第 30 卷　第 1 期　　　　电 子 科 技 大 学 学 报　　　　Vol.30　No.1
2001 年 2 月　　　　Journal of UEST of China　　　　Feb. 2001

散乱数据插值的迭代算法

钟尔杰*
(电子科技大学应用数学系　成都　610054)

【摘要】 推广了折线样条插值中泛函极小问题的数学模型．将二次泛函离散化后用罚函数方法处理约束条件，根据最优性条件导出五点差分格式，证明了迭代法求解大型方程组的收敛定理．数值计算实例说明该方法解决散乱数据插值问题的有效性．

关　键　词　二次泛函；　罚函数；　差分格式；　迭代法
中图分类号　O241.43；　TP31.43

考虑二维散乱数据的插值问题，设 $f(x,y)\in C^1(W)$，其中 $W=[a,b]\times[c,d]$ 为有界矩形域。由分划 ▮：$a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_I\leqslant b$；$c\leqslant y_1<y_2<\cdots<y_J\leqslant d$，得离散点指标集 $W_N=\{(i,j)\mid i=1,2,\cdots,I;\ j=1,2,\cdots,J\}$。设存在 W_N 的子集 $K_{ij}=\{(l_k,m_k)\mid k=1,2,\cdots,N\}$ 和有限实数集 $Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_N\}$，对任意 $(l_k,m_k)\in K_{ij}\subset W_N$，有 $z_k\in Z$，使

$$f(x_{l_k},y_{m_k})=z_k \qquad k=1,2,\cdots,N$$

求 $f(x,y)$ 在 Ω 上满足这一约束条件的插值函数 $u(x,y)$。

推广文献[1]中一元函数折线样条的泛函极小问题，求二元函数 $u(x,y)$，取泛函的极小值为

$$D[u]=\iint_{\Omega}\|\nabla u(x,y)\|_2^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将二次泛函离散化得

$$\min\left[\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I-1}\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x_i}\right)^2+\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta y_j}\right)^2\right] \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad u_{l_k,m_k}=z_k \qquad k=1,2,\cdots,N \tag{2}$$

式中　$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$，$\Delta y_j=y_{j+1}-y_j$。由最优性条件，在内结点上可得五点差分格式为

$$\alpha_{i,j}u_{i,j}=\frac{1}{\Delta x_{i-1}^2}u_{i-1,j}+\frac{1}{\Delta x_i^2}u_{i+1,j}+\frac{1}{\Delta y_{j-1}^2}u_{i,j-1}+\frac{1}{\Delta y_j^2}u_{i,j+1} \tag{3}$$

式中　$\alpha_{i,j}=\dfrac{1}{\Delta x_i^2}+\dfrac{1}{\Delta x_{i-1}^2}+\dfrac{1}{\Delta y_j^2}+\dfrac{1}{\Delta y_{j-1}^2}$，$i=2,\cdots,I-1$；$j=2,\cdots,J-1$。在边界结点和角结点上，最优性条件将导出特殊的差分格式，例如对于 $i=1$，$j=1$，有

$$\left(\frac{1}{\Delta x_1^2}+\frac{1}{\Delta y_1^2}\right)u_{11}=\frac{1}{\Delta x_1^2}u_{21}+\frac{1}{\Delta y_1^2}u_{12}$$

所有等式组成了大型线性方程组。对于约束条件的处理，通常的做法是对 $(i,j)\in K_{ij}$，去掉方程组中左端含 $u_{i,j}$ 的方程；而将其余方程中的 $u_{i,j}=z_k(i=l_k,\ j=m_k)$ 代入。这种处理方法改变了大型方程组的系数矩阵，而且使求解方程组的算法更为复杂。

1　处理约束条件的大 M 方法

为使差分格式在 Ω 内所有结点(包括边界结点和角点)处具有统一表达式，补充定义

2000年5月31日收稿
* 男　45岁　硕士　副教授

$$x_0=-\infty \qquad x_{I+1}=+\infty \qquad y_0=-\infty \qquad y_{J+1}=+\infty$$

则

$$\frac{1}{\Delta x_0^2}=\frac{1}{\Delta x_I^2}=\frac{1}{\Delta y_0^2}=\frac{1}{\Delta y_J^2}=0 \tag{4}$$

