

# 电磁波在非均匀等离子体波导中的传播\*

吴坚强\*\* 王海明

(电子科技大学高能电子所 成都 610054)

【摘要】利用麦克斯韦方程和线性理论推导了电磁波在径向非均匀未磁化等离子体波导中传播的色散方程，对其传播特性进行了讨论，对等离子体在径向具有线性和二次抛物线分布的色散曲线进行了数值计算；发现了电磁波相对于均匀等离子体分布的一些变化规律：HE模式的电磁波截止频率降低，EH模式的电磁波截止频率升高。

关键词 径向非均匀；等离子体；圆柱波导；色散方程

中图分类号 O53

自马里兰大学报道了等离子体加载返波管实验，获得接近40%的效率(8倍于未加等离子体情形)以来<sup>[1]</sup>，使得这一领域的研究更加活跃<sup>[2~7]</sup>。有关专家提出各种理论试图解释这一实验现象<sup>[8~10]</sup>，而马里兰大学的学者们进一步用实验检测等离子体的密度时<sup>[11~13]</sup>，却发现其径向分布非均匀，而且径向非均匀分布的等离子体有利于注波相互作用，具有以下三个特点：1) 可抑制高阶模式而用于单模、高功率、大半径慢波器件；2) 频率调节范围宽(8.5~11 GHz)，通过调节等离子体的密度可调节频率；3) 注波相互作用效率比真空情况有实质性提高。作为研究填充径向非均匀等离子体背景下注波相互作用的基础，很有必要对非均匀径向分布的等离子体波导中电磁波的传播特性进行研究。本文利用线性理论，对填充径向非均匀等离子体波导中电磁波的传播特性进行了理论分析，导出了其色散方程，并进行了数值计算，得到了一些重要的结果，对进一步研究填充径向非均匀等离子体波导中电子注与电磁波的相互作用提供了理论基础。

## 1 基本物理模型

如图1所示，在半径为 $R$ 的波导中充满径向非均匀分布的等离子体，将径向非均匀分布的等离子体沿径向分成 $L$ 层。假定所分的层足够多，可认为每层的等离子体密度是均匀的。第一层密度为 $n_0$ ，最外层密度为 $n_L$ ，图1所示为其中的第 $i-1$ 层， $i$ 层， $i+1$ 层( $i=2,3,\dots,L$ )， $a_{i-1}$ ， $a_i$ ， $a_{i+1}$ 分别表示相应层的半径。利用Maxwell方程组，可求出电磁波在每一层中的场分量，根据边界条件建立方程组，消去待定系数，可得到电磁波在径向非均匀等离子体波导中传播应满足的色散方程。

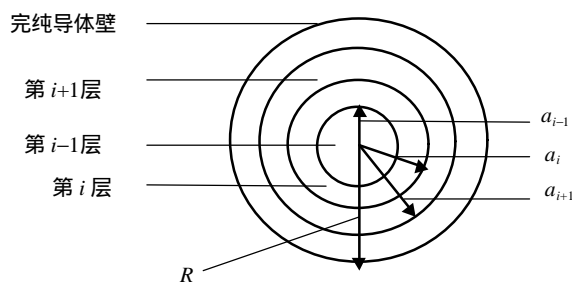


图1 径向分层示意图

2001年1月27日收稿

\* 教育部高等学校骨干教师资助计划；四川省学术和技术带头人培养基金资助项目

\*\* 男 39岁 博士 教授 博士生导师

## 2 色散方程的推导

依据基本物理模型, 利用矩阵理论的方法, 求出电磁波传输的色散方程。第一层的场分量可以写成

$$\begin{bmatrix} E_z(1) \\ \mathbf{h}H_z(1) \\ \frac{r}{R}E_q(1) \\ \mathbf{h}\frac{r}{R}H_q(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_n(p_1r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_n(p_1r) & 0 & 0 \\ \frac{nK_z}{p_1^2R}J'_n(p_1r) & \frac{j\frac{\mathbf{w}}{c}r}{p_1R}J_n(p_1r) & 0 & 0 \\ -j\frac{\mathbf{w}\mathbf{e}_1}{c}r & \frac{nK_z}{p_1R}J_n(p_1r) & \frac{nK_z}{p_1^2R}J'_n(p_1r) & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_1 \\ \mathbf{h}D_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

