第 33 卷 第 3 期 电 子 科 技 大 学 学 报 Vol.33 No.3
2004 年 6 月 Journal of UEST of China Jun. 2004

r-循环矩阵求逆和广义逆的Euclid算法

江兆林[1]，刘三阳[2]

(1. 西安交通大学理学院 西安 710049; 2. 西安电子科技大学应用数学系 西安 710071)

【摘要】利用多项式的Euclid算法给出了非奇异的r-循环矩阵求逆矩阵的一个新算法, 该算法同时推广到用于求奇异r-循环矩阵的群逆和Moore-Penrose逆。最后给出了应用该算法的数值例子。

关 键 词 r-循环矩阵; 逆; 群逆; Moore-Penrose逆; 多项式环; Euclid算法

中图分类号 O151.21 文献标识码 A

Euclid Algorithm for Finding the Inverse and Generalized Inverse of r-Circulant Matrix

Jiang Zhaolin，Liu Sanyang

(1. School of Science, Xi' an Jiaotong University Xi' an 710049; 2. Department of Applied Mathematics, Xidian University Xi' an 710071)

Abstract A new algorithm for finding the inverse of a nonsingular r- circulant matrix is presented by the Euclid algorithm of polynomial. Extension is made to compute the group inverse and the Moore-Penrose inverse of a singular r- circulant matrix. Finally, numerical examples are given.

Key words r- circulant matrix; inverse; group inverse; Moore-Penrose inverse; polynomial ring; Euclid algorithm

在信号处理、数字图像处理、编码理论、自回归滤波器设计、计算机时序分析等领域中的许多问题都与周期性有关，从而导致一类特殊的矩阵r-循环矩阵。因此，对它的研究就引起了人们的高度重视。本文利用多项式的Euclid算法给出一般r-循环矩阵求逆和广义逆的一种快速算法。该算法有一个显著特点是用该快速算法求r-循环矩阵的逆阵时，无需预先得知该矩阵是否非奇异。

1 引 理

设$w=\exp(2\pi \mathrm{i}/n)$是$n$次本原单位根，则$w_i = dw^i, i=0,1,\cdots,n-1$是$x^n - r$的$n$个不同的根，其中$d=\sqrt[n]{|r|}$。

引理 1[1] 设$\boldsymbol{A}=\mathrm{circ}_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$是一个$r$-循环矩阵，则

1) $\boldsymbol{A}$是一个r-循环矩阵当且仅当$\boldsymbol{A}=f(\pi_r)$，其中$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i x^i$称为$\boldsymbol{A}$的伴随多项式；

2) $\boldsymbol{A}$是一个r-循环矩阵当且仅当$(\boldsymbol{LF})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{LF})$是对角矩阵，其中$L=\mathrm{diag}(1,d,d^2,\cdots,d^{n-1})$，$\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}(w^{(i-1)(j-1)})$是Fourier矩阵；

3) $\boldsymbol{A}$的特征值是$l_j = f(dw^j)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i(dw^j)^i$，$j=0,1,\cdots,n-1$；

4) 两个r-循环矩阵的乘积是一个r-循环矩阵；非奇异的r-循环矩阵的逆矩阵是r-循环矩阵，进一步地，

收稿日期：2002－09－26
基金项目：国家自然科学基金资助项目(69972036)；山东省中青年学术骨干基金资助项目(鲁教科字[2001]39号)
作者简介：江兆林(1963－)，男，博士后，教授，主要从事矩阵理论与矩阵计算方面的研究.

