

# 幅度补偿问题的松弛迭代法的收敛性

刘 荧\* 林嘉宇 毛均杰

(国防科技大学电子工程学院 长沙 410073)

**【摘要】** 研究了由相位谱重构有限长离散信号,即幅度补偿问题。根据以归一化相关系数对经典迭代法的收敛性进行的证明,讨论作为经典迭代法改进算法的松弛迭代法的收敛问题。列举了三种松弛迭代法的修正方法,并进行了比较。

**关键词** 信号重构; 相位谱; 收敛性; 松弛迭代法

**中图分类号** TN911.72

在许多实际问题中,希望能根据得到的信号部分信息来重构整个信号。例如,在语音信号去噪中,可先用含噪语音估计语音的短时频域幅度谱,再由幅度谱重构语音信号;又如在图像处理中,从散焦图像的相位函数重构原图像,可得到清晰图像。这两个有代表性的问题,前者称为相位补偿,后者称为幅度补偿。另外,还可能根据信号部分的时域信息和部分的频域信息重构整个信号。

文献[1, 2]对信号重构问题进行了归纳和总结,文献[3, 4]讨论根据信号部分的时域信息和部分的频域信息重构整个信号;文献[5~7]研究相位补偿问题;文献[8~12]对幅度补偿问题进行了深入地分析。文献[13]根据归一化相关系数对经典而有效的迭代算法的收敛性进行了证明。本文讨论幅度补偿问题,研究对象为有限长序列,还讨论了松弛迭代法的收敛,并进行了实验。

设原始序列(即待恢复信号) $x(n)$ 的长度为 $M$ ,在 $0 \leq n < M$ 外, $x(n) = 0$ 。 $x(n)$ 的 $N$ 点离散 Fourier 变换为 $X(k)$ , $0 \leq k \leq N-1$ ,记为

$$X = \text{DFT}(x) \tag{1}$$

限制 $2M \leq N$ <sup>[2]</sup>。记 $X(k)$ 的幅度谱为 $|X(k)|$ ,相位谱为 $\theta_x(k)$ ,即

$$X(k) = |X(k)| \exp[j\theta_x(k)] \quad 0 \leq k \leq N-1 \tag{2}$$

已知信号相位谱为 $\theta_x(k)$ ,希望重构出 $x(n)$ 。由于信号能量未知,所以仅要求重构信号和原始信号波形相似。

幅度补偿问题的迭代算法如图 1 所示。迭代由频域中的相位替代和时域中的时域截断组成,还包含由时域到频域(DFT)和由频域到时域(IDFT)的两次变换。

设第 $p$ 次迭代的输入频谱为 $X_{p-1}(k)$ ,相位替代 $\varphi_x$ 可表达为

$$\begin{cases} |Y_p(k)| = |X_{p-1}(k)| \\ \theta_{Y_p}(k) = \theta_x(k) \end{cases} \quad 0 \leq k \leq N-1 \tag{3}$$

根据原始信号 $x(n)$ 长度为 $M$ 进行的时域截断 $T_x$ 表达为

$$x_p(n) = \begin{cases} y_p(n) & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & M \leq n \leq N-1 \end{cases} \tag{4}$$

最终可用 $x_p(n)$ 作为原始信号 $x(n)$ 的恢复输出。

对以上迭代算法,文献[1,11]证明了其收敛性,但使用的收敛测度为原始信号和重构恢复信号间的欧氏距离,从寻求波形唯一性角度来看,证明显得牵强。

由于仅要求重构信号和原始信号波形相似,即只要求“波形唯一性”,可用如下的归一化相关系数作为迭代收敛程度的测度函数

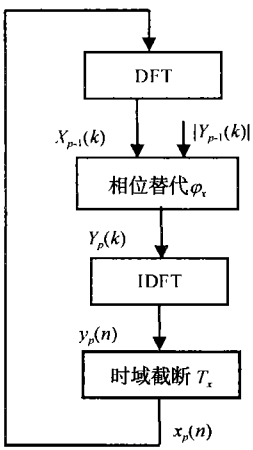


图 1 幅度补偿问题迭代算法

$$r_p = r(x, x_p) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x_p(n)}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n)\sum_{n=0}^{N-1} x_p^2(n)}} \quad (5)$$