第*i*层的场分量可以写成

$$\begin{bmatrix} E_z(i) & \mathbf{h}H_z(i) & \frac{r}{R}E_q(i) & \mathbf{h}\frac{r}{R}H_q(i) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} J_n(p_1r) & 0 & N_n(p_1R) & 0 \\ 0 & J_n(p_1r) & 0 & N_n(p_1r) \\ \frac{nK_z}{p_i^2R}J'_n(p_1r) & \frac{j\frac{\mathbf{w}}{c}r}{p_iR}J_n(p_1r) & \frac{nK_z}{p_i^2R}N'_n(p_iR) & \frac{j\frac{\mathbf{w}}{c}r}{p_iR}N_n(p_iR) \\ -j\frac{\mathbf{w}\mathbf{e}_1}{c}r & \frac{nK_z}{p_iR}J_n(p_{i-1}r) & -j\frac{\mathbf{w}\mathbf{e}_i}{c}r & \frac{nK_z}{p_i^2R}N'_n(p_iR) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_i \\ \mathbf{h}D_i \\ E_i \\ \mathbf{h}F_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

$i=2,3,\dots,L$

式中  $E_z, H_z, E_q, H_q$  分别表示电场和磁场的 $z$ 向分量及 $q$ 角向分量;  $\mathbf{h}H_z, \frac{r}{R}E_q, \frac{r}{R}\mathbf{h}H_q$  为变换后的场分量。其中  $\mathbf{h} = \sqrt{\mathbf{m}_0/\mathbf{e}_0}$  为自由空间波阻抗,  $\mathbf{m}_0, \mathbf{e}_0, c$  分别为自由空间的导磁率、介电常数和光速;  $p_i^2 = \mathbf{w}^2\mathbf{m}_0\mathbf{e}_i + K_z^2$ ;  $\mathbf{w}, K_z$  分别为电磁波的角频率和传播常数;  $\mathbf{e}_i$  为第*i*层等离子体的介电常数, 其表达式为  $\mathbf{e}_i = 1 - \left(\frac{\mathbf{w}_{pi}}{\mathbf{w}}\right)^2$ ,  $\mathbf{w}_{pi}$  为第*i*层等离子体的角频率;  $J_n, N_n, J'_n, N'_n$  分别表示第一类、第二类*n*阶贝塞尔函数及其导数,  $R$  为波导半径;  $j$  为虚数。  $C_i, D_i, E_i, F_i$  为任意待定系数。

式(1)、(2)可简写成矩阵形式

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{X}_i \quad i=1, 2, \dots, L \quad (3)$$

式中  $\mathbf{Y}_i = \left( E_z(i) \quad \mathbf{h}H_z(i) \quad \frac{r}{R}E_q(i) \quad \frac{r}{R}\mathbf{h}H_q(i) \right)^T$ ,  $\mathbf{M}_i$  为式(1)、(2)右边的系数矩阵,  $\mathbf{X}_i = (C_i \quad \mathbf{h}D_i \quad E_i \quad \mathbf{h}F_i)^T$ , 上标 $T$ 表示矩阵的转置。

根据边界条件, 在边界处有

$$M_i|_{r=a_i} X_i = M_{i+1}|_{r=a_i} X_{i+1} \quad (4)$$

式中  $a_i$  表示第*i*层等离子体的半径, 可得下面的关系

$$M_1|_{r=a_1} X_1 = M_2|_{r=a_1} M_2^{-1}|_{r=a_2} \cdots M_{L-1}|_{r=a_{L-2}} M_{L-1}^{-1}|_{r=a_{L-1}} M_L|_{r=a_{L-1}} X_L \quad (5)$$

式(5)右边简写成  $\mathbf{M}X_L$ , 可得

$$-M_1|_{r=a_1} X_1 + \mathbf{M}X_L = 0 \quad (6)$$

由波导壁的边界条件得

$$M_L \Big|_{r=a_L} X_L = 0 \tag{7}$$

联立式(6)和式(7)得

$$M_C X = 0 \tag{8}$$

其中

$$M_C = \begin{bmatrix} -m_{11} & 0 & M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ 0 & -m_{22} & M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ -m_{31} & -m_{32} & M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ -m_{41} & -m_{42} & M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \\ 0 & 0 & n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ 0 & 0 & n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \end{bmatrix} \tag{9}$$