全体r-循环矩阵构成的集合关于矩阵的加法和乘法构成交换环；

引理 2[1]　设 $\boldsymbol{A}=\text{circ}_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$，是一个奇异的$r$-循环矩阵，则$\boldsymbol{A}$的群逆$\boldsymbol{A}^{\#}$就是$\boldsymbol{A}$的谱逆 $\boldsymbol{A}^s$ 且它们都是r-循环矩阵，不失一般性。

设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LF}\text{diag}(f(w_0),\ f(w_1),\cdots f(w_{m-1}),0,\cdots,0)(\boldsymbol{LF})^{-1}$，其中 $f(w_i)\neq 0, i=0,1,\cdots,m-1$，则 $\boldsymbol{A}^{\#}=\boldsymbol{A}^s=\boldsymbol{LF}\text{diag}(1/f(w_0),1/f(w_1),\cdots,1/f(w_{m-1}),0,\cdots,0)(\boldsymbol{LF})^{-1}$。进一步地，如果$|r|=1$，则$\boldsymbol{A}$的Moore-Penrose $\boldsymbol{A}^{+}$也是一个r-循环矩阵且 $\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{LF}\text{diag}(1/f(w_0),\ 1/f(w_1),\cdots,\ 1/f(w_{m-1}),0,\cdots,0)(\boldsymbol{LF})^{-1}$，其中 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{F}$ 同引理1所述。

引理 3[2]　设 n 阶r-循环矩阵 $\boldsymbol{A}=\text{circ}_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$，则$\boldsymbol{A}$非奇异的充要条件是 $(f(x),g(x))=1$，其中 $f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i$ 是$\boldsymbol{A}$的伴随多项式，$g(x)=x^n-r$。

引理 4[3]　设 $\boldsymbol{A}=\text{circ}_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 是一个r-循环矩阵，$\boldsymbol{B}=\text{scirc}_r(a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1,a_0)$ 是一个对称r-循环矩阵，则 $\boldsymbol{B}k=\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}k=\boldsymbol{A}k$。其中 $k=\text{scirc}_r(0,\cdots,0,1)$。

下面讨论多项式与r-循环矩阵之间的关系。

设 $P(x)$ 表示一元多项式环，CM_r 表示全体 n 阶r-循环矩阵构成的集合。对于 $P(x)$ 中的所有 $f(x)$，用 deg($f(x)$)表示 $f(x)$ 的次数。设 $P_{n-1}(x)$ 表示商环 $P(x)/<x^n-r>$，其中 $<x^n-r>$ 是一个理想。定义映射 j：$j(\boldsymbol{A})=f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i$，其中 $\boldsymbol{A}=\text{circ}_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$。则易证 j 是 CM_r 到 $P(x)$ 的满环同态。由同态基本定理可知r-循环矩阵环与多项式商环 $P_{n-1}(x)$ 是同构的。于是，如果 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的，则 j 映射r-循环矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆到 $\boldsymbol{A}$ 的伴随多项式 $f(x)$ 的逆。

2　主要结果

定理 1　设 $\boldsymbol{A}=\text{circ}_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 是一个非奇异的r-循环矩阵，$\boldsymbol{A}$的伴随多项式 $f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i$，则存在多项式 $u(x)=\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i$ 满足 $u(w_i)=1/f(w_i)$ 其中 w_i 是 $g(x)$ 的根，$i=0,1,\cdots,n-1$，$g(x)=x^n-r$，并且$\boldsymbol{A}$的逆矩阵是 $\boldsymbol{B}=\text{circ}_r(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})$。

证明　由于$\boldsymbol{A}$是一个非奇异的r-循环矩阵，由引理3，可知 $(f(x),g(x))=1$。于是存在 $u'(x)$ 和 $v(x)$ 满足 $f(x)u'(x)+g(x)v(x)=1$。当 $x=w_i$，$i=0,1,\cdots,n-1$ 时，$g(x)=0$，$f(w_i)u'(w_i)=1$，令 $u(x)=u'(x)\ \text{mod}\ (x^n-r)$。则 $\deg(u(x))<n$。因为 $w_i^n-r=0$，并且 $u(w_i)=u'(w_i)$，$i=0,1,\cdots,n-1$。所以定理1中 $u(x)$ 的存在性已经得证。