于是，在边界结点和角结点处差分格式仍可以用五点差分格式表示。此时，式(3)左端系数$a_{i,j}$的指标$(i,j)\in\Omega_N$。根据式(4)，当指标中有i=1，j=1，i=I，j=J 其中之一时，式(3)中左端$a_{i,j}$的个别项以及右端对应项皆为零。记 $L=|\Omega_N|=I\times J$，由于式(1)中目标函数为 L 个变元的二次齐次多项式，写成矩阵形式

$$\min_{U\in R^n} Q(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{FU} \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{F}\in R^{L\times L}$，$\boldsymbol{U}\in R^L$。将式(2)写为

$$\boldsymbol{EU}=\boldsymbol{p} \tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{E}\in R^{N\times L}$，$\boldsymbol{p}=[z_1,z_2,\cdots,z_N]^T$。用罚函数法处理约束条件得

$$\min_{U\in R^n} \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{FU}+q(\boldsymbol{EU}-\boldsymbol{p})^T(\boldsymbol{EU}-\boldsymbol{p}) \tag{7}$$

式中 $q>0$为罚因子。由于

$$\nabla[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{FU}+q(\boldsymbol{EU}-\boldsymbol{p})^T(\boldsymbol{EU}-\boldsymbol{p})]=2\boldsymbol{FU}+2q\boldsymbol{E}^T(\boldsymbol{EU}-\boldsymbol{p})$$

根据最优性条件，由式(7)导出

$$(\boldsymbol{F}+q\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})\boldsymbol{U}=q\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{p} \tag{8}$$

对照式(1)和式(2)知，式(7)的一般形式为

$$\min_{U\in R^n}\left[\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I-1}\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x_i}\right)^2+\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta y_j}\right)^2\right]+q\sum_{k=1}^{N}(u_{l_k,m_k}-z_k)^2$$

所以当$(i,j)\in\Omega_N\backslash K_{ij}$时，式(8)中方程为式(3)；当$(i,j)=(l_k,m_k)\in K_{ij}$时，式(8)中方程为

$$(a_{i,j}+q)u_{i,j}=\frac{1}{\Delta x_{i-1}^2}u_{i-1,j}+\frac{1}{\Delta x_i^2}u_{i+1,j}+\frac{1}{\Delta y_{j-1}^2}u_{i,j-1}+\frac{1}{\Delta y_j^2}u_{i,j+1}+q\ z_k \tag{9}$$

将式(9)两端同除罚因子q，并令q趋于无穷大，可得

$$u_{i,j}=z_k \qquad k=1,2,\cdots,N$$

当罚因子q取充分大正数M时，式(9)是约束条件(2)的近似，由此引出处理约束条件的大M方法。对于式(3)中的五点差分格式(其指标$(i,j)\in\Omega_N$)，修改主元$a_{i,j}$，并增加右端项$b_{i,j}$，可得

$$\tilde{a}_{i,j}u_{i,j}=\frac{1}{\Delta x_{i-1}^2}u_{i-1,j}+\frac{1}{\Delta x_i^2}u_{i+1,j}+\frac{1}{\Delta y_{j-1}^2}u_{i,j-1}+\frac{1}{\Delta y_j^2}u_{i,j+1}+b_{i,j} \tag{10}$$

式中

$$\tilde{a}_{i,j}=\begin{cases}a_{i,j}+M & i,j\in K_{ij}\\ a_{i,j} & i,j\in W_N\backslash K_{ij}\end{cases} \qquad b_{i,j}=\begin{cases}Mz_k & i,j=(l_k,m_k)\in K_{ij}\\ 0 & i,j\in W_N\backslash K_{ij}\end{cases}$$