式中  $m, M, n$  分别代表矩阵  $M_1, M, M_L$

$$X = (C_1, \mathbf{h}D_1, C_L, \mathbf{h}D_L, E_L, \mathbf{h}F_L)^T \tag{10}$$

由此可解得色散方程为

$$\det(M_C) = 0 \tag{11}$$

这样将色散方程的求解, 归结为对一个6×6阶矩阵行列式的计算。

### 3 色散曲线的数值计算

#### 3.1 等离子体径向为线性分布的色散特性

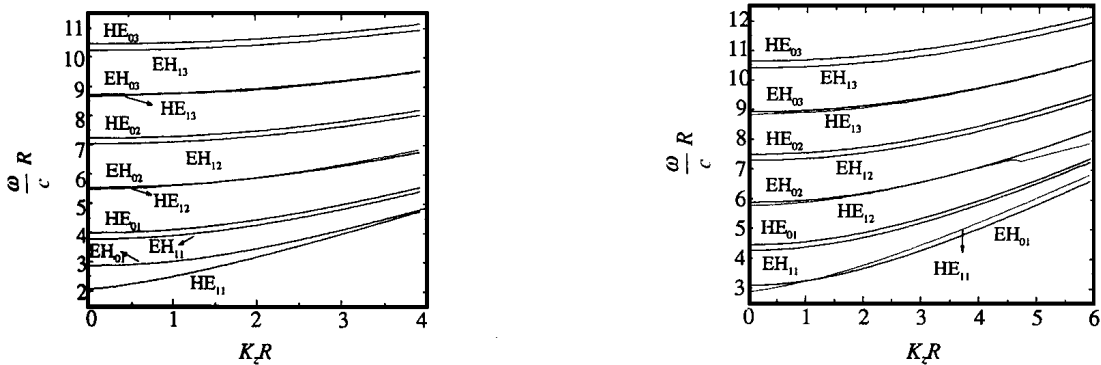
设等离子体密度径向分布为

$$n(r) = n_0 \left( 1 - ap \frac{r}{R} \right) \tag{12}$$

式中  $ap = 1 - n_1/n_0$ ;  $n_0, n_1$  分别为等离子体第一层和最外层的密度;  $R$  为波导半径。按等离子体密度沿径向等间隔变化, 把等离子体分成  $L$  层, 分别选取两组参数如下:

- 1)  $n_0 = 1.077e+17 \text{ m}^{-3}, n_1 = 3.600e+16 \text{ m}^{-3}, R = 1.5 \text{ cm}, L = 66$ ;
- 2)  $n_0 = 3.637e+17 \text{ m}^{-3}, n_1 = 3.000e+17 \text{ m}^{-3}, R = 2.0 \text{ cm}, L = 58$ 。

对色散方程(11)进行数值计算, 得到了各传播模式的色散曲线如图2所示, 图中  $R$  为波导半径,  $c$  为自由空间的光速。



(a)  $n_0 = 1.077e+17 \text{ m}^{-3}, n_1 = 3.600e+16 \text{ m}^{-3}, R = 1.5 \text{ cm}, L = 66$ ;

(b)  $n_0 = 3.637e+17 \text{ m}^{-3}, n_1 = 3.000e+17 \text{ m}^{-3}, R = 2.0 \text{ cm}, L = 58$