又因为

$$\boldsymbol{B}=\text{circ}_r(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})=\boldsymbol{LF}\text{diag}(u(w_0),\ u(w_1),\ \cdots,\ u(w_{n-1}))(\boldsymbol{LF})^{-1}=$$
$$\boldsymbol{LF}\text{diag}(1/f(w_0),\ 1/f(w_1),\ \cdots,\ 1/f(w_{n-1}))(\boldsymbol{LF})^{-1}$$

故 $\boldsymbol{BA}=I$。因此，$u(x)$ 是 $f(x)$ 在商环 $P_{n-1}(x)$ 中的逆。多项式 $u'(x)$ 可以用Euclid算法求得。这就是该算法的主要想法。为了简化计算，不妨设 $f(x)$ 的首项系数是 a 且 $a\neq 0$，令 $f'(x)=f(x)/a$。则 $f(x)=af'(x)$，$f'(x)$ 的首项系数为1。

定理 2　设 $\boldsymbol{A}=\text{circ}_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 是一个奇异的r-循环矩阵，$\boldsymbol{A}$的伴随多项式 $f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i$。假设$\boldsymbol{A}$有$m$个非零特征值，不失一般性，设 $f(w_i)=0$，$i=m,m+1,\cdots,n-1$，其中 w_i 是 $g(x)$ 的根，$i=0,1,\cdots,n-1$，$g(x)=x^n-r$。令 $g_1(x)=\prod_{i=0}^{m-1}(x-w_i)$，$g_2(x)=\prod_{i=0}^{n-1}(x-w_i)$，$f_1(x)=f(x)g_2(x)$，则存在一个多项式 $u_1(x)=\sum_{i=0}^{m-1}b_i'x^i$ 满足 $u_1(w_i)=1/f_1(w_i),\ i=0,1,\cdots,m-1$。

令　$u(x)=u_1(x)g_2(x)=\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i$，则 $\boldsymbol{B}=\text{circ}_r(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})$ 是$\boldsymbol{A}$的群逆$\boldsymbol{A}^{\#}$。进一步地，如果$|r|=1$，则$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}$的Moore-Penrose逆。

证明　由于 $x^n-r=\prod_{i=0}^{n-1}(x-w_i)$，所以 $(g_1(x),g_2(x))=1$。由定理2的条件可知 $(g_1(x),f(x))=1$。于是

$(f_1(x), g_1(x)) = 1$。因此，存在$u_2(x)$和$v(x)$满足$f_1(x)u_2(x) + g_1(x)v(x) = 1$。

当$x = w_i, i = 0,1,\cdots,m-1$时，$g_1(x) = 0$，所以$f_1(w_i)u_2(w_i) = 1$。

令 $u_1(x) = u_2(x) \bmod (g_1(x))$，所以定理2中的$u_1(x)$的存在性已经得证。

因为$u(x) = u_1(x)g_2(x)$，当$i = m, m+1, \cdots, n-1$时，$u(w_i) = 0$；当$i = 0,1,\cdots,m-1$时，$u(w_i) = u_1(w_i)g_2(w_i) = g_2(w_i)/f_1(w_i) = 1/f(w_i)$，并且

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{circ}_r(b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}) = \boldsymbol{LF}\mathrm{diag}(u(w_0), u(w_1), \cdots, u(w_{n-1}))(\boldsymbol{LF})^{-1} = \boldsymbol{LF}\mathrm{diag}(1/f(w_0), 1/f(w_1), \cdots, 1/f(w_{m-1}), 0, \cdots, 0)(\boldsymbol{LF})^{-1}$$

由引理2知，$\boldsymbol{B} = \mathrm{circ}_r(b_0, b_1, \cdots, b_{n-1})$是$\boldsymbol{A}$的群逆$\boldsymbol{A}^{\#}$。进一步地，如果$|r|=1$，则$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}$的Moore-Penrose逆。