这里，$\tilde{a}_{i,j}$和$b_{i,j}$的指标$(i,j)\in\Omega_N$。式(10)是式(8)的一般形式。大M方法没有改变原方程组的系数矩阵结构，形式上只是将齐次方程组化为非齐次方程组，本质上处理了散乱数据插值的约束条件(插值条件)，且算法简单。当线性方程组(8)的系数矩阵为正定矩阵时，可用 SOR 迭代法求解。

2 关于迭代收敛的主要定理

定理 1 方程组(8)中的系数矩阵$(\boldsymbol{F}+q\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})$为对称正定矩阵。

证明 首先证明方程组(8)中的系数矩阵$(\boldsymbol{F}+q\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})$是非奇异阵。假设结论不成立，则存在非零向量$\boldsymbol{U}$，使$(\boldsymbol{F}+q\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})\boldsymbol{U}=0$。从而有$\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{F}+q\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})\boldsymbol{U}=0$，即

$$\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{F}+q\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})\boldsymbol{U}=0 \tag{11}$$

对比式(5)、式(6)与式(1)、式(2)，可知式(11)的具体形式为

$$\left[\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I-1}\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x_i}\right)^2+\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta y_j}\right)^2\right]+q\sum_{k=1}^{N}u_{l_k,m_k}^2=0 \tag{12}$$

由于式(12)左端均为平方项，所以

$$\begin{cases}u_{i+1,j}-u_{i,j}=0 & i=1,2,\cdots,I-1;\ j=1,2,\cdots,J\\ u_{i,j+1}-u_{i,j}=0 & j=1,2,\cdots,J-1;\ i=1,2,\cdots,I\end{cases} \tag{13}$$

$$u_{l_k,m_k}=0 \quad k=1,2,\cdots,N \tag{14}$$

由式(14)知，当$(i,j)\in K_{ij}$时，有$u_{i,j}=0$，特别有$u_{l_1,m_1}=0$。而对任意的$(i,j)\in\Omega_N\backslash K_{ij}$，不妨设$i>l_1$，$j>m_1$。由式(13)有

$$u_{i,j}=u_{i-1,j}=\cdots=u_{l_1,j}=u_{l_1,j-1}=\cdots=u_{l_1,m_1}=0$$

所以对任意$(i,j)\in W_N$都有$u_{i,j}$=0，即$\boldsymbol{U}$=0。这与$\boldsymbol{U}$是非零向量矛盾，故$(\boldsymbol{F}+q\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})\boldsymbol{U}=0$非奇异。

由式(12)左端大于零，即对任意L维非零向量$\boldsymbol{U}$有

$$\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{F}+q\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})\boldsymbol{U}=\left[\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I-1}\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x_i}\right)^2+\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta y_j}\right)^2\right]+q\sum_{k=1}^{N}u_{l_k,m_k}^2>0$$

所以$(\boldsymbol{F}+q\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})$为对称正定矩阵。

定理 2 方程组(8)有唯一解，且 SOR 迭代法收敛。

证明 由定理1得，式(8)中的系数矩阵为对称正定矩阵。根据文献[2]的结论可知，SOR 迭代法收敛。

3 计算实例

将平面矩形域W=[77 , 195.5]×[−81 , 147]剖分为13×14网格[3~5]，分划为

$$\delta:\ 77=x_1<x_2<\cdots<x_{13}=195.5$$
$$-81=y_1<y_2<\cdots<y_{14}=147$$

记$u_{i,j}=u(x_i,y_j)$，$(i,j)\in W_N=\{(i,j)|\ i=1,\cdots,13;\ j=1,\cdots,14\}$。网格结点的横坐标$x_k$和纵坐标$y_k$数据见表1和表2所示。

表1 网格点横坐标数据

k	x	k	x
1	77.0	8	129.0
2	81.0	9	140.0
3	88.0	10	157.5
4	105.5	11	162.0
5	107.5	12	185.5
6	108.5	13	195.5
7	117.5		

