

两种产品竞争与扩散模型的进一步研究*

艾兴政**

李绍才

(电子科技大学管理学院 成都 610054) (四川省励自铁路工程有限公司 成都 610031)

涂智寿

(绵阳经济技术高等专科学校 绵阳 620045)

【摘要】 对巴斯模型在非垄断情形下遇到的问题提出了两种产品竞争与扩散模型, 并对扩散的演变过程进行了经济分析, 为预测和模拟动态市场结构提供了理论依据。

关键词 竞争; 扩散; 产品; 市场结构

中图分类号 O175; F019.2

自巴斯扩散模型被提出以来, 有关新产品扩散的研究和应用正引起人们的广泛关注。产品创新扩散是指以一定方式阻碍时间在社会系统的各个成员间进行传播的过程, 由创新、传播渠道、大众传媒、人际传播构成。当获取创新信息时, 社会成员对大众传媒和人际传播的选择偏好不同, 人际传播对社会系统中扩散的速度和形态具有重要影响^[1]。

巴斯曾根据一些消费者的合理化建议资料验证他的模型, 但在验证中却违反了他提出的垄断假设, 未能在少数控制市场的生产者展开竞争的情况下为新技术新产品的供给建立某种模型。

1 模型及结果

针对巴斯模型在非垄断情形所遇到的问题, 首先选择只有人际传播的情形, 即单产品遵从 Logistic 规律。当两种产品在同一社会系统中生存时, 其模型为^[2]

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[1 - \frac{N_1}{K_1} - \sigma_1 \frac{N_2}{K_2} \right] \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[1 - \sigma_2 \frac{N_1}{K_1} - \frac{N_2}{K_2} \right] \end{cases} \quad (1)$$

式中 N_i 为产品的数量; r_i 为固有的增长速度; K_i 为产品的最大市场容量; σ_i 为竞争能力系数。文献[1]对 $\sigma_1 > 1, \sigma_2 < 1$; $\sigma_1 > 1, \sigma_2 < 1$ 的情形进行了经济分析, 本文对 $\sigma_1 > 1, \sigma_2 > 1$; $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ 进一步作分析, 为预测和模拟市场动态结构提供理论依据。

定理 1 设 $\sigma_1 > 1, \sigma_2 > 1$ 。1) 对系统的四个平衡点来讲: $P_1(0, 0), P_2(K_1, 0), P_3(0, K_2), P_4\left[\frac{K_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{K_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right]$ 分别是不稳定结点、稳定结点、稳定结点和鞍点; 2) 对任意的初值 $P_0(N_1(t_0), N_2(t_0))$, 其中 $N_1(t_0) > 0, N_2(t_0) > 0$, 则 $P(N_1(t), N_2(t))$ 趋近于 P_2, P_3 或 P_4 。

证明 1) 由式(1)知平衡点的方程

$$f(N_1, N_2) = r_1 N_1 \left[1 - \frac{N_1}{K_1} - \sigma_1 \frac{N_2}{K_2} \right] = 0$$

$$g(N_1, N_2) = r_2 N_2 \left[1 - \frac{N_1}{K_1} - \sigma_2 \frac{N_2}{K_2} \right] = 0$$

1999年8月10日收稿

* 国家杰出青年科学基金资助项目, 基金号: 79725002

** 男 23岁 硕士 讲师

得到四个平衡点为: $P_1(0,0)$, $P_2(K_1,0)$, $P_3(0,K_2)$, $P_4\left[\frac{K_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{K_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right]$ 。为讨论其特性, 记

$$A = \begin{bmatrix} f_{N_1} & f_{N_2} \\ g_{N_1} & g_{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1\left(1 - \frac{2N_1}{K_1} - \frac{\sigma_1 N_2}{K_2}\right) & -\frac{r_1\sigma_1 N_1}{K_2} \\ -\frac{r_2\sigma_2 N_2}{K_2} & r_2\left(1 - \frac{\sigma_2 N_1}{K_1} - \frac{2N_2}{K_2}\right) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$P = -(f_{N_1} + g_{N_2})|_{P_i} \quad (3)$$