定理2得知，求r-循环矩阵$\boldsymbol{A}$的群逆$\boldsymbol{A}^{\#}$或者Moore-Penrose逆$\boldsymbol{A}^{+}$，只需在商环$P_{n-1}(x)/[g_1(x)]$中求$f(x)g_2(x)$的逆即可。这就是求r-循环矩阵的群逆和Moore-Penrose逆的主要想法。同时可知，$g_2(x)$是$f(x)$和$g(x)$的最大公因式。如果计算得到$\deg(f_1(x)) > \deg(g_1(x))$，就可以做多项式除法$f_1(x) = g_1(x)s(x) + f_{12}(x)$。由于$f_{12}(w_i) = f_1(w_i)$，$i = 0,1,\cdots,m-1$，此时$f_1(x)$可以用$f_{12}(x)$代替。

3 r-循环矩阵求逆的算法

由定理1和定理2可知，r-循环矩阵的求逆问题，可转化为：已知$f(x), g(x)$求$u(x), v(x)$使得$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$。由Euclid算法可得$g(x) = q_0(x)f(x) + r_1(x)$，$f(x) = q_1(x)r_1(x) + r_2(x)$，$r_1(x) = q_2(x)r_2(x) + r_3(x)$，…，$r_{i-1}(x) = q_i(x)r_i(x) + r_{i+1}(x)$。

设 $v_1(x) = 1, u_1(x) = -q_0(x)$，则$r_1(x) = f(x)u_1(x) + g(x)v_1(x)$。显然

$$r_2(x) = f(x) - q_1(x)[g(x) - q_0(x)f(x)] = [1 + q_0(x)q_1(x)]f(x) - g(x)q_1(x)$$

设 $v_2(x) = -q_1(x), u_2(x) = 1 + q_0(x)q_1(x)$，可得$r_2(x) = f(x)u_2(x) + g(x)v_2(x)$，假设$r_j(x) = f(x)u_j(x) + g(x)v_j(x)$。并且当$j = 0,1,\cdots,i$时，$v_j(x), u_j(x)$由计算已得到。则

$$r_{i+1}(x) = r_{i-1}(x) - q_i(x)r_i(x) = f(x)u_{i-1}(x) + g(x)v_{i-1}(x) - q_i(x)[f(x)u_i(x) + g(x)v_i(x)] = f(x)[u_{i-1}(x) - q_i(x)u_i(x)] + g(x)[v_{i-1}(x) - q_i(x)v_i(x)]$$

设$r_{i+1}(x) = f(x)u_{i+1}(x) + g(x)v_{i+1}(x)$，则

$$u_{i+1}(x) = u_{i-1}(x) - q_i(x)u_i(x)$$

至此，就可得到求$u_i(x)$的递推公式。于是，求$u(x)$就变为计算多项式序列

$$q_0(x), r_1(x),\ u_1(x), q_1(x),\ r_2(x),\ u_2(x), \cdots, q_i(x),\ r_{i+1}(x), u_{i+1}(x), \cdots$$

式中 如果r_{j+1}为常数，则$u(x) = u_{j+1}(x)/r_{j+1}(x)$。可以改进这个算法。如果多项式的除法变为

$$r_{i-1}(x) = q_i(x)r_i(x) + c_{i+1}r_{i+1}(x)$$

式中 c_{i+1}为一个非零常数, 则递推公式改进为

$$u_{i+1}(x) = (u_{i-1}(x) - q_i(x)u_i(x))/c_{i+1}$$

因此，可以选择适当的c_i使$r_i(x)$的系数等于1。

设 $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$，$g(x) = x^n - r$，令$r_{-1}(x) = g(x), r_0(x) = f(x), u_{-1}(x) = 0, u_0(x) = 1$

$$\text{do}\ \begin{cases} r_{i-1}(x) = q_i(x)r_i(x) + r_{i+1}(x) \\ (\text{let } c_{i+1} \text{ be the leading coefficient of } r_{i+1}(x)) \\ r_{i+1}(x) \leftarrow r_{i+1}(x)/c_{i+1} \\ u_{i+1}(x) \leftarrow [u_{i-1}(x) - q_i(x)u_i(x)]/c_{i+1} \qquad i = 0,1,\cdots \end{cases} \tag{1}$$

