

# FEM 放大器非线性特性研究\*

李大治\*\* 梁 正

(电子科技大学高能电子所 成都 610054)

**【摘要】** 以圆柱波导、平板摇摆器为模型，导出了自洽的注波互作用三维非线性方程组。并考虑了电子初始速度零散的影响，在此基础上编制了相应的计算软件。通过数值分析的方法研究了自由电子激光器(FEM)的饱和效率、频带宽度等高频特性和摇摆器锥化设计对延缓饱和、提高效率的作用。

**关键词** 自由电子激光器； 平板摇摆器； 饱和效率； 带宽

**中图分类号** O441.4

毫米波段自由电子激光器(FEM)是一种重要的强相干辐射源，具有频带宽、频率连续可调等特点<sup>[1,2]</sup>，在军用和民用领域有着广泛的开发和应用前景<sup>[3-6]</sup>。

本文选用圆柱波导、平板摇摆器的结构作为 FEM 放大器的研究模型。用三维非线性理论导出了一组自洽的微分方程组，并在此基础上编制了计算软件，对 FEM 的饱和功率、饱和效率及带宽等高频特性进行了分析。平板摇摆器相对于螺旋摇摆器，在制作和对磁场的控制上有很多便利之处，也较容易实现摇摆器的锥化结构。此外，还可以方便地引入冷却系统，实现高平均功率输出。导出的基本方程具有通用性，稍加改动后，就可适用于其他类型波导。方程组中包括了电子注的速度离散效应，所以本计算软件可以分析电子注发射度对 FEM 高频特性的影响。

## 1 基本方程

首先考虑如下物理模型：相对论电子注通过一个不计损耗的圆柱波导，摇摆器选用线极化自聚焦平板摇摆磁场。这种摇摆器已被 Phillips 等人在实验系统上采用，后由 Scharlemann 证明该抛物极面磁场为<sup>[7]</sup>

$$B_w(x) = B_w(x) \left\{ \cos(k_w z) \left[ \sinh\left(\frac{k_w x}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{k_w y}{\sqrt{2}}\right) \hat{e}_x + \cosh\left(\frac{k_w x}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{k_w y}{\sqrt{2}}\right) \hat{e}_y \right] + \left[ -\sqrt{2} \cosh\left(\frac{k_w x}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{k_w y}{\sqrt{2}}\right) \sin(k_w z) \right] \hat{e}_z \right\} \quad (1)$$

式中  $B_w$  是摇摆磁场幅值； $k_w (\equiv 2\pi/\lambda_w)$  是摇摆器波数。为了把电子送到稳定轨道上，电子注要求被绝热压缩地注入互作用区。在摇摆器入口处的  $N_w$  个周期内，磁场幅值需从 0 逐渐增加至  $B_w$ 。由于要研究摇摆器的锥化结构对高频特性的影响，所以磁场幅值在某一点  $z_0$  处要逐渐减小。综合这些因素后，磁场幅值变为<sup>[7]</sup>

$$B_w(z) = \begin{cases} B_w \sin^2(k_w z / 4N_w) & 0 \leq z \leq N_w \lambda_w \\ B_w & N_w \lambda_w \leq z \leq z_0 \\ B_w [1 + \varepsilon_w k_w (z - z_0)] & z > z_0 \end{cases} \quad (2)$$

式中

$$\varepsilon_w = \frac{1}{k_w} \frac{d}{dz} \ln B_w$$

由于忽略了磁场幅度锥化引起的边缘场效应，所以上式只有在锥化度很小的时候才能被严格满足。因  $N_w$  要较大，而当  $z > z_0$  时，则要求  $|\varepsilon_w| \ll 1$ 。

1999年5月10日收稿

\* 国家科委 863 高科技项目

\*\* 男 29岁 博士生

电子注与辐射场的相互作用可以用有源 Maxwell 方程来描述

$$\nabla^2 \delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \delta J \quad (3)$$

辐射场在波导中传播, 要满足边界条件。因此可以用圆柱波导中的 TE 和 TM 模式来表示。本文仅讨论 TE 模式, 矢势  $A$  可以写成<sup>[8]</sup>

$$\delta A(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta A_n(z) \left[ \frac{1}{k_{ln} r} J_l(k_{ln} r) \sin(\alpha_l) \hat{e}_r + J'_l(k_{ln} r) \cos(\alpha_l) \hat{e}_\theta \right] \quad (4)$$

$$\alpha_l = \int_0^z k_{ln}(z') dz' + l\theta - \omega t \quad (5)$$

式中  $J_l$  和  $J'_l$  分别代表第一类 Bessel 函数及其导数;  $k_{ln}$  是截止波数。这里, 假定  $\delta A(z)$  和  $k(z)$  在一个波周期内是自变量  $z$  的慢变函数。电流密度为<sup>[7]</sup>