$$q = \det A|_{P_i} \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (4)$$

将 $P_1(0,0)$ 代入式(2)~(4): $P^2 - 4q = (r_1 - r_2)^2 \geq 0$, $q = r_1 r_2 > 0$ 。故 P_1 为对应线性系统的不稳定结点^[2]。对 $P_2(K_1,0)$, $P = r_1 - r_2(1-\sigma_2) > 0$, $q = -r_1 r_2(1-\sigma_2) > 0$, 且 $P^2 - 4q = [r_1 + r_2(1-\sigma_2)]^2 \geq 0$ 。故 P_2 为对应线性系统的稳定结点。对 $P_3(0,K_2)$, $P = -r_1(1-\sigma_1) + r_2 > 0$, $q = -r_1 r_2(1-\sigma_1) > 0$, 且 $P^2 - 4q = [r_2 + r_1(1-\sigma_1)]^2 \geq 0$ 。故 P_3 为线性系统的稳定结点。对 $P_4\left[\frac{K_1(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{K_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right]$, $P = \frac{r_1(1-\sigma_1) + r_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$, $q = \frac{r_1 r_2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2} < 0$, 故 P_4 为鞍点。由于非线性项为二次项, 对上述四个平衡点的线性结构是微分同胚的, 其拓扑结构一致^[3]。

2) 第一象限开始的解对未来任意时刻 t 必保留在第一象限内。

对 $N_2(t)=0$, 有

$$N_1(t) = \frac{K_1 N_1(0)}{N_1(0) + (K_1 - N_1(0))e^{-rt}}$$

对 $N_1(0) > 0$, 有 $N_1(t) \rightarrow K_1$ 。即 $N_1(t) > 0$ 恒成立; 同理对 $N_1(t)=0$, $N_1(t) > 0$, $N_2(t) > 0$ 也恒成立。由自治系统轨线不相交特征, 表明轨线不可能穿越轴。其次, 将第一象限划分为四个区域:

$$S_1: \dot{N}_1 > 0, \dot{N}_2 > 0$$

$$S_2: \dot{N}_1 > 0, \dot{N}_2 < 0$$

$$S_3: \dot{N}_1 < 0, \dot{N}_2 > 0$$

$$S_4: \dot{N}_1 < 0, \dot{N}_2 < 0$$

当 $1 - \frac{N_1}{K_1} - \sigma_1 \frac{N_2}{K_2} = 0$ 时, $\dot{N}_1 = 0$, $\dot{N}_2 = r_2 N_2 \left[1 - \sigma_2 + (\sigma_1 \sigma_2 - 1) \frac{N_2}{K_2}\right]$; 当 $N_2 = \frac{K_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$ 时,

$\dot{N}_2 = 0$; 当 $N_2 < \frac{K_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$ 时, $\dot{N}_2 < 0$, 即 S_2 上边界方向向量向下。当 $N_2 < \frac{K_2 - (1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$ 时,

$\dot{N}_1 > 0$, 也就是说 S_3 的下边界的方向向量向上。在 $1 - \sigma_2 \frac{N_1}{K_1} - \frac{N_2}{K_2} = 0$ 上, $\dot{N}_2 = 0$,

$N_1 = r_1 N_1 \left[1 - \sigma_1 + (\sigma_1 \sigma_2 - 1) \frac{N_1}{K_1}\right]$ 。当 $N_2 = \frac{K_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$ 时, $\dot{N}_1 = 0$; 当 $N_1 = \frac{K_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$ 时, $\dot{N}_1 > 0$,

即 S_2 的左边界方向向量向右。当 $N_1 < \frac{K_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$ 时, $\dot{N}_1 < 0$, 即 S_3 上边界方向向量向左, 如图 1 所