文献[13]给出了基于归一化相关系数测度的证明。事实上,在满足迭代条件时,相位替代 $\varphi_x$ 不改变恢复信号能量,但可提高已恢复信号和原始信号的相关性;时域截断 $T_x$ 不改变已恢复信号和原始信号的相关性,但降低已恢复信号能量。因此,归一化相关系数都可得到提高。迭代过程中归一化相关系数是不减的,而其值不会大于 1,有上界,于是迭代的归一化相关系数必收敛,即迭代必收敛。若进一步迭代不再增加归一化相关系数的值,则除了 $y_p(n)$ 的对应时域段已经为零,时域截断 $T_x$ 不再降低其能量以外, $x_p(n)$ 和原始信号的相位谱必须完全相同。根据幅度补偿问题的唯一性定理<sup>[2]</sup>,此时归一化相关系数为 1。这样,不但迭代必收敛,且只要迭代次数足够多,归一化相关系数可趋向 1。

## 2 松弛迭代法及其收敛

由于不满足于经典迭代法的收敛速度,研究者提出了加快收敛速度的各种方法,其中,松弛迭代法是一种有效方法<sup>[1,2,11]</sup>。

表达经典迭代法的一次迭代为  $I$ , 即

$$x_{p+1} = I(x_p) \quad (6)$$

且

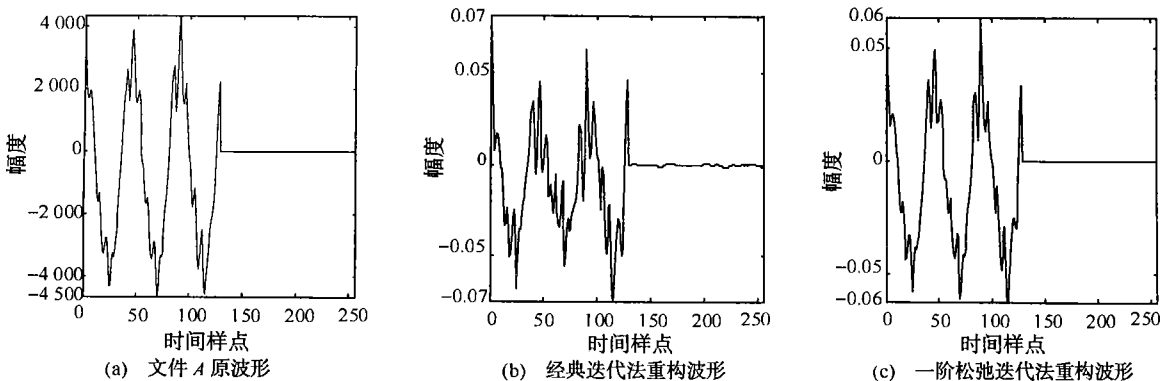
$$I = T_x \text{IDFT} \varphi_x \text{DFT} \quad (7)$$

一阶松弛迭代法修正迭代为

$$x_{p+1} = (1 - \alpha_p)x_p + \alpha_p I(x_p) \quad (8)$$

式中 $\alpha_p$ 称松弛参数。若每一次迭代都选取一个最优的松弛参数,使迭代的收敛速率最大,则通过松弛迭代法可极大地加快收敛速度<sup>[2]</sup>。

从语音数据中截取 128 点,记为数据  $A$ , 补零为 256 点,形成文件  $A$ , 如图 2a 所示。用经典迭代法(初始幅度谱为随机数)迭代 200 次后的波形见图 2b,可见原信号已成功地得到恢复。迭代过程的归一化相关系数见图 3a,随迭代递增(严格地,不减),但其递增速度较慢,在迭代进行约 50 次后,增幅更加缓慢。同样初始条件下,一阶松弛迭代法恢复文件  $A$  的归一化相关系数如图 3b 所示。

图 2 文件  $A$  及各迭代法对其重构后波形

该方法极大地提高了迭代的收敛速度, 迭代 50 次( $r_p=0.927$ )超过了经典迭代法迭代 200 次( $r_p=0.918$ )的效果, 并且, 迭代 100 次基本上还原出原信号波形( $r_p=0.99$ ), 如图 2c 所示。

