分布时滞Hopfield神经网络稳定性

徐　军，钟守铭，张春凤

(电子科技大学应用数学学院　成都　610054)

【摘要】针对分布时滞的Hopfield型神经网络构造了李雅普诺夫能量函数，证明了该网络的稳定性问题。证明过程中运用了引理的结论，充分利用了所取李雅普诺夫函数的特殊性，较多地运用了不等式分析方法及不等式放缩技巧。同时由于时滞的存在，证明过程中还涉及李雅普诺夫泛函问题。最后利用引理的结论得出了该网络全局一致渐近稳定的结论。

关 键 词　神经网络；　分布时滞；　李雅普诺夫能量函数；　李雅普诺夫泛函；　全局一致渐近稳定

中图分类号　TP18；　O175.13　　　**文献标识码**　A

Stability of Hopfield Type Neural Network with Distributed Time Delay

Xu Jun，Zhong Shouming，Zhang Chunfeng

(School of Applied Mathmatics, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract　In this paper, Lyapunov energy function is constructed according to the Hopfield type neural network with infinite time delay. The stability of the network is proved using the Lyap-unov energy function. In the course of proving, the conclusion of lemma and the particularity of the function that is gotten is fully utilized . Some inequality analysis methods and inequality enlarg-ing and narrowing techniques are used. The Lyapunov functional is also invoved because of the existence of time delay.In the end, the conclusion of global consistent asymptotic stability for the network is drawn from the lemma.

Key words　neural network;　distributed time delay;　lyapunov energy function;　lyapunov functional;　global consistent asymptotic stability

Hopfield神经网络自1982年由美国生物化学家J.J.Hopfield提出以来，引起了神经网络研究的革命。Hopfield神经网络之所以引起各学科众多学者的研究与关注，其中一个重要原因是其具有广泛的理论研究与应用价值，它可用于并行算法，解决模式识别问题，优化问题及联想记忆问题。但通常在构造网络时产生的两个问题是：对于联想与记忆问题关键是存在唯一平衡点，对于回想与优化问题则要求网络局部或全局稳定，以保证解的收敛性。本文将在假设存在唯一平衡点的条件下，通过构造李雅普诺夫能量函数来证明网络是全局一致渐近稳定的。Hopfield所提出的初始网络并没有考虑网络的时滞问题，在实际的网络中时滞是必然存在而且是不可避免的。因为从神经网络自身来讲，神经元之间通讯存在延迟，从网络的硬件实现考虑存在开关延迟和通讯延迟。并且网络延迟的存在是导致网络不稳定的关键因素之一。因此，研究有延迟的神经网络的动力学行为显得尤为重要。具有时滞网络是目前研究的热点，文献[1,3～5]研究了时滞Hopfield神经网络。文献[1]对有时滞Hopfield网络进行了具体的讨论，其中也涉及本文所讨论的网络，但它所构造的李雅普诺夫函数较复杂，而且证明过程也不够严密。本文所取李雅普诺夫函数较简单，给出了详细的证明过程，得出了全局一致渐近稳定更强的结论。文献[2]证明了有时滞的并联大系统的稳定性问题，

收稿日期：2002-12-04
基金项目：国家自然科学基金资助项目(90208003)
作者简介：徐　军(1972—)，男，硕士生，主要从事神经网络方面的研究.

取得了优秀的成果，证明过程采用了引理的结论，本文也将采用类似的引理来证明本文的结论。

具有时滞的连续型Hopfield神经网络具有多种形式，本文是其中常见的一种。具有分布时滞Hopfield型神经网络系统可用如下模型来描述

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-c_i x_i+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}f_j\left(\int_{-\infty}^{t}k_j(t-s)x_j(s)\mathrm{d}s\right)+I_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

式中　T_{ij} 为网络的连接权强度，$c_i>0$ 为常数，$k_{ij}(s)$ 是非负连续函数且 $\int_0^{\infty}k_{ij}(s)\mathrm{d}s=1 \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$

系统(1)的初始条件为：$x_i(t)=f_i(t) \quad t\le 0$，$f_i$ 有界并且在 $(-\infty,0]$ 连续。且 $\|f\|=\sum_{i=1}^{n}\sup_{-\infty\le t\le t_0}|f_i(t)|$，对函数 $f_j(x_j)$ 存在正常数 L_j，$\forall x,x^*\in R$，有 $\left|f_j(x)-f_j(x^*)\right|\le L_j\left|x-x^*\right| \quad (j=1,2,\cdots,n)$