$$\delta J = -en_b \int d\mathbf{p}_0 v_{z0} F_0(\mathbf{p}) \iint_{A_g} dx_0 dy_0 \sigma_\perp(x_0, y_0) \int_{-T/2}^{T/2} dt_0 \sigma_{\parallel}(t_0) \mathbf{v}(z; \mathbf{p}_0, x_0, y_0, t_0) \times \delta[\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}_\perp(z; \mathbf{p}_0, x_0, y_0, t_0)] \frac{\delta[t - \tau(z; \mathbf{p}_0, x_0, y_0, t_0)]}{|v_z(z; \mathbf{p}_0, x_0, y_0, t_0)|} \quad (6)$$

式中  $n_b$  是电子的平均密度;  $A_g$  是波导横截面积;  $v_{z0}$  是电子的初始纵向速度;  $T = L/v_{z0}$ ,  $L$  是互作用区长度。  $\sigma_\perp$  和  $\sigma_{\parallel}$  及  $F_0(\mathbf{p}_0)$  分别描述初始位置电子的空间分布和速度分布。若电子是空间均匀分布, 则  $\sigma_\perp$  和  $\sigma_{\parallel}$  的值为 1。而  $F_0(\mathbf{p}_0) = A \exp[-(p_{z0} - p_0)^2 / \Delta p_z^2] \delta(p_0^2 - p_\perp^2 - p_{z0}^2) H(p_{z0})$  代表初始动量离散。  $A$  是归一化常数,  $H(x)$  是 Heaviside 函数。

把式(4)、(5)代入 Maxwell 方程, 分别在波导截面和一个波周期内积分。利用 Bessel 函数和三角函数的正交关系, 可得到关于辐射波幅度和波数与电子注的耦合方程为

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k_{ln}^2 - \kappa_{ln}^2 \right] \delta a_{ln} = \frac{\omega_b^2}{c^2} \beta_{z0} H_{ln} \left\langle \frac{v_r G_s \sin \alpha_l + v_\theta T_c \cos \alpha_l}{|v_z|} \right\rangle \quad (7)$$

$$2k_{ln}^{1/2} \frac{d}{dz} (k_{ln}^{1/2} \delta a_{ln}) = \frac{\omega_b^2}{c^2} \beta_{z0} H_{ln} \left\langle \frac{v_r G_c \cos \alpha_l - v_\theta T_s \sin \alpha_l}{|v_z|} \right\rangle \quad (8)$$

$$G_s = \frac{J_1(\kappa_{ln} r)}{\kappa_{ln} r} \sin \alpha_l \quad T_s = J'_1(\kappa_{ln} r) \sin \alpha_l$$

$$G_c = \frac{J_1(\kappa_{ln} r)}{\kappa_{ln} r} \cos \alpha_l \quad T_c = J'_1(\kappa_{ln} r) \cos \alpha_l$$

$$\langle F \rangle = \frac{A}{2\pi^2 R_g^2} \iint_{A_g} d\theta_0 dr_0 r_0 \sigma_\perp(r_0, \theta_0) \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{\parallel}(\varphi_0) d\varphi_0 \int_0^{2\pi} d\phi_0 \int_0^{p_0} dp_{z0} \beta_{z0} \exp[-(p_{z0} - p_0)^2 / \Delta p_z^2] F$$

其中  $\varphi_0 = (-\omega t_0)$  是有质动力波初是始相位,  $\phi_0 = \arctan(p_{y0}/p_{x0})$ ,  $\beta_{z0} = v_{z0}/c$ ,  $\delta a_{ln} = e\delta A_{ln}/mc^2$  是归一化波幅度,  $\omega_b^2 = 4\pi e^2 n_b/m$ 。电子的轨道方程为

$$v_z \frac{d}{dz} \mathbf{p} = -e\delta \mathbf{E}_{ln} - \frac{e}{c} \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_w + \delta \mathbf{B}_{ln}) \quad (9)$$

式中  $\mathbf{B}_w$  是摇摆器磁场, 由式(1)给出。从辐射场的矢势可以得到

$$\delta \mathbf{E}_{ln} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta A_{ln} \quad \delta \mathbf{B}_{ln} = \nabla \times \delta A_{ln} \quad (10)$$