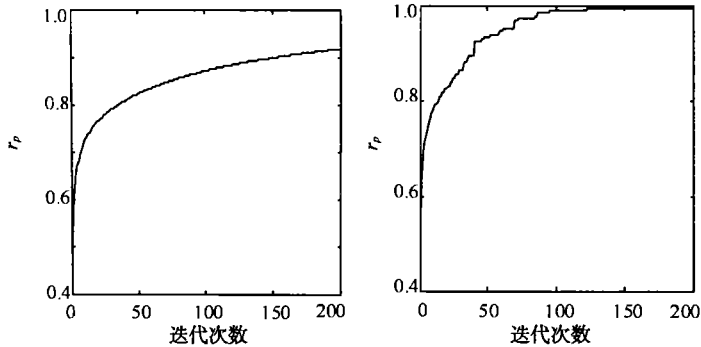


图 3 各迭代法重构文件 A 的归一化相关系数

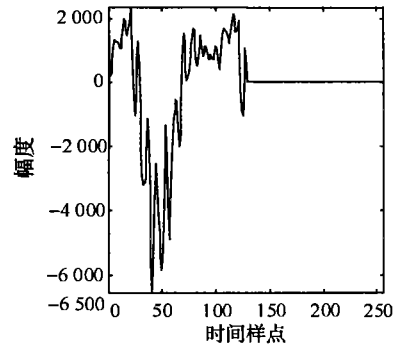


图 4 128 点的数据 B 补零为 256 点形成文件 B

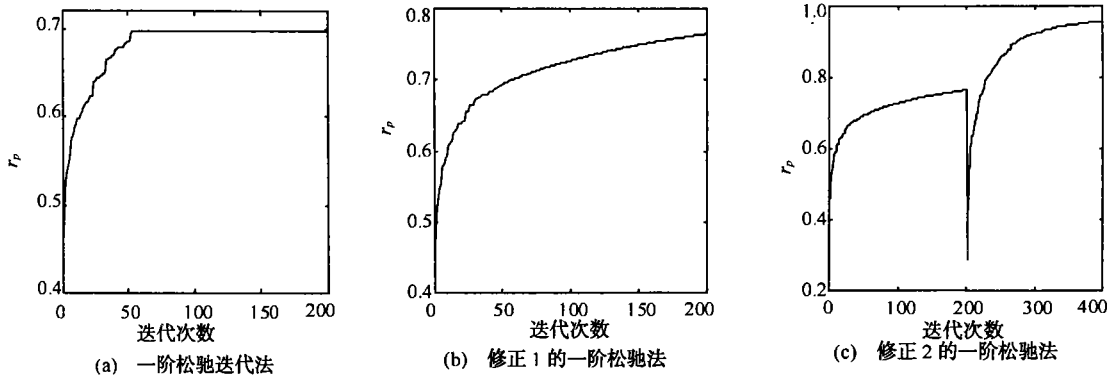


图 5 各迭代法重构文件 B 的归一化相关系数

一阶松弛迭代法的归一化相关系数有时并不收敛到 1。从语音数据中另外截取 128 点, 记为数据 B, 补零为 256 点, 形成文件 B, 如图 4 所示。应用一阶松弛迭代法(初始幅度谱和以上相同)200 次迭代的归一化相关系数见图 5a, 从迭代约 50 次开始, 归一化相关系数值不再增大( $r_p=0.666$ )。这是因为松弛参数在此时接近或直接等于 0 值(如图 6a 所示, 迭代约 50 次后,  $\alpha_p=0$ ); 由式(8),  $x_{p+1} \approx x_p$ , 一阶松弛迭代法陷入局部固定点。为避免这种情况, 可对一阶松弛迭代法的松弛参数加以修正。当检测到  $\alpha_p$  很小时, 使  $\alpha_p=1$ , 回到经典迭代法。根据对经典迭代法收敛性的证明, 只要原始信号满足幅度补偿问题可重构的条件, 经典迭代法总可收敛到原始信号波形, 这样可将迭代拉出一阶松弛的局部固定点, 记该修正为一阶松弛迭代法的修正 1。判断  $\alpha_p$  是否小的界限不能较大, 例如, 对文件 B 处理的修正 1 一阶松弛法, 该界限取为 0.5 时, 松弛法的快速收敛优点无法体现, 迭代 50 次的  $r_p=0.641$ , 尚差于未修正的一阶松弛法。但如果该界限取得较小, 可既保证迭代初始阶段的较快收敛, 又避免陷入局部固定点。图 5b 是界限取为 0.2 时修正 1 一阶松弛法的归一化相关系数, 迭代 50 次的  $r_p=0.668$ , 迭代 100 次的  $r_p=0.695$ ; 对应松弛参数见图 6b, 原为 0 值的松弛参数不停地调节自身。

