神经网络定性分析

陈中柘*

(电子科技大学机械电子工程学院 成都 610054)

【摘要】利用大系统理论和M-矩阵的特性，提出了一种适合于Hopfield神经网络平衡点定性分析的新方法，给出了系统稳定和不稳定的判定定理。把神经网络的不同部分看成是子系统，使稳定性判定过程中的计算量大大减少。对非线形互联结构强度的约束不仅可以为直线，也可以是一些适当的函数，扩大了适用范围。

关 键 词 神经网络; 稳定性; 子系统; 约束; 平衡点; 李雅谱洛夫函数

中图分类号 TP183

A Method of Qualitative Analysis of Neural Networks

Chen Zhongzhe

(College of Mechamical Electromechanical Eng., UEST of China Chengdu 610054)

Abstract A new method for qualitative analysis of equilibrium points of Hopfield neural networks is given by using large-scale system theory and the quality of Minkowski matrix. Two qualitative theorems for neural networks are given both stability and instability. The amount of computation is reduced greatly viewed the different part of networks as subsystems. The restraint of intensity of the nonlinear interconnecting structure is not only a line, but also some suitable function.

Key words neural networks; stableness; subsystem; restraint; equilibrium; Lyapunov function

神经网络理论是近年来得到迅速发展的一个前沿科研领域，它的发展对计算机科学、人工智能、微电子学、自动控制与机器人等领域都有重要影响。神经网络系统是在现代神经生物学和神经心理学研究基础上模仿人的大脑神经元的结构特征和功能特征而建立起来的一种非线性系统，其中Hopfield神经网络模型最具有代表性。文献[1~3]对Hopfield神经网络的稳定性分析进行了详细讨论。本文利用这些结论及大系统理论知识，对Hopfield神经网络的平衡点稳定性进行了理论分析，导出了系统平衡点稳定性判定定理，用它进行实例判定时，计算工作量大大减少且放宽了对互联结构强度的约束。

1 有关定义及定理

定义 1 如果连续函数ϕ：$[-r_1, +r_1]\to R^+$(或连续函数ϕ：$(-\infty, +\infty)\to R^+$)在区间$[-r_1, 0]$内是严格递减的，在区间$[0, +r_1]$ 内是严格递增的，且$\phi(0)=0$，则称ϕ属于类K，即$\phi\in K$。

定义 2 设 J 为区间$[t_0, +\infty]$，其中$t_0\geq 0$，$B(r)$为R^n中$x=0$的某邻域。如$v(x, t)$满足

2001年11月6日收稿

* 女 33岁 硕士 讲师

$$\begin{cases} v(x,t)>0(<0) & t\in J, x\in B(r), x\neq 0 \\ v(0,t)=0 & t\in J \end{cases}$$

则称v为正定(负定)。

定理　设$\boldsymbol{D}=[d_{ij}]$为$n\times n$阶实矩阵，如当$i\neq j$时，有$d_{ij}\leq 0$，则下列各命题是等价的：1) $\boldsymbol{D}$的任意主子式均为正(即$\boldsymbol{D}$为M-矩阵)；2) $\boldsymbol{D}$的逐次主子式均为正；3) 存在n维向量$\boldsymbol{U}>0$，使$\boldsymbol{DU}>0$；4) 存在n维向量$\boldsymbol{U}>0$，使$\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{U}>0$；5) $\boldsymbol{D}$非奇异且$\boldsymbol{D}^{-1}$的所有元素均非负($\boldsymbol{D}^{-1}$的所有对角线元素均为正)；6) $\boldsymbol{D}$的所有特征值的实部均为正。

对n阶互联系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_i=F_i(x_i,t)+g_i(x_i,t)\qquad i\in N \tag{1}$$

系统(1)的矢量形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}(x,t)+\boldsymbol{g}(x,t) \tag{2}$$

式中　$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，可以看成是由$n$个孤立子系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_i=F_i(x_i,t)\qquad i\in N \tag{3}$$