电子的位置方程及相位方程为

$$v_z \frac{dr}{dz} = v_r \quad (11)$$

$$v_z \frac{d\theta}{dz} = \frac{v_\theta}{r} \quad (12)$$

$$\frac{d\varphi_l}{dz} = k + lk_w - \frac{\omega}{v_z} \tag{13}$$

式中  $\varphi_l$  是电子相对于有质动力势的相位

$$\varphi_l = \varphi_0 + \int_0^z dz'(k + lk_w - \frac{\omega}{v_z})$$

由此得到了关于注波互作用的自治、完备的方程组。

## 2 数值分析

文献[7]中的算例采用圆柱波导、螺旋摇摆器,工作模式是  $TE_{11}$  模,没有考虑电子注发射度。图 1 是用 LL-FEM 计算得到的增长率演化曲线,与文献[8]给出的相关曲线吻合得非常好。下面具体计算 3 mm 波段 FEM 放大器,参数主要是依据美国海军实验室对新一代毫米波雷达发射源提出的要求来选择<sup>[3]</sup>。采用平板摇摆器,工作模式用  $TE_{11}$  模,频率以 94 GHz 为计算重点,图中,  $V_b=250$  kV,  $I_b=35$  A,  $R_b=0.155$  cm,  $R_g=0.366$  26 cm,  $B_w=0.25$  T,  $B_w=0.13$  T,  $\lambda_w=1.175$  cm,  $P_{in}=10$  W。在电子注参量不变的情况下,图 2 给出了几组效率演化曲线,其中  $V_b=295$  kV,  $I_b=10$  A,  $R_b=0.2$  cm,  $R_g=0.3$  cm,  $B_w=0.25$  T,  $\lambda_w=0.88$  cm,  $P_{in}=10$  W。图 3 是频带特性,横轴代表频率。可以看出,3 dB 带宽大约是 4.2%。电子注质量的好坏对高频特性有一定的影响。计入电子注发射度的效率演化曲线如图 4 所示,其中  $V_b=295$  kV,  $I_b=10$  A,  $R_b=0.2$  cm,  $R_g=0.3$  cm,  $B_w=0.25$  T,  $\lambda_w=0.88$  cm,  $P_{in}=100$  W,  $f=94$  GHz。由图 4 可以看出,为了保证有 3% 以上的效率,归一化发射度应小于  $30 \pi$  mm-mrad。LL-FEM 计算软件还考虑了摇摆器的锥化结构。锥化从饱和状态稍前一点开始,锥化度的选取对延缓饱和、提高效率有一定的影响,如图 5 所示。图中,  $V_b=295$  kV,  $I_b=10$  A,  $R_b=0.2$  cm,  $R_g=0.3$  cm,  $B_w=0.25$  T,  $\lambda_w=0.88$  cm,  $E_R=0$ ,  $P_{in}=100$  W,  $f=94$  GHz。从图 5 不难发现,锥化度  $\varepsilon_w = -0.009$  时效果最好。