松弛迭代算法出现陷入局部固定点的问题, 一般原因在于已恢复信号或原始信号的 Z 变换在 Z 平面的单位圆上有零点<sup>[2]</sup>。若将其扰动, 可提高收敛速度及效果。作出修正 1 一阶松弛法对文件 B 重构、迭代 200 次后信号的零点图, 如图 7 所示。大量零点在 Z 平面的单位圆上及其附近, 将此时恢复信号 Z 平面单位圆上的零点拉离单位圆, 记该修正为一阶松弛迭代法的修正 2(在修正 1 基础上), 文献[14]称为零点扰动法。扰动图 5b 的迭代 200 次后所恢复信号的单位圆上零点, 将其零点

模值由 1 减小为 0.7, 然后继续修正 1 一阶松弛迭代。作出其归一化相关系数如图 5c 所示。修正 2 加入随机扰动<sup>[2]</sup>, 就可达到将零点位置改变的目的, 从而可将单位圆上零点拉离单位圆, 我们称该

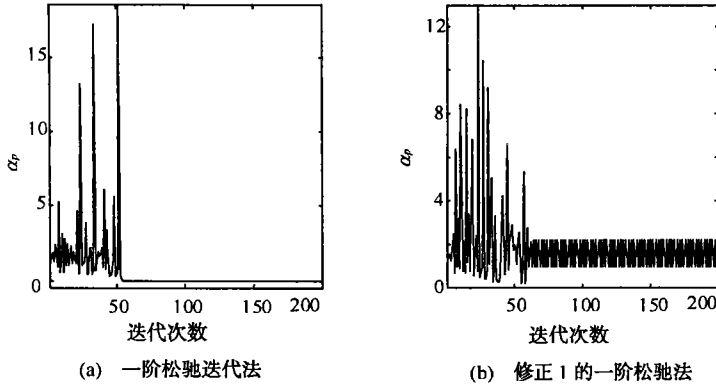


图 6 一阶松弛法及其修正 1 重构文件 B 的松弛参数

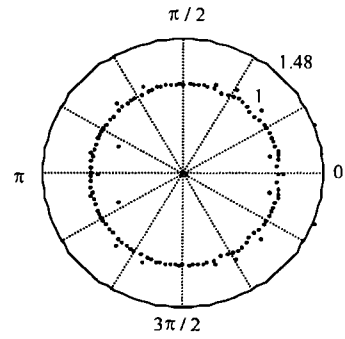


图 7 对应图 5b 迭代 200 次的信号零点图

方法为修正 3。修正 3 的计算量很小, 十分方便。对图 5b 迭代 200 次后的状态, 加入幅度为估计信号平均幅度 0.5 倍的随机扰动, 然后继续修正 1 一阶松弛迭代, 作出其中一次效果较好的归一化相关系数如图 8 所示。修正 3 可能改善迭代, 但由于加入的是随机信号, 修正 3 的效果不一定都很明显。