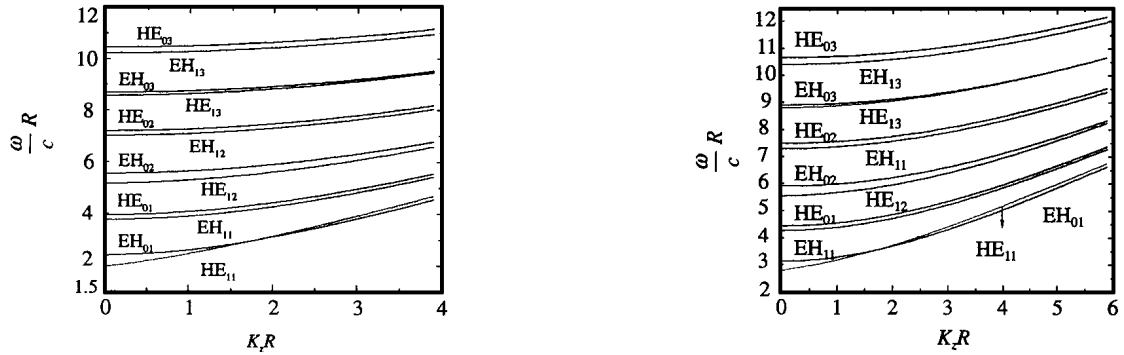
图2 等离子体沿径向为线性分布时的色散曲线

#### 3.2 等离子体密度径向分布为二次抛物线分布的色散特性

设等离子体密度分布为

$$n(r) = n_0 \left(1 - ap \times \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (13)$$

式中  $ap = 1 - n_1/n_0$ ;  $n_0, n_1$  分别为等离子体第一层和最外层的密度;  $R$  为波导半径。按等离子体密度沿径向等间隔变化, 把等离子体分成  $L$  层。分别选取同图2的两组参数, 对色散方程(11)进行数值计算, 得到了各传播模式的色散曲线如图3所示。