直到$r_m(x) = 1$或者$r_m(x) = 0$。如果$r_m(x) = 1$，则$u_m(x)$是$\boldsymbol{B}$的伴随多项式。$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}$的逆。如果$r_m(x) = 0$，则$r_{m-1}(x)$是$f(x)$和$g(x)$的最大公因式。

令 $r(x)=r_{m-1}(x)$，$r_{-1}(x)=g(x)/r_{m-1}(x), r_0(x)=f(x)r_{m-1}(x)\bmod(r_{-1}(x))$，代入式(1)，直到出现 $r_m(x)=1$，则 $u_m(x)r(x)\bmod(g(x))$ 是B的伴随多项式。B是A的群逆。进一步地，如果$|r|=1$，则B是A的Moore-Penrose逆。

注：由引理4可知，式(1)也可用于求对称r-循环矩阵的逆。

4　数值例子

例　设 $\boldsymbol{A}=\text{circ}_{16}(-4,-4,1,1)$，判断$A$的奇异性，若$A$是奇异的，求$A^{\#}$。

解　A的伴随多项式 $f(x)=-4-4x+x^2+x^3$，令 $r'_{-1}(x)=g(x)=x^4-16$，$r'_0(x)=f(x)=x^3+x^2-4x-4$。由算法1计算得：$q'_0(x)=x-1, r'_1(x)=x^2-4, c'_1=5$，$q'_1(x)=x+1, r'_2(x)=0$，由于$r'_2(x)=0$，所以$A$是奇异的。令 $r(x)=r'_1(x)=x^2-4$，$r_{-1}(x)=g(x)/(x^2-4)=x^2+4$，$r_0(x)=f(x)(x^2-4)\bmod(x^2+4)=64x+64$，$u_{-1}(x)=0, u_0(x)=1$。

又由式(1)可求得

$$q_0(x)=\frac{1}{64}x-\frac{1}{64}, r_1(x)=1, c_1=5, u_1(x)=-\frac{1}{320}x+\frac{1}{320}$$

因为 $r_1(x)=1$，所以 $u_1(x)r(x)=-\frac{4}{320}+\frac{4}{320}x+\frac{1}{320}x^2-\frac{1}{320}x^3$ 是$A^{\#}$的伴随多项式，因此

$$\boldsymbol{A}^{\#}=\text{circ}_{16}\left(-\frac{4}{320},\frac{4}{320},\frac{1}{320},-\frac{1}{320}\right)$$

参 考 文 献

[1] Cline R E. Generalized inverses of certain Toeplitz matrices[J]. Linear Algebra and Its Appl., 1974, 8: 25-33

[2] 江兆林, 周章鑫. 关于r-循环矩阵的非异性[J]. 高校应用数学学报, 1995, 10(2): 222-226

[3] 江兆林, 周章鑫. 循环矩阵[M]. 成都: 成都科技大学出版社, 1999

编　辑　刘文珍

(上接第 311 页)

表 3　液体环境样品中铊的测定

样品(火力发电厂废水)	Tl 测定结果/μg・ml^{-1}	
	本方法	原子吸收光谱法
1 号	$8.57\times10^{-2}\pm0.000\,2$	$8.53\times10^{-2}\pm0.000\,3$
2 号	$5.14\times10^{-2}\pm0.000\,3$	$5.13\times10^{-2}\pm0.000\,4$

参 考 文 献

[1] 李德先, 高振敏, 朱咏喧. 环境介质中铊的分布及其分析测试方法[J]. 地质通报, 2002, 21(10): 682-688

[2] 吴亚英, 陶大钧. 阳极溶出伏安法测定地面水中的铊[J]. 环境监测管理与技术, 1998, 10(4): 30-32

[3] Aleksander C. Determination of thallic and thallous ions by differential pulse anodic–stripping voltammetry without preliminary separation[J]. Talanta, 1990, 37(10): 995-999

编　辑　刘文珍