引理　设 $P(t)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上非负函数，并且在 $[t_0,+\infty)$ 上满足不等式

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\le -rP(t)+l\int_{-\infty}^{t}k(t-s)P(s)\mathrm{d}s \tag{2}$$

式中　$t_0\ge 0$，$k(s)\ge 0$ 连续并且满足 $\int_0^{\infty}k(s)\mathrm{d}s=1$，若 $-r+l<0$ 时，有

$$P(t)\le P_{t_0}=\sup_{-\infty<q\le 0}P(t_0+q) \tag{3}$$

且

$$\lim_{t\to\infty}P(t)=0 \tag{4}$$

证明　为了证明 $P(t)\le P_{t_0}$，选取 $d>1$，先证

$$P(t)<\mathrm{d}P_{t_0} \qquad (\forall t\ge t_0) \tag{5}$$

反证若式(5)不成立，因为当 $t\in(-\infty,t_0]$ 时，有 $P(t)\le\sup_{-\infty<q\le 0}P(t_0+q)=P_{t_0}$。若 $P_{t_0}=0$，显然有 $P(t)\equiv 0$，故假设 $P_{t_0}>0$，于是当 $t\le t_0$ 时，有 $P(t)\le P_{t_0}<\mathrm{d}P_{t_0}$。因此必有 $t_1>t_0$，使得

$$P(t_1)=\mathrm{d}P_{t_0} \qquad P(t)<\mathrm{d}P_{t_0} \qquad (t<t_1) \tag{6}$$

于是有 $\mathrm{d}P(t_1)/\mathrm{d}t\ge 0$，又由式(2)有 $\frac{\mathrm{d}P(t_1)}{\mathrm{d}t}\le -rP(t_1)+l\int_{-\infty}^{t_1}k(t_1-s)P(s)\mathrm{d}s\le -r\mathrm{d}P_{t_0}+l\int_{-\infty}^{t_1}k(t_1-s)\mathrm{d}P_{t_0}\mathrm{d}s=\left[-r+l\int_0^{+\infty}k(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}P_{t_0}=(-r+l)\mathrm{d}P_{t_0}<0$

矛盾，故式(5)成立。当 $d\to 1$ 时可知式(3)成立。

由于 $P(t)$ 有界，故当 $t\to+\infty$ 时 $P(t)$ 的上极限存在，记为 a，即 $\overline{\lim_{t\to+\infty}}P(t)=a$，于是由已知条件可知 $a\ge 0$，现证 $a=0$ 否则 $a>0$，根据上极限的性质：$\forall e>0$，$\exists T_1\ge t_0$ 当 $t\ge T_1$ 时，有 $P(t)<a+e$。另外，由 $\int_0^{+\infty}k(s)\mathrm{d}s=1$ 可知，$\exists T_2\ge t_0$，当 $t\ge T_2$ 时，有 $\int_t^{+\infty}k(s)\mathrm{d}s<e$，于是当 $t\ge T=\max(T_1,T_2)$ 时，由式(2)有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}&\le -rP(t)+l\int_{-\infty}^{t}k(t-s)P(s)\mathrm{d}s=-rP(t)+l\int_{-\infty}^{t-T}k(t-s)P(s)\mathrm{d}s+l\int_{t-T}^{t}k(t-s)P(s)\mathrm{d}s\le\\&-rP(t)+lP_{t_0}\int_{-\infty}^{t-T}k(t-s)\mathrm{d}s+l(a+e)\int_{t-T}^{t}k(t-s)\mathrm{d}s=\\&-rP(t)+lP_{t_0}\int_{T}^{+\infty}k(t)\mathrm{d}t+l(a+e)\int_0^{T}k(t)\mathrm{d}t\le\\&-rP(t)+lP_{t_0}e+l(a+e)\int_0^{+\infty}k(t)\mathrm{d}t=-rP(t)+lP_{t_0}e+l(a+e)\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}+rp(t)\le lP_{t_0}e+l(a+e)$$

两边同乘以 e^{rt} 有

$$e^{rt}\left[\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}+rp(t)\right]=\frac{\mathrm{d}(Pe^{rt})}{\mathrm{d}t}\le e^{rt}\left[lP_{t_0}e+l(a+e)\right]$$