示。于是轨线从 S_1 出发, $\dot{N}_1 > 0$, $\dot{N}_2 > 0$, 必然离开 S_1 进入 S_3 或 P_4 或 S_2 区域; 若轨线从 S_4 出发, $\dot{N}_1 < 0$, $\dot{N}_2 < 0$, 故必然进入 S_2 或 P_4 或 S_3 区域; 若轨线从 S_3 内出发, $\dot{N}_1 < 0$, $\dot{N}_2 > 0$, 且又不能穿越两轴, 又因 $P_3(0,K_2)$ 是稳定结点, 则必然趋于 P_3 平衡点; 若轨线从 S_2 内出发, $\dot{N}_1 > 0$, $\dot{N}_2 > 0$, 且又不能穿越两轴, 又因 $P_2(K_1,0)$ 是稳定结点, 故必然趋于 P_2 平衡点。由于 P_4 是鞍点,

则必有一条快车道分别从 S_1 和 S_4 进入 P_4 平衡点。于是从第一象限出发的轨线，必然最终趋近 P_2 或 P_3 或 P_4 平衡点。

在定理 1 的基础上，我们给出两种产品竞争与扩散的动态市场结构，如图 2 所示。对图形结构的经济分析如下：对于两种互相替代的新产品，不同早期市场状态将导致三种不同的结果。在一定范围当早期市场中甲产品比乙产品大时，由于甲产品在乙产品的环境中更具竞争力，甲产品在初期市场就直接表现出来。但由于乙产品的市场惯性，乙产品进一步扩散，在穿越时 $\overline{P_4 A_1}$ 达到极大，随后开始下降，直至被淘汰。 $\overline{P_4 A_1}$ 代表了乙产品在市场中扩散的不同深度，这对预测和模拟动态市场是极为重要的。

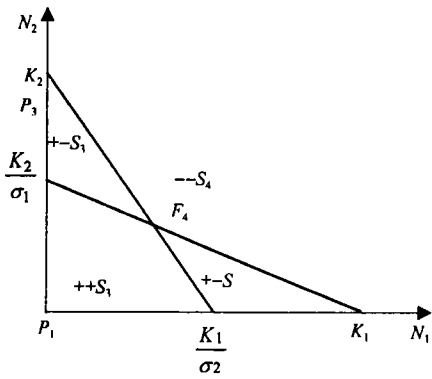


图 1 向量场

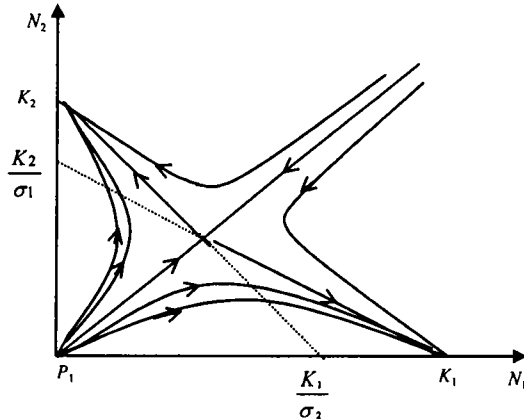


图 2 市场动态结构图

同样的两种产品，在不同环境中表现完全不一样。当早期市场中乙产品在一定范围内比甲产品大时，由于乙产品在甲产品的环境中更具竞争力，乙产品在初期市场也直接表现出来，并遵循 Logistic 规模。当穿越 $\overline{P_4 A_2}$ 时，甲产品达到极大，随后开始下降，直至淘汰。 $\overline{P_4 A_2}$ 代表了甲产品扩散的市场深度。由于甲乙两种产品的竞争优势具有一定的环境，当处在各自环境的边界市场时，优势不明显。早期市场表现出势均力敌的趋势，并形成最终共存的混和市场，即趋于平衡点 P_4 。

