第 33 卷 第 4 期 电 子 科 技 大 学 学 报 Vol.33 No.4
2004 年 8 月 Journal of UEST of China Aug. 2004

数字分数微分器系数的快速算法

滕旭东，袁 晓，赵元英，魏永豪
(四川大学电子信息学院 成都 610064)

【摘要】提出了一种理想数字分数微分器系数的快速算法。从理想数字分数微分器系数计算公式的特点考虑，利用变量代换把积分函数中的振荡因子转换成积分上限，避免高阶振荡函数积分计算，给出了计算分数微分器系数的递推公式。分析了快速算法的计算复杂度、稳定性和收敛性等问题。实验结果表明新算法具有运算量少，运算速度快并具有较好的稳定性和收敛性。

关 键 词 分数微分器; 振荡因子; 快速算法; 稳定性
中图分类号 TN713.7 文献标识码 A

Fast Algorithm for Coefficients of Digital Fractional Differentiator

Teng Xudong，Yuan Xiao，Zhao Yuanying，Wei Yonghao
(College of Electronic and Information, Sichuan Univ Chengdu 610064)

Abstract A new fast algorithm for calculating the coefficients of ideal digital fractional differentiator is presented. It is difficult to compute directly the coefficients from the integral formula, since the integral function in the formula of the ideal digital fractional differentiator is a high-order oscillating function. Based on the properties of the integral formula, it's easy to convert the oscillating factor to the integral upper limit. Therefore a set of recursive expressions for calculating coefficients of ideal digital fractional differentiator are introduced in this paper. The experimental result shows that the new algorithm decreases the amount of operation greatly, at the same time promotes the algorithm's efficiency as well as avoid integral of high-order oscillating function.

Key words digital fractional differentiator; oscillating factor; fast algorithm; stability

微分运算是一种基本的数学运算，在信号分析与处理等领域中对信号的奇异性检测以及特征提取方面具有特殊的作用。文献[1]从分析微分运算的频域形式出发，与子波变换特征进行比照研究，从而将整数阶微分拓展到分数阶微分并给出了分数微分运算在时域的卷积形式以及微分运算与子波变换之间的内在联系。该文仅从理论上探讨了分数微分运算的连续形式，在计算上是不容易的，从工程技术角度来考虑，除整数阶微分运算外，无论用模拟的无源器件还是用有源器件实现分数微分运算系统是很困难的，甚至是不可能的。因此实现分数微分运算的一种很自然的考虑就是使用数字方法来实现。这就引出数字分数微分器的问题。

本文首先介绍理想数字分数微分器并分析理想数字分数微分器系数计算复杂性以及计算稳定性问题；第二节提出理想数字分数微分器系数计算的一种快速算法，并考虑新算法计算复杂性，分析新算法的数值稳定性，最后证明新算法的有效性。第三节进行简单的总结并提出进一步改进该快速算法的思路。

收稿日期：2003－04－23
作者简介：滕旭东(1971－)，男，硕士生，主要从事信号处理技术方面的研究.

1 数字分数微分器

对于一个可微函数或信号 $f(t)$，设其傅氏变换为 $\hat{f}(w)$，从频域出发，可以定义分数微分算子 D_v，$(0<v<1)$，在频域的形式为[1,2]

$$D_v[f(t)]=f^{(v)}(t)\Leftrightarrow(D_v f\hat{)}(w)=(\mathrm{j}w)^v\hat{f}(w)=\hat{d}_v(w)\hat{f}(w) \tag{1}$$

式中 乘子 $\hat{d}_v(w)$ 在频域的指数形式为

$$\begin{cases}\hat{d}_v(w)=\hat{a}_v(w)\mathrm{e}^{\mathrm{j}q_v(w)}=\hat{a}_v(w)\hat{p}_v(w)\\ \hat{a}_v(w)=|w|^v,q_v(w)=\dfrac{v\pi}{2}\mathrm{sgn}(w)\end{cases} \tag{2}$$

根据数字信号处理理论，将理想的数字分数微分器函数 $H_v(w)$ 定义为

$$H_v(w)=(\mathrm{j}w)^v=\hat{d}_v(w)=\hat{a}(w)\mathrm{e}^{\mathrm{j}q(w)}\qquad -\pi\leqslant w\leqslant\pi \tag{3}$$

式中 因 $H_v(w)=\sum\limits_k h_v(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kw}$ 是 2π 周期的，相应的微分器 $h_v\ (0<v<1)$ 的系数为

$$h_v(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_v(w)\mathrm{e}^{\mathrm{j}wk}\,\mathrm{d}w=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}w^v\cos(wk+\frac{v\pi}{2})\,\mathrm{d}w\qquad k\in Z \tag{4}$$

对于给定的微分阶数 v，从理论上均可由式(4)以任意精度算出 $h_v(k),v\in R^+,k\in Z$ 的数值。式(4)中的被积分函数 $w^v\cos(kw+v\pi/2)$ 关于积分变量 w 是一个振荡函数如图1所示，从图中得知，随着振荡因子 k 增大，振荡越来越厉害，造成计算数值不稳定且降低计算精度。