上式两边取积分有
$$P(t)e^{rt}-P(T)e^{rT}\le\left[lP_{t_0}e+l(a+e)\right]\frac{e^{rt}-e^{rT}}{r}$$

故
$$P(t)\le P(T)e^{-r(t-T)}+\frac{1}{r}\left[lP_{t_0}e+l(a+e)\right]$$

在上式两端令 $t\to+\infty$ 并取上极限有
$$a\le\frac{1}{r}\left(lP_{t_0}e+la+le\right)$$

对上式再令 $e\to 0$ 有 $a\le\dfrac{la}{r}$，即 $(-r+l)a\ge 0$。

注意到 $a>0$ 可得 $-r+l\ge 0$ 与已知矛盾。故 $a=0$，从而结论成立。

为叙述方便分别引入以下记号：
$$\max_{1\le i,j\le n}k_{ij}(t-s)=k(t-s)\qquad\int_0^{+\infty}k(s)\mathrm{d}s=l\qquad T=l\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}T_{ij}L_j\left|j_i\left(y_i(t)\right)\right|$$
$$Q=\min_{1\le i\le n}\frac{\min\left(a_i,b_i\right)c_i}{\max\left(a_i,b_i\right)}\qquad R=\frac{T}{\min\limits_{1\le j\le n}\left(a_j,b_j\right)}$$

定理 对于系统(1)如果满足以下条件：

1) 存在一组函数 $j_i(y_i)$ 满足，
$$j_i(y_i)=\begin{cases}a_i & y_i\ge 0\\ -b_i & y_i<0\end{cases}$$

式中 $a_i,b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为正常数。

2) $-Q+R<0$ 成立。

则系统(1)的零点是全局一致渐近稳定的。

证明 设 $x^*=\left(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\right)^T$ 是系统的平衡点，令 $y_i=x_i-x_i^*$，其中 $y=\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)^T$

则
$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}x_i^*}{\mathrm{d}t}=-c_i\left(x_i-x_i^*\right)+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}\left[f_j\left(\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)x_j(s)\mathrm{d}s\right)-f_j\left(\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)x_j^*(s)\mathrm{d}s\right)\right]$$

令
$$g_j\left(y_j(t)\right)=\left[f_j\left(\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)x_j(s)\mathrm{d}s\right)-f_j\left(\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)x_j^*(s)\mathrm{d}s\right)\right]$$

由已知条件有
$$\left|f_j\left(\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)x_j(s)\mathrm{d}s\right)-f_j\left(\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)x_j^*(s)\mathrm{d}s\right)\right|\le L_j\left|\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)[x_j(s)-x_j^*(s)]\mathrm{d}s\right|=L_j\left|\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)y_j(s)\mathrm{d}s\right|$$

故
$$\left|g_i\left(y_j(t)\right)\right|\le L_j\left|\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)y_j(s)\mathrm{d}s\right| \tag{7}$$

现取Lyapunov函数 $V\left(y(t)\right)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{y_i(t)}j_i(u)\mathrm{d}u$，对Lyapunov函数沿系统(1)求右上Dini导数可得
$$D^+V\big|_{(1)}=\sum_{i=1}^{n}j_i(y_i)\frac{\mathrm{d}y_i(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}j_i\left(y_i(t)\right)\left[-c_iy_i(t)+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}g_j\left(y_j(t)\right)\right]$$

又由式(7)可得
$$D^+V\big|_{(1)}\le\sum_{i=1}^{n}\left|j_i\left(y_i(t)\right)\right|\left[-c_i\left|y_i(t)\right|+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}L_j\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)\left|y_j(s)\right|\mathrm{d}s\right]=$$
$$-\sum_{i=1}^{n}c_ij_i\left(y_i(t)\right)y_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}L_j\left|j_i\left(y_i(t)\right)\right|\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)\left|y_j(s)\right|\mathrm{d}s$$

由于 $\int_0^{+\infty}k_{ij}(s)\mathrm{d}s=1$，所以 $\int_0^{+\infty}k(s)\mathrm{d}s$ 收敛且有 $\int_0^{+\infty}k(s)\mathrm{d}s=l$，故可得
$$D^+V\big|_{(1)}\le-\sum_{i=1}^{n}c_ij_i\left(y_i(t)\right)y_i(t)+\frac{T}{l}\int_{-\infty}^{t}k_{ij}\sum_{j=1}^{n}k(t-s)\left|y_j(s)\right|\mathrm{d}s \tag{8}$$