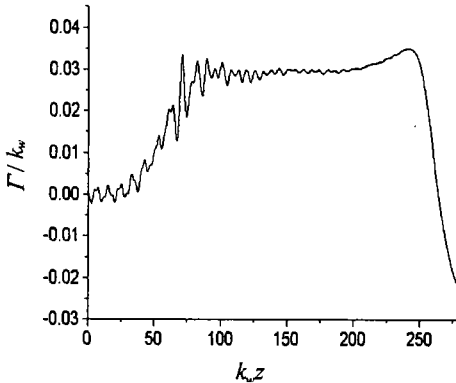


图 1 增长率演化曲线

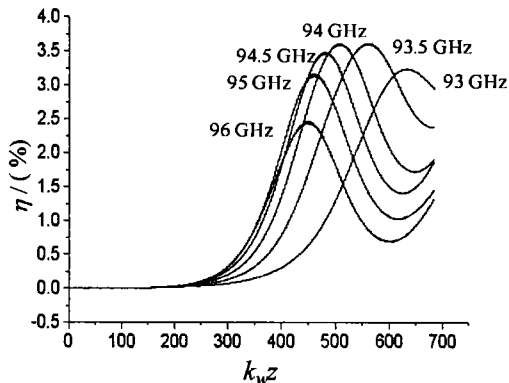


图 2 不计电子注发射度的效率演化曲线

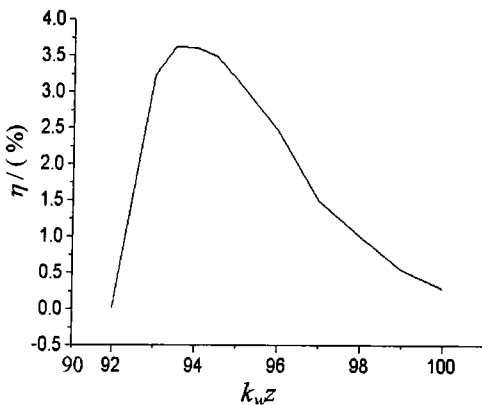


图 3 频带曲线

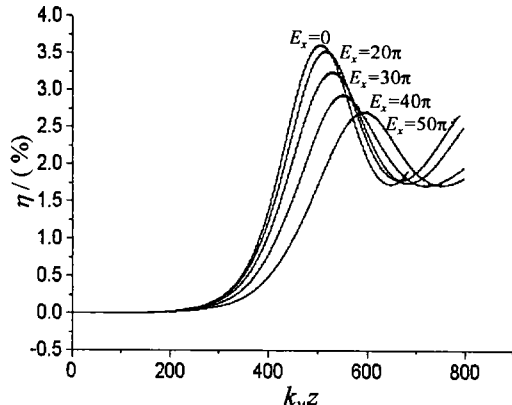


图 4 计入电子注发射度的效率演化曲线

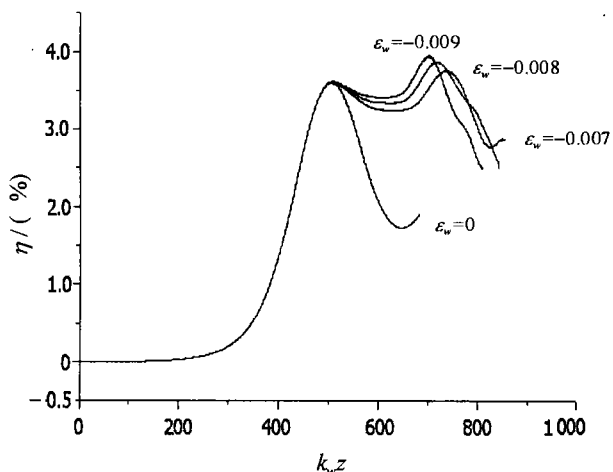


图 5 摇摆器锥化度对效率的影响

### 3 结 论

本文以圆柱波导、平板摇摆器为模型，导出了一组自洽的非线性方程组。在此基础上，编制了三维计算软件。采用数值分析的方法，研究了这种结构的带宽、饱和效率等高频特性。进一步研究了电子注发射度与效率的关系，以及摇摆器锥化结构设计的可行性，得到的结论对设计此类器件有一定的指导意义。数值计算结果表明，这种结构的 FEM 放大器基本满足国外对新一代毫米波雷达发射源提出的要求。文中导出的方程组具有通用性，只要代换高频场的结构，就可应用于其他类型的波

导。对新型波导结构的探索有助于在提高效率、拓宽频带和便于系统设计等方面取得突破。

### 参 考 文 献

- 1 Yakover I M, Pinhasi Y, Gover A. Resonator design and characterization for the Israeli tandem electrostatic FEL project. Nucl Instr and Meth A, 1995, (358):323~326
- 2 Zheng X D, Shiho M, Maebara S, *et al.* A corrugated waveguide driven by the linac as a prebuncher and seed-power generator of mm-wave FEL. Nucl Instr and Meth A, 1998, (407):198~202
- 3 Freund H P, Danly B G, Jackson R H, *et al.* Preliminary design of a W-band free-electron laser amplifier. Proceedings of International Infrared and Millimeter Wave Conference, 1997
- 4 Urbanus W H, Böniger W A, Dijk G, *et al.* Demonstration of low-loss electron beam transport and mm-wave experiments of the fusion-FEM. Nucl Instr and Meth A, 1998, (407):327~331
- 5 Urbanus W H. The Fusion-FEM: 730 kW at 200 GHz. Proceedings of the 20th International FEL Conference, 1998
- 6 胡 渝, 刘 华. 空间激光通信及其发展. 电子科技大学学报, 1998, 27(5):453~461
- 7 H P Freund. Three-dimensional nonlinear analysis of free-electron-laser amplifiers with planar wigglers. Phy Rev A, 1987, 36(5): 2 182~2 198
- 8 Ganguly A K, Freund H P. Nonlinear analysis of free-electron-laser amplifiers in three dimensions. Phys Rev A, 1985, 32(4): 2 275~2 286

## Research on Nonlinear Effects of FEM Amplifier

Li Dazhi Liang Zheng

(Institute of High Energy Electronics, UEST of China Chengdu 610054)

**Abstract** A set of coupled nonlinear differential equations of the FEM amplifier are derived in three dimensions for a configuration consisting of a cylindrical waveguide and a planar wiggler. These equations include the effects of electron momentum spread and wiggler taper governing the self-consistent evolution of TE mode and trajectories of an ensemble of electrons. The initial conditions are chosen to model the adiabatic injection of a cylindrically symmetric electron beam. Computer program based on these equations is made and nonlinear effect including saturation efficiency and bandwidth is analyzed.

**Key words** FEM; planar wiggler; saturation efficiency; bandwidth