰的幅度得出频率的内插公式。以信号的第 m 个分量 f_m 为例：设 f_m 落入第 l_m 与第 l_{m+1} 离散频点之间见图 2。图中

$$f_m = (l_m + \delta_m) \Delta f \tag{9}$$

其中 $0 \leq \delta_m < 1$ 即为所求的频率内插值。

由式(8)、(9)，信号的 f_m 分量加窗后得到的谱的最大值为

$$X_W(l_m \Delta f) = A_m W(-\delta_m) \tag{10a}$$

或 $X_W((l_{m+1}) \Delta f) = A_m W(1 - \delta_m) \tag{10b}$

将式(4)、(6)代入式(10)计算，并注意到当采用点数 N 足够大(N 为 2 048 或更大)时，式(4)狄里切利函数的分母 $\sin(\pi n/N) = (\pi n/N) + O(n^2/N^2)$ 可得

$$X_W(l_m \Delta f) = (A_m N / 2\pi) \sin(\pi \delta_m) \exp(j\pi \delta_m) [(0.42/\delta_m) - (0.5\delta_m/(\delta_m^2 - 1)) + 0.08\delta_m/(\delta_m^2 - 4)] \tag{11a}$$

及 $X_W((l_m + 1)\Delta f) = \frac{A_m N}{2\pi} \sin(\pi \delta_m) \exp(j\pi \delta_m) \left[\frac{0.42}{\delta_m - 1} - \frac{0.5(\delta_m - 1)}{\delta_m(\delta_m - 2)} + \frac{0.08(\delta_m - 1)}{(\delta_m + 1)(\delta_m - 3)} \right] \tag{11b}$

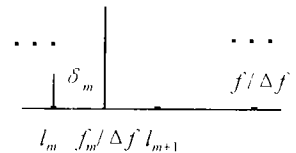


图 2 频域内插示意图

$$\alpha = |X_W((l_{m+1}) \Delta f)| / |X_W(l_m \Delta f)| \quad (12)$$

则从|(11b)|/(11a)可得关于 δ_m 的方程

$$(0.18\alpha + 0.18)\delta_m^3 - 0.5\alpha\delta_m^2 - (1.68\alpha + 2.22)\delta_m + 5.04\alpha - 3 = 0 \quad (13)$$

采用任何一种多项式求根的算法可以求出 δ_m 在 [0,1) 间的值。

求出 δ_m 后由式(11a)或式(11b)都可以直接求出复幅度 A_m 的值,从而直接得到信号该频率分量的幅度和相位。求出信号的所有频率成分的频率、幅度和相位后,就可以根据文献[4]的式(29)~(31)进一步计算出信号的其他被测参数,如 V_{dc} 直流成份、 V_{rms} 均方根值和 THD 总体谐波失真等。由于本文算法具有很小的谐波干扰特性,因而可以对所有的谐波分量谱峰线按以上算法单独进行计算,因此本文算法不仅可以处理周期信号(基波分量加上 M 个谐波分量),还可以处理多频率信号或存在非谐波频率分量(Interharmonic Frequency)的情况。

3 仿真实验

以下采用与文献[4]相同的信号进行测量。即被测信号为

$$x(k) = 0.2 + 6.0 \sin(2\pi(20.2k/N) + 0.1) + \sin(2\pi(60.6)k/N) \quad (14)$$

设采样频率为 $f_s = 2048$ Hz,共记录了 $N=2048$ 点。由于记录了非整数个信号周期,必然会在频域出现频谱泄漏现象。我们分别采用文献[4]的方法和本文算法对信号进行仿真实验,实验结果见表 2。

表 2 测量结果列表

被测量	精确值	内插算法	本文方法	被测量	精确值	内插算法	本文方法
$f/\Delta f$	20.200 000	20.199 8	20.200 000 083	ϕ_3	-1.570 796	-1.567 801 1	-1.570 790 412
$ H_1 $	6.000 000	6.001 1	5.999 999 950	V_{dc}	0.200 000	0.199 600 4	0.200 000 021
ϕ_1	-1.470 796	-1.463 8	-1.470 980 010	V_{rms}	4.305 810	4.306 300 1	4.305 809 961
$f/\Delta f$	60.600 000	60.599 4	60.599 995 289	THD	0.164 221	0.163 912 4	0.164 221 514
$ H_1 $	1.000 000	0.997 7	0.999 999 730				

由仿真实验结果知,信号的 DFT 幅度谱中,最大谱线出现在第 20 和第 21 个离散频点处。本文方法的一些中间结果为:由式(12), $\alpha=0.734\ 986\ 741\ 13$;解式(13), $\delta_m=0.200\ 000\ 083\ 212\ 36$ 。代入式(11a)解出 $A_m=0.598\ 989\ 560\ 864\ 26 + j(-5.970\ 026\ 035\ 791\ 69)$ 。比较两种算法可发现,采用窗口法测量的结果精度平均比内插算法提高了 3 个有效位数。这主要是因为单纯的内插算法所使用的矩形窗有较大的谐波干扰,难以得到精确的结果,尤其是较大的基波成分泄漏使谐波的幅度和相位测量有相对较大的误差。