现对式(8)右端分项考虑，注意到

$$\min(a_i,b_i)\le\left|j_i(y_i(t))\right|\le\max(a_i,b_i)$$

$$\min(a_i,b_i)\left|y_i(t)\right|\le\int_0^{y_i(t)}j_i(u)\mathrm{d}u\le\max(a_i,b_i)\left|y_i(t)\right|$$

首先考虑第一项

$$-\sum_{i=1}^{n}c_i j_i(y_i(t))y_i(t)\le-\sum_{i=1}^{n}\left|j_i(y_i(t))\right|\frac{c_i}{\max(a_i,b_i)}\int_0^{y_i(t)}j_i(u)\mathrm{d}u\le-\sum_{i=1}^{n}\frac{\min(a_i,b_i)}{\max(a_i,b_i)}c_i\int_0^{y_i(t)}j_i(u)\mathrm{d}u$$

则有
$$-\sum_{i=1}^{n}c_i j_i(y_i(t))y_i(t)\le-Q\sum_{i=1}^{n}\int_0^{y_i(t)}j_i(u)\mathrm{d}u=-QV(t)$$

其次考虑第二项

$$\frac{T}{l}\int_{-\infty}^{t}\sum_{j=1}^{n}k(t-s)\left|y_j(s)\right|\mathrm{d}s\le\int_{-\infty}^{t}\frac{T}{l\min(a_j,b_j)}k(t-s)V(s)\mathrm{d}s=\frac{T}{l\min(a_j,b_j)}\int_{-\infty}^{t}k(t-s)V(s)\mathrm{d}s$$

则有
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}L_j\left|j_i(y_i(t))\right|\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)\left|y_j(s)\right|\mathrm{d}s\le\int_{-\infty}^{t}\frac{T}{l\min\limits_{1\le j\le n}(a_j,b_j)}k(t-s)V(s)\,\mathrm{d}s=R\int_{-\infty}^{t}\frac{k(t-s)}{l}V(s)\,\mathrm{d}s$$

综上可得
$$D^{+}V\big|_{(1)}\le-QV(t)+R\int_{-\infty}^{t}\frac{k(t-s)}{l}V(s)\mathrm{d}s$$

由于已知 $-Q+R<0$ 成立，并注意到 $\int_0^{+\infty}\frac{k(s)}{l}\mathrm{d}s=1$ 故可知引理的条件成立，根据引理可知

$$V(y(t))\le V(y(t_0))\le\max_{1\le i\le n}(a_i,b_i)\left\|y(t)\right\|=\max_{1\le i\le n}(a_i,b_i)\left\|f-x^*\right\|\text{ 以及 }\lim_{t\to\infty}V(t)=0$$

于是由
$$\left|y_i(t)\right|\le\frac{1}{\min(a_i,b_i)}\int_0^{y_i(t)}j_i(u)\mathrm{d}u$$

可得
$$\left\|y(t)\right\|=\sum_{i=1}^{n}\left|y_i(t)\right|\le\frac{1}{\min\limits_{1\le i\le n}(a_i,b_i)}V(y(t))\le\frac{\max\limits_{1\le i\le n}(a_i,b_i)}{\min\limits_{1\le i\le n}(a_i,b_i)}\left\|f-x^*\right\|$$

从而可知系统(1)的平凡解一致稳定。

又由于
$$\lim_{t\to\infty}\left\|y(t)\right\|\le\lim_{t\to\infty}\frac{V(y(t))}{\min\limits_{1\le i\le n}(a_i,b_i)}=0$$

易知系统(1)的平凡解一致吸引，所以系统(1)平凡解全局一致渐近稳定。

证毕

参 考 文 献

[1] K.Gopalsamy,Xue-ZhongHe, Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays[J]. Physica D 1994,76:344-358

[2] 钟守铭. 具有不确定的时滞微分系统的稳定性[J]. 电子科技大学学报, 1996, 25(1):98-102

[3] Zhang Yi. Global exponential stability and periodic solutions of delay Hopfield neural networks[J]. International Journal of Systems Science, 1996, 27(2):227-231

[4] Zhang Yi, S. M Zhong, Z. L. Li. Periodic solutions and stability of Hopfield neural networks with variable delays[J]. International Journal of Systems Science, 1996, 27(9):895-901

[5] Marcus C M and Westervelt R M. Stability of analogy neural networks with delay[J]. Physical Review A 1989, 39(1): 347-359

编　辑　刘文珍