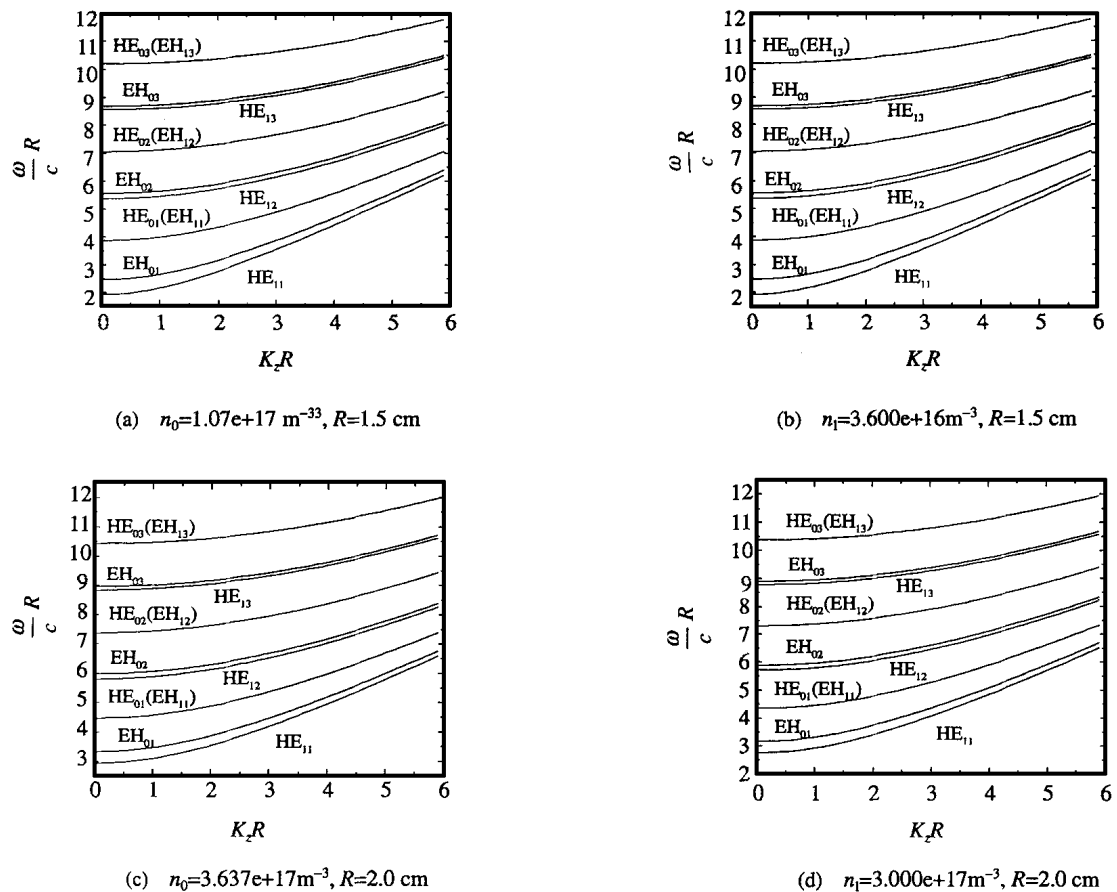


(a)  $n_0=1.077e+17 \text{ m}^{-3}$ ,  $n_1=3.600e+16 \text{ m}^{-3}$ ,  $R=1.5 \text{ cm}$ ,  $L=66$ ;

(b)  $n_0=3.637e+17 \text{ m}^{-3}$ ,  $n_1=3.000e+17 \text{ m}^{-3}$ ,  $R=2.0 \text{ cm}$ ,  $L=58$

图3 等离子体沿径向为二次抛物线分布时的色散曲线

为了便于比较, 同时计算了等离子体径向密度均匀分布时的色散曲线, 如图4所示。其中图4a~4d 中等离子体密度依次为  $n_0=1.077e+17 \text{ m}^{-3}$ ,  $n_1=3.600e+16 \text{ m}^{-3}$ ,  $n_0=3.637e+17 \text{ m}^{-3}$ ,  $n_1=3.000e+17 \text{ m}^{-3}$ ; 图4a、4b中  $R=1.5 \text{ cm}$ , 图4c、4d中  $R=2.0 \text{ cm}$ 。



(a)  $n_0=1.07e+17 \text{ m}^{-33}$ ,  $R=1.5 \text{ cm}$

(b)  $n_1=3.600e+16 \text{ m}^{-3}$ ,  $R=1.5 \text{ cm}$

(c)  $n_0=3.637e+17 \text{ m}^{-3}$ ,  $R=2.0 \text{ cm}$

(d)  $n_1=3.000e+17 \text{ m}^{-3}$ ,  $R=2.0 \text{ cm}$

图4 等离子体径向均匀分布时的色散曲线

## 4 比较

1) 图2a与图4a、4b比较, EH模式的截止频率比图4a、4b中相应模式的截止频率低一些;  $HE_{0n}$ 模式的截止频率比图4a、4b中相应模式的截止频率高一些, 而 $HE_{1n}$ 模式的截止频率介于图4a、4b中相应模式的截止频率之间。

2) 图2b与图4c、4d相比较, 大致与1)中的变化相同。只是对于 $EH_{1n}$ 模式, 其截止频率比图4c、4d中相应模式的截止频率都高。

3) 与图2a比较, 图3a中的 $EH_{01}$ 模式的截止频率高一些, 而 $HE_{11}$ 模式的截止频率则低一些。对于 $HE_{12}$ 模式, 二次抛物线分布的截止频率比线性分布的要低得多, 其他模式的截止频率几乎相同。

4) 与图2b比较, 图3b中的 $EH_{01}$ 模式的截止频率高一些, 而 $EH_{11}$ 模式的截止频率则低一些。对于HE模式, 二次抛物线分布的截止频率比线性分布的要低得多, 其他模式则极为相近。

## 5 结束语

等离子体密度的径向分布, 无论是线性分布或二次抛物线分布, 与等离子体密度为均匀的情形比较, 可以发现:

- 1) 与均匀等离子体分布比较, 对称模式 $HE_{0n}$ 和非对称模式 $EH_{1n}$ 的截止频率趋于分开;
- 2) 对称模式 $HE_{0n}$ 的截止频率比等离子体密度为均匀的 $n_0$ 和 $n_1$ 时的截止频率都高( $n_0$ 为波导中最内层等离子体密度,  $n_1$ 为波导中最外层等离子体密度);
- 3) 非对称模式 $HE_{1n}$ 的截止频率则介于等离子体密度为均匀的 $n_0$ 和 $n_1$ 时的截止频率之间;
- 4) 对于EH模式, 不管是对称模式还是非对称模式, 其截止频率比等离子体密度为均匀的 $n_0$ 和 $n_1$ 时的截止频率都要低;
- 5) 与线性分布相比较, 二次抛物线分布的最大区别在于 $HE_{12}$ 模式的截止频率要低得多。