和互联耦合结构$g_i(x,t)$组成。设：对任一给定的初始条件，系统(1)的解存在且唯一，则$x=0$是系统(1)的一个孤立奇点。

2　判定方法

2.1　系统稳定的判定方法

若互联系统(1)在R^n中$x=0$的某邻域$\boldsymbol{B}(r)$内满足以下条件：

1) 对每一个孤立子系统(3)，都存在连续可微函数v_i: $B_i(r_i)\times J\rightarrow R^+$, 其中$B_i(r_i)$为在$R^n$中$x_i=0$的某个邻域，$J=[t_0, +\infty]$，$t_0\geq 0$, 存在函数$y_{i1}(x_i)$, $y_{i2}(x_i)\in K$, 常数$s_i\in K$，正定函数$y_{i3}(x_i)$，$y_{i4}(x_i)$，使

$$\begin{cases} y_{i1}\leq v_i(x_i,t)\leq y_{i2} & (4) \\ D\, v_{i(3)}(x_i,t)\leq \boldsymbol{\sigma}_i y_{i3} y_{i4} & (5) \end{cases}$$

2) 给定条件 1)中的y_{i3}、y_{i4}，存在常数a_{ij}, $i, j\in N$, 使对所有$x_i\in B_i(r_i)$, $t\in J$均有

$$\frac{\partial}{\partial x_i}v_i(x_i,t)g_i(x,t)\leq y_{i3}\sum_{j\in N}a_{ij}y_{j4}\qquad i\neq j，a_{ij}\geq 0 \tag{6}$$

3) 对于给定条件 1)中的s_i和给定条件 2)中的a_{ij}，检验矩阵$\boldsymbol{D}=[d_{ij}]$

$$d_{ij}=\begin{cases} -(s_i+a_{ij}) & i=j \\ -a_{ij} & i\neq j \end{cases}$$

是M-矩阵，则互联系统(1)的平衡点$x=(0,\cdots,0)^T$是一致渐近稳定的。

证明　取

$$\boldsymbol{v}(x,t)=\sum_{i\in N}a_iv_i(x_i,t) \tag{7}$$

为系统(1)的Lyapunov函数，式中a_i为常数。

$\boldsymbol{v}(x,t)$沿系统(1)的解的全导数为

$$\boldsymbol{D}v_{(1)}(x,t)=\sum_{i\in N}a_i\left[Dv_{i(3)}(x_i,t)+\frac{\partial}{\partial x}v_i(x_i,t)g_i(x,t)\right]\leq$$

$$\sum_{i\in N}a_i\left(s_iy_{i3}y_{i4}+y_{i3}\sum_{j\in N}a_{ij}y_{j4}\right)=-\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{DW} \tag{8}$$

式中 $\boldsymbol{V}=(a_1y_{13}, a_2y_{23},\cdots, a_ny_{n3})^T$, $\boldsymbol{W}=(y_{14}, y_{24},\cdots, y_{n4})^T$, $\boldsymbol{D}$在条件3)中给出。

令矢量$\boldsymbol{U}^T=\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{D}$，由条件 3)及定理可知，$\boldsymbol{D}^{-1}$存在且$\boldsymbol{D}^{-1}\geq 0$，由于$\boldsymbol{D}^{-1}$的每行和每列至少包含一个非零元数(因$\boldsymbol{D}^{-1}$的对角线元数都为正)，所以总能在$x_i\neq 0$, $i\in N$时选择$\boldsymbol{U}$满足$\boldsymbol{U}>0$，使$\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{D}^{-1})^T\boldsymbol{U}>0$，即$a_iy_3>0$, 从而$a_i>0$, $i\in N$。因此，由式(7)、(8)及条件 1)有

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}(x, t) >0 & x\neq 0 \\ \boldsymbol{D}v_{(1)}(x, t)\leq -\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{W} < 0 & x\neq 0 \end{cases}$$

由Lyapunov稳定性理论可知，互联系统(1)的平衡点$\boldsymbol{x}=(0,\cdots,0)^T$是一致渐近稳定的。

可见，$y_{i3}(x_i)$和$y_{i4}(x_i)$是用来限制子系统特性和互联耦合大小的范围，可根据具体情况选择其表达式。

2.2 系统不稳定的判定方法

设集合N_1为N的非空子集，N为大于零的整数集合，对互联系统(1)，如在$\boldsymbol{R}^n$中$x=0$的某个邻域$B(r)$内满足以下条件：

1) 对每一孤立子系统(3)，存在连续可微函数v_i:$B_i(r_i)\times \boldsymbol{J}\rightarrow \boldsymbol{R}$，函数$y_{i1}(x_i)$, $y_{i2}(x_i)\in K$, 正定函数$y_{i3}(x_i)$, $y_{i4}(x_i)$, 常数d_i, $s_i\in R$, 使

$$\begin{cases} d_iy_{i1}\leq v_i(x_i, t)\leq d_iy_{i2} \\ \boldsymbol{D}\, v_{i(3)}(x_i, t)\leq s_iy_{i3}y_{i4} \end{cases}$$