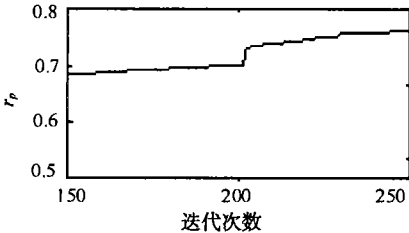


图 8 修正 3 所引起的跳变

上面讨论了一阶松弛迭代法, 其原则同样适合于高阶松弛法。松弛法可以改善迭代性能, 但其收敛性可能受到影响。在改善收敛性的修正方法中, 修正 1 简单实用, 修正 2 效果较好, 但计算量较大, 修正 3 计算量很小, 但效果不一定很明显。在一般情况下的幅度补偿问题, 可以采取修正 1 的一阶或二阶松弛迭代法。

### 参 考 文 献

- Hayes M H, Lim J S, Oppenheim A V. Signal reconstruction from phase or magnitude. IEEE Tr ASSP, 1980, 28 (6): 672~680
- 李衍达, 常 炯. 信号重构理论及其应用. 清华大学出版社, 1991
- 徐 雷, 王国印. 用模拟退火算法由部分采样点和幅度谱重构离散有限时宽信号. 电子学报, 1990, 18 (4): 49~56
- 李衍达, 宁 波. 由已知幅度谱和部分采样点恢复信号与采样频率的关系. 清华大学学报, 1988, 28 (4): 63~69
- 王永忠. 依频谱模重建信号的一种迭代算法. 信号处理, 1994, 10 (2): 111~117
- 应自炉, 江太辉. 依频谱模重建信号的一种修正松弛迭代算法. 信号处理, 1997, 13 (2): 161~168
- 邹 群, 张有正. 由幅度谱重构序列的一个新方法. 信号处理, 1997, 13 (3): 207~213
- 周性伟. 用相位确定信号的一个问题. 科学通报, 1984, 29 (13): 778~789
- 王斯雷. 相位与信号的关系. 科学通报, 1985, 30 (19): 1 529~1 530
- Oppenheim A V, Lim J S. Importance of phase in signals. Proc of IEEE, 1981, 69 (5): 529~541
- Tom V T, Quatieri T F, Hayes M H, *et al.* Convergence of iterative non-expansive signal reconstruction algorithm. IEEE Tr ASSP, 1981, 29 (5): 1 052~1 058
- Espy C, Lim J S. Effects of additive noise on signal reconstruction from Fourier transform phase. IEEE Tr ASSP, 1983, 31 (4): 894~898

- 13 刘 荧, 林嘉宇. 由相位重构离散信号的收敛性. 通信技术, 1999, (1) :31~35
- 14 吴忠泽. 利用部分信息恢复离散信号的研究: [博士论文]. 北京: 清华大学, 1986

## Convergence of Discrete Signal Reconstruction from Its Spectral Phase

Liu Ying Lin Jiayu Mao Junjie

(National University of Defence Technology Changsha 410073)

**Abstract** This paper studies the problem of signal reconstruction from spectral phase. The convergence problem of relaxed iterative algorithm is discussed based on the convergence proof using normalized correlation factor. Three modification methods are presented and compared. The first modification method presented in this paper, of relaxed iterative algorithm with order one or two, is recommended.

**Key words** signal reconstruction; spectral phase; convergence; relaxed iterative algorithm

· 科研成果介绍 ·

### Esc OPR 13155 型光纤 CATV 光接收机系列

主研人员: 冯 波 邱 昆 周 波 王志玉 谢 凯 徐大钧 等

OPR 13155 系列光接收机采用美国 ORTEL 公司专为 CATV 光传输设备制造的光接收机模块作为核心部件, 配置该公司自行开发生产的监测、显示、告警功能块和高可靠主、备电源, 构成普及型和标准型的系列机, 满足了我国 CATV 网对光传输设备的应用要求。

### VHF 快速跳频战术电台同步系统研究

主研人员: 李少谦 葛造坤 舒 力 洪福明 张国平 何 旭 夏超时 杨东林

VHF 快速跳频战术电台研制同步系统包括系统的硬件设计和软件设计。该成果采用以跳频图案和相关码相结合的方法组成同步图案, 采用慢速搜索和快速搜索相结合的技术进行了同步信号捕获, 解决了 VHF 高速跳频对同步信息量少的难于同步的问题, 具有较强的抗干扰、抗识别能力, 工作稳定可靠。

· 科 卞 ·