4 稳定性分析

以上分析采用的是“纯净”信号,即没有噪声干扰的情况。为了验证本文算法的稳定性,我们对式(14)信号叠加不同幅度的噪声信号,分析噪声幅度对测量结果精度的影响。

设噪声为附加的白噪声信号。记噪声信号为

$$x_n(t) = x(t) + n(t) \quad (15)$$

式中 $n(t)$ 为一平稳的、各态历经的高斯分布随机过程。仿真实验中,为得到在不同信噪比情况下的测量结果,根据时域信噪比关系式

$$SNR_{time} = V_{rms}/N_{rms} \quad (16)$$

实验中代表噪声的伪随机序列可以取为

$$n(k) = \beta V_{rms} n'(k) \quad (17)$$

式中 N_{rms} 表示噪声的均方根值, $n'(k)$ 为 0 均值、方差为 1 的正态分布伪随机序列。根据式(16)、(17),通过改变噪声系数 β 的值可以计算出不同 SNR_{time} 时算法的测量结果。图 3 为信噪比从 20 dB~110 dB 时对基波频率、幅度和相位测量的相对误差 e 的变化情况。对于每一种信噪比的情况均计算 10 次后取平均值作为相对误差结果。从实验结果得出以下结论:1) 当噪声幅度达到信号的 10% 时,本

文算法仍能达到文献[2]纯净信号的精度,即 SNR_{time} 为 20 dB 时, $e_f=1.0011 \times 10^{-4}$, $e_v=0.004096$, $e_\phi=0.007943$, 表明本文算法具有较好的稳定性。2) 当 SNR_{time} 增大时测量误差呈指数下降, 表明本文算法对噪声的干扰比较敏感。因为本文算法是以 DFT 幅度的谱峰为基础进行内插计算, 因此当噪声干扰使谱峰值变化时对结果精度的影响比较显著。由图 3 可见, 当 SNR_{time} 为 110 dB 时, 相对误差为 $e_f=4.508 \times 10^{-9}$, $e_v=7.183 \times 10^{-8}$, $e_\phi=1.206 \times 10^{-6}$ 。如此高的测量精度可以用于一些高精度测量, 如标准频率的测量等。3) 频率测量误差要小于幅度和相位测量误差。

因为由式(11a)、式(11b), 幅度和相位的测量结果实际上是在频率测量的基础上得出的, 所以频率测量的误差经计算后会增大。

5 结 束 语

本文在分析了各种窗函数的特性后得出了以布莱克曼窗为基础的周期信号测量的窗口和内插算法。由于布莱克曼窗良好的旁瓣特性, 采样非整数周期个信号长度时谱的泄漏消失得很快, 当信号各频率成分相距足够远(如采样了 20 个信号周期)时, 可以认为没有谐波干涉而能够得到精确的测量结果, 尤其是对幅度较小的谐波分量的测量。此外, 由于本文算法能准确找出较弱的频率分量, 所以可以用于非周期信号的测量, 即对信号的预先不知道的非谐波频率成分的测量。在各种测量内插算法中, 频域内插值 δ_m 的计算是最关键的一步。从式(13)可知, 本文算法求解 δ_m 最终可以归结为求三次多项式的根, 而多项式求根是一个经典的数值分析问题, 有各种成熟的算法可用, 所以与采用其他窗函数的内插算法相比, 本文算法具有相对小的计算量。

参 考 文 献

- 1 林水生, 黄顺吉. 一种实现任意基 FFT 的快速整序算法. 电子科技大学学报, 1998, 27(4):343~346
- 2 Girgis A A, Ham F M. A quantitative study of pitfalls in the FFT. IEEE Trans on AES, 1980, 16(4):434~439
- 3 Harris F J. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform. Proceeding IEEE, 1978, 66(1):51~83
- 4 Jain V K, Collins W L, Davis D C. High-Accuracy analog measurements via interpolated FFT. IEEE Trans on IM, 1979, 28(2):113~122

A High-accuracy Windows and Interpolation Algorithm for Periodic Signal Measurement

Yu Sheng Chen Guangju

(CAT Lab., Dept. of Automation, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract A new algorithm based on the discrete Fourier transform (DFT) is presented for the determination of the parameters that characterize a periodic signal. The accuracy measurement of the signal can be achieved with a suitable windowing operation in time domain and an interpolation algorithm in frequency domain. The simulation result shows the availability and superiority of the algorithm compared with existing algorithms. The stability of the new method with respect to noise is verified by the noise analysis.

Key words discrete Fourier transform; spectral leakage; window function; interpolation algorithm

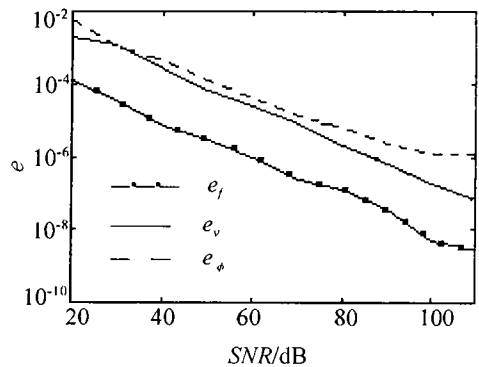


图 3 不同信噪比下的测量相对误差曲线