当$i\in N_1$ 时, $d_i=-1$；当$i\in N-N_1$时, $d_i=1$。

2) 对任意$i, j\in N$, 存在常数a_{ij}，使

$$\frac{\partial}{\partial x_i}v_i(x_i,t)g_i(x,t)\leq y_{i3}\sum_{j\in N}a_{ij}y_{j4} \qquad i\neq j,\ a_{ij}\geq 0$$

3) 检验矩阵$\boldsymbol{D}=[d_{ij}]$

$$d_{ij}=\begin{cases} -(s_i+a_{ij}) & i=j \\ -a_{ij} & i\neq j \end{cases}$$

是M-矩阵，如$N_1\neq N$，则互联系统(1)的平衡点$x=0$不稳定；如$N_1=N$，则互联系统(1)的平衡点$x=0$完全不稳定。

证明 取

$$\boldsymbol{v}(x, t)=\sum_{i\in N}a_iv_i(x_i,t) \tag{9}$$

为系统(1)的Lyapunov函数，式中a_i，$i\in N$为正常数。

从系统稳定的判定方法的证明过程可知，$\boldsymbol{v}(x, t)$沿系统(1)的解的全导数为

$$\boldsymbol{D}v_{(1)}(x, t)\leq -\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{W}\leq 0 \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{V}=(a_1y_{13}, a_2y_{23},\cdots, a_ny_{n3})^T$, $\boldsymbol{W}=(y_{14}, y_{24},\cdots, y_{n4})^T$, $\boldsymbol{D}$在条件3)中定义。

由条件1)可知，如$x'\in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$满足条件$i\in N_1$时，$x'\neq 0$；当$i\in N-N_1$ 时，$x'=0$，则有$\boldsymbol{v}(x', t)<0$。这样，在原点$x=0$的每一邻域里，都至少存在一个点$x'=0$使$\boldsymbol{v}(x', t)<0$，且$\boldsymbol{v}(x, t)$ 在包含$x=0$的任一闭域内有下界。结合式(10)可知，平衡点$x=0$是不稳定的。如$N_1=N$，则$\boldsymbol{v}(x, t)$在$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$内负定，可知平衡点$x=0$完全不稳定。

由于M-矩阵具有非对角线上元素增大仍保持不为正，则所得矩阵仍为M-矩阵[4]的性质，所以对于满足上述两个判定方法的系统，如耦合强度减小，结论仍然成立。

3 实 例

本文假设系统

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t}=-z_1+4g(z_1)-g(z_2) \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t}=-z_2-2g(z_1)+3g(z_2) \tag{12}$$

式中 $g(u)=u/(1+|u|)$**为**C^1**类单调递增函数。这是一个**Hopfield**神经网络，其中**$\boldsymbol{A}(0,0)$**和**$\boldsymbol{B}(4,-4)$**是它的两个孤立平衡点。**

1) **平衡点**$A(0,0)$**的特性**

取子系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t}=4g(z_1) & (13)\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t}=3g(z_2) & (14)\end{cases}$$

选取v_i**为**

$$\begin{cases}v_i=-(1/2)z_i^2\\ Dv_{1(13)}=-4z_1g(z_1) & i=1,2\\ Dv_{2(14)}=-3z_2g(z_2)\end{cases}$$

在系统不稳定的判定方法条件(1)**中**, $d_1=-4$, $d_2=-3$，**选取**$y_{i3}=|z_i|$, $y_{i4}=|g(z_i)|$，$i=1, 2$, **条件** 2)**可化为**

$$\begin{cases}z_1(-z_1)\le |z_1|a_{11}|g(z_1)|\\ z_1(-1)g(z_2)\le |z_1|a_{12}|g(z_2)|\\ z_2(-2)g(z_1)\le |z_2|a_{21}|g(z_1)|\\ z_2(-z_2)\le |z_2|a_{22}|g(z_2)|\end{cases}$$

当$a_{12}=1$, $a_{21}=2$, $a_{11}=a_{22}=-1$**时，以上**4**个不等式成立，且检验矩阵**

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-(-4-1) & -1\\ -2 & -(-3-1)\end{pmatrix}$$