表2 网格点纵坐标数据

k	y	k	y
1	−81.0	8	28.0
2	−66.5	9	56.5
3	−38.5	10	84.0
4	−6.5	11	85.5
5	3.0	12	137.5
6	7.5	13	141.5
7	22.5	14	147.0

表3 约束条件数据

l_k	m_k	z_k	l_k	m_k	z_k
8	6	4	10	4	9
9	13	8	5	1	9
6	8	6	1	5	8
3	14	8	2	9	8
12	7	6	11	2	9
13	12	8	11	10	4
4	11	8	7	3	9

当$(l_k,m_k)\in K_{ij}\subset W_N$时，$u_{l_k,m_k}=z_k$，$(k=1,2,\cdots,14)$的数据由表3给出。

取超松驰因子$0<w<2$，则二维散乱数据插值的 SOR 迭代格式为

$$\tilde{a}_{i,j}u_{i,j}^{k+1}=(1-w)u_{i,j}^k+w\left[\frac{1}{\Delta x_{i-1}^2}u_{i-1,j}^{k+1}+\frac{1}{\Delta x_i^2}u_{i+1,j}^k+\frac{1}{\Delta y_{j-1}^2}u_{i,j-1}^{k+1}+\frac{1}{\Delta y_j^2}u_{i,j+1}^k+b_{i,j}\right]$$

式中 i=1,2,⋯,13；j=1,2,⋯,14；k=0, 1,⋯。取$M=10^{10}$，迭代初值为

$$u_{i,j}=\begin{cases} z_k & (i,j)=(l_k,m_k)\in K_{ij} \\ 0 & (i,j)\in W_N\setminus K_{ij}\end{cases}$$

用 MATLAB 语言计算出函数 $u(x,y)$的离散值，其二维网面图形如图1和图2所示。

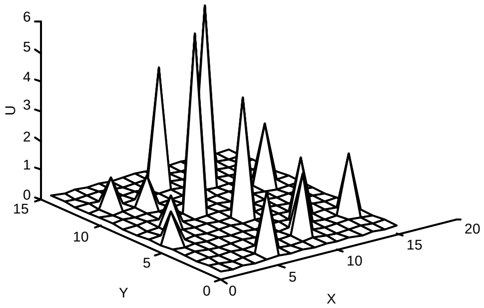

图1 初值所绘图形

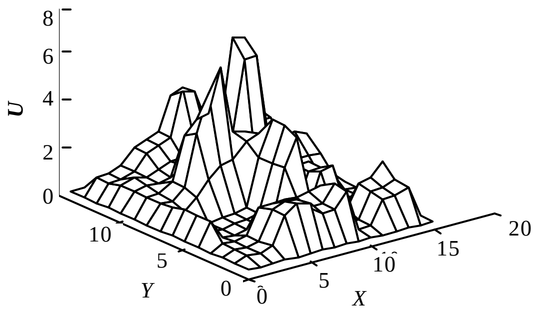

图2 数据结果所绘图

参 考 文 献

1 李岳生. 样条与插值. 上海:上海科学技术出版社, 1983

2 林成森. 数值计算方法(下册). 北京:科学出版社, 1998

3 David Ho, Kurt Overlery, Lee Short. Interpolating a topographical map of the ocean floor. Mathematical modeling. 1986, 7(4): 561~576

4 黄廷祝. 块 H 阵 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的上界和最小奇异值的下界. 电子科技大学学报，1996, 25(4): 441~444

5 黄廷祝. 块 Jacobi 迭代阵的收敛性. 电子科技大学学报, 1996, 25(6): 663~665

Iteration Method for Interpolation of Scattered Data

Zhong Erjie

(Dept. of Applied Mathematics，UEST of China Chengdu 610054)

Abstract Minimum problems of functional about polygon spline interpolation are extended in this paper, which treat the constraints with penalty function method after quadratic functional being discreted. Five-point difference schemes are obtained according to optimal condition. The convergence theorem shows that iteration method can be used to solve large systems. Through a computation example, the method is proved to be available to solve the problems about interpolation of scattered data.

Key words quadratic functional; penalty function; difference scheme; iteration method