例 对两种替代的产品甲、乙生产厂家是远距离的，产品的性能、质量基本一致。当考虑到附加距离成本时，甲产品在距甲地较近的范围内价格低于同质的乙产品价格，具有较强的竞争优势；同样乙产品在距乙地较近的区域价格低于甲产品的价格，乙表现出竞争优势。而在距甲、乙地同等距离的市场上，价格几乎一致，形成了共存的混和市场。另一优势可能来自本地产品服务、维修方面的优势，都导致不同市场上产品扩散不同。这方面更广泛的例子是国际间的产品扩散。由于贸易壁垒或关税，导致相同产品在甲乙两国以及第三国市场上的扩散差异都足以印证上述产品竞争与扩散结构的有效性。

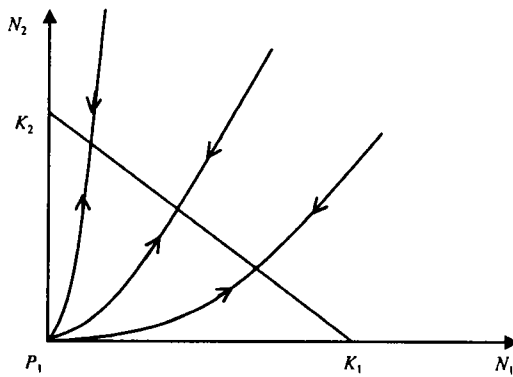


图 3 市场结构图

定理 2 设对 $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ，竞争与扩散的最终平衡点有无穷多个，且位于 $\frac{N_1}{K_1} + \frac{N_2}{K_2} = 1$ 上。

证明 $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ，则将式(1)改写为

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_2 \left[1 - \frac{N_1}{K_1} - \frac{N_2}{K_2} \right] \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_1 \left[1 - \frac{N_1}{K_1} - \frac{N_2}{K_2} \right] \end{cases}$$

在相平面上, 显然 $1 - \frac{N_1}{K_1} - \frac{N_2}{K_2} = 0$ 是奇异解, 且 $\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{r_1 N_2}{r_2 N_1}$, 故 $N_2 = C(N_1)^{r_2/r_1}$ 。又因 $P_1(0, 0)$ 为不稳定结点, 于是系统最终的平衡点停留在 $\frac{N_1}{K_1} + \frac{N_2}{K_2} = 1$, 见图 3。其经济分析如下: 对两种无差异的产品甲、乙, 初始状态决定他们最终平衡点规模的大小。由于没有竞争相对优势, 扩散依靠当初使用者的人际传播和大众消费的从众心理, 谁早期占据市场, 谁就将最终占据市场优势, 从而形成不同的平衡格局。

本文对两种产品的竞争所扩散的动态市场结构进行了分析, 为事先预测和模拟市场结构提供了理论依据, 解决了巴斯所遇到的非垄断情形的问题, 具有重要的理论和实践意义, 为进一步分析多产品竞争与扩散提供了思路。

参 考 文 献

- 1 斯通 P. 技术变革的经济分析. 北京技术经济和管理研究会技术经济学小组译. 北京: 机械工业出版社, 1989
- 2 艾兴政, 唐小我. 两种产品竞争与扩散模型研究. 电子科技大学学报, 1998, 27(4):440-445
- 3 张芷芳. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 1995

A Supplement Study of Competition and Diffusion Models About Two Products

Ai Xingzheng

(Management College, UEST of China Chengdu 610054)

Li Shaocai

(Li Zi Railway Engineering of Sichuan CO. Ltd. Chengdu 610031)

Tu Zhishou

(Mian Yang Economic College Mianyang 620045)

Abstract On the question about non-monopoly Bass models, this paper presents the competition and diffusion models about two products, and analyzes the diffusion procedure from economy, which provides theoretical proof for forecasting and imitating the dynamic market structure.

Key words competition; diffusion; product; market structure