是M-**矩阵，满足系统不稳定的判定方法条件，所以平衡点**$A(0,0)$**是完全不稳定的。**

2) **平衡点**$\boldsymbol{B}(4,-4)$**的特性**

令$x_1=z_1-4$, $x_2=z_2+4$, **把式**(11)，(12)**的坐标原点平移到平衡点**$\boldsymbol{B}(4,-4)$**上**

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-x_1+4g(x_1+4)-4g(4)-g(x_2-4)+g(-4) & (15)\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-x_2-2g(x_1+4)+2g(4)+3g(x_2-4)-3g(-4) & (16)\end{cases}$$

取子系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=4g(x_1+4)-4g(4) & (17)\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=3g(x_2-4)-3g(-4) & (18)\end{cases}$$

并取Lyapunov**函数为**

$$v_i=-x_i^2/2 \qquad i=1,2$$

于是

$$\begin{cases}Dv_{1(17)}=4x_1[g(x_1+4)-g(4)]\\ Dv_{2(18)}=3x_2[g(x_2-4)-3g(-4)]\end{cases}$$

取$y_{i3}=|x_i|$, $i=1,2$, $y_{14}=|g(x_i+4)-g(4)|$, $y_{24}=|g(x_2-4)-g(-4)|$, **系统稳定判定方法中的条件**2)**转换为**

$$\begin{cases} x_1(-x_1) \le |x_1||a_{11}||g(x_1+4)-g(4)| & (19) \\ x_1[-g(x_2-4)+g(-4)] \le |x_1||a_{12}||g(x_2-4)-g(-4)| & (20) \\ x_2(-x_2) \le |x_2||a_{22}||g(x_2-4)-g(4)| & (21) \\ x_2[-2g(x_1+4)+2g(4)] \le |x_2||a_{21}||g(x_1+4)-g(4)| & (22) \end{cases}$$

如取$a_{12}=1$，$a_{21}=2$，对于$x_1,x_2 \in (-\infty,+\infty)$，式(20)、(22)成立。如$a_{11}=a_{22}=-5$，则式(19)、(21)分别在区间$(-4，+\infty)$,$(-\infty，+4)$内成立，并且在此区间内检验矩阵$\boldsymbol{D}$是M-矩阵。由系统稳定的判定方法可知，系统(11)、(12)的平衡点$B(4，-4)$是渐进稳定的，且$r_1=r_2=4$。

4 结 束 语

系统稳定和不稳定的判定方法优于文献[1,7,8]。在文献[7]中，假设$y_{i3}(x_i)=y_{i4}(x_i)$是利用各子系统的特性来限制互联耦合的强度$|g_i(x,t)|$，这与大系统理论把子系统与互联结构分别考虑的观点相悖。文献[1,8]中取$y_{i3}=y_{i4}=|x_i|$,互联耦合，g_i受状态变量x_i的约束，即用直线来限制非线性的耦合强度$|g_i(x,t)|$。由于在实际系统中，通常可以在平衡点附近把非线性函数线性化，所以用直线来限制耦合强度对平衡点定性性质的判断没有影响。本文所述的判定方法对y_{i3}，y_{i4}没有限制，因而在实际应用中更灵活、更方便。

参 考 文 献

1 Michel A N, Farrell J A, Porad W. Qualitative analysis of neural networks. IEEE Trans. CAS, 1989,36(2): 229-243

2 Li J H, Michel A N, Porad W. Qualitative analysis and synthesis of a class neural networks. IEEE Trans. CAS, 1988, 35(8): 976-985

3 Equilibrium characterization of dynamical neural networks and a systematic synthesis procedure for associative memories. IEEE Trans. neural networks, 1991, 2(5): 509-521

4 程云鹏. 矩阵论. 西安: 西北工业大学出版社, 1989

5 钟守铭, 李正良. 通有连续神经网络的稳定性. 电子科技大学学报, 1996, 25(1): 92-97

6 朱文莉. 一类具有时滞的神经网络的稳定性分析. 电子科技大学学报, 2000, 29(5): 556-559

7 Michel A N, Miller P K著. 大规模动态系统定性分析. 郑硬平译. 沈阳：辽宁科技出版社，1985

·简 讯·

2000年《电子科技大学学报》论文“被引频次”、“影响因子”排名

据中国科学引文数据库近期公布的2000年中国科技期刊论文统计与排序中，本刊的“被引频次”为210，在全国科技期刊中排第206名；“影响因子”为0.232 1，在全国科技期刊中排第225名。

·卞 宣·