## 参 考 文 献

- 1 Carmel Y, Minami K. Demonstration of efficiency enhancement in a high-power backward-wave oscillator by plasma injection. *Phys Rev Lett*, 1989, 62(20): 2 389~2 392
- 2 Lin A T, Chen. Plasma-induced efficiency enhancement in a backward wave oscillator. *Phys Rev Lett*, 1989, 63: 2 808~2 811
- 3 Carmel Y, Minami K. High-power microwave generation by excitation of a plasma-filled rippled boundary resonator. *IEEE Trans on Plasma Sci*, 1990, 18(3): 497~506
- 4 Sawhney R, Maheshwari K P. Effect of plasma on efficiency enhancement in a high power relativistic backward wave oscillator. *IEEE Trans on Plasma Sci*, 1993, 21: 609~613
- 5 Choyal Y. Excitation of electromagnetic waves by relativistic electron beam in plasma filled rippled wall waveguide. *Phys Plasma*, 1994, 1(1): 171~175
- 6 Goebel D M, High-power microwave source based on an unmagnetized backward-wave oscillator. *IEEE Trans on Plasma Sci*, 1994, 22: 547~553
- 7 Wu Jianqiang. Developments and applications of high power microwaves. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 1996, 25(7): 129~139 [吴坚强. 高功率微波的发展和应. *电子科技大学学报*, 1992, 25(7): 139~139]
- 8 Botton M, Ron Amiram. Self-induced distributed feedback in plasma-filled Cerenkov free electron masers. *Phys Fluids B*, 1992, 4(7): 1 979~1 988
- 9 Botton M, Ron Amiram. Efficiency of a plasma-filled backward-wave oscillator by self-induced distributed feedback. *Phys Rev Lett*, 1991, 66(19): 2 468~2 471

- 10 Lin A T. The effect of a dense background plasma on the dispersion of backward wave oscillators. SPIE, 1990, 1 226: 172~178
- 11 Shkvarunets Anatoly G, Kobayashi Satoru. Electromagnetic properties of corrugated and smooth waveguides filled with radially inhomogeneous plasma. IEEE Trans on Plasma Sci, 1996, 24: 905~917
- 12 Shkvarunets Anatoly G, Kobayashi Satoru, Operation of a relativistic backward-wave oscillator filled with a preionized high-density radially inhomogeneous plasma. IEEE Trans on Plasma Sci, 1998, 26: 646~652
- 13 Wu Jianqiang, Liu Shenggang, Mo Yuanlong. Linear theory of plasma-filled dielectric Cherenkov maser. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 1996, 25(7):12~16 [吴坚强, 刘盛纲, 莫元龙. 填充等离子体介质切伦可夫脉塞的线性理论. 电子科技大学学报, 1996, 25(7):12]

## Propagation of Electromagnetic Wave Along Waveguide Filled with Inhomogeneously Plasma

Wu Jianqiang    Wang Haiming

(Inst. of High Energy Electronics, UEST of China   Chengdu   610054)

**Abstract** Using Maxwell's equations and the linear theory, the dispersion equations of wave propagation along the waveguide filled with radially and inhomogeneously unmagnetized plasma are deduced in this paper. Its propagation characteristics are discussed. The wave dispersion curves under radially linear and parabola plasma distribution are calculated quantitatively. The principles of variation compared with homogeneous conditions are discovered: the cut-off frequencies of HE waves decrease, while the cut-off frequencies of EH waves increase.

**Key words** radially inhomogeneous; plasma; cylindrical waveguide; dispersion equation

-----

• 科研成果介绍 •

### NCL-J型短波高速跳频通信机

主研人员: 李少谦 何旭 程郁凡 董彬虹 刘晓晖 邹显炳 葛造坤 舒力 文字 李富群

NCL-J型短波高速跳频通信机极大地提高了短波通信的抗干扰能力和数据传输能力。该系统采用全DSP软件接收技术实现系统的同步, 完成了短波高速跳频信号的解跳与解调, 与传统接收机有本质的区别, 属于软件无线电台的范畴。

• 项 曦 •