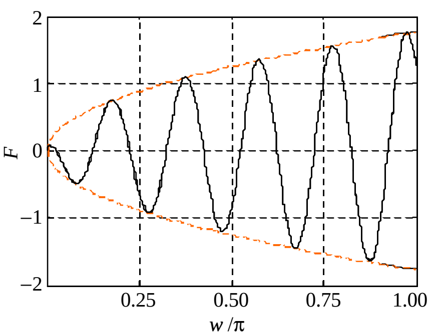

图1 被积分函数波形(v=0.5, k=10)

为了得到误差限小的近似值，提高计算 $h_v(k)$ 的精度，采用复化数值积分法[3]，即将积分区间 $w\in[0,\pi]$ 按零点分成 k 个子区间，对每一个子区间采用Newton-cotes求积分法或Gauss方法等。计算 $2K+1$ 个 $h_v(k),\ -K\leqslant k\leqslant K,\ k\in Z$ 的系数值，采用复化(Gauss)积分法求解式(4)，乘法和加法计算复杂度 $C_{I\times}$ 和 C_{I+} 分别为

$$\begin{cases}C_{I\times}\approx m(K+1)K\\ C_{I+}\approx m(K+1)K-2K\end{cases} \tag{5}$$

式中 m 为子区间的积分节点数计算，每一个 $h_v(k)$ 的平均计算复杂度 $C_{avI\times}$ 和 C_{avI+} 分别为

$$\begin{cases}C_{avI\times}\approx m\dfrac{(K+1)K}{2K+1}\\ C_{avI+}\approx\dfrac{m(K+1)-2K}{2K+1}\end{cases} \tag{6}$$

上述直接按式(4)采用复化数值积分算法计算 $h_v(k)$ 的方法称为原始算法。由式(5)可知原始算法总的计算复杂度是 $O(K^2)$。

2 一种快速算法

理想数字分数微分器的系数 $h_v(k),\ -K\leqslant k\leqslant K,\ k\in Z$ 是一系列值，要提高计算速度，就要避免原始算法计算 $h_v(k)$ 单个值之间的不相关性，希望找到一种新算法使得 $h_v(k)$ 与 $h_v(k-1)$ 建立递推关系，这样就能减少计算量，加快运算速度。

2.1 快速算法原理

即式(4)可以分解成两部分求积分

$$\begin{cases}h_v(k)=\cos(\dfrac{\pi v}{2})h_{Ev}(k)-\sin(\dfrac{\pi v}{2})h_{Ov}(k)\\ h_{Ev}(k)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}w^v\cos(wk)\,\mathrm{d}w;h_{Ov}(k)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}w^v\sin(wk)\,\mathrm{d}w\end{cases} \tag{7}$$

式中　$h_{Ev}(-k)=h_{Ev}(k)$，$h_{Ov}(-k)=-h_{Ov}(k)$，$h_v(0)=\dfrac{\pi^v}{v+1}\cos(\dfrac{v\pi}{2})$，

令 $x=\dfrac{wk}{\pi},k>0$，则有

$$\begin{cases}h_{Ev}(k)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}w^v\cos(wk)\,\mathrm{d}w=\dfrac{\pi^v}{(k)^{v+1}}\int_0^k x^v\cos(\pi x)\mathrm{d}x\\ h_{Ov}(k)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}w^v\sin(wk)\,\mathrm{d}w=\dfrac{\pi^v}{(k)^{v+1}}\int_0^k x^v\sin(\pi x)\mathrm{d}x\end{cases}\tag{8}$$

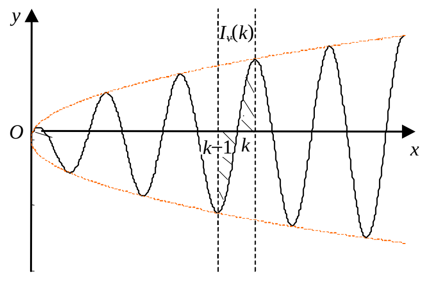

图2　递推公式中的余项$I_v(k)$

通过上述的变量代换后，振荡因子 k 被转化为积分上限，使得被积函数变成一个低频振荡函数：$x^v\cos(\pi x)$ 和 $x^v\sin(\pi x)$。由于 k 在积分函数中不出现，只出现在积分上限中，因此式(8)可以写成

$$\begin{cases}h_{Ev}(k)=(\dfrac{k-1}{k})^{v+1}h_{Ev}(k-1)+\dfrac{\pi^v}{k^{v+1}}I_{Ev}(k)\qquad k=1,2,3,\cdots\\ h_{Ov}(k)=(\dfrac{k-1}{k})^{v+1}h_{Ov}(k-1)+\dfrac{\pi^v}{k^{v+1}}I_{Ov}(k)\end{cases}\tag{9}$$

式中　$I_{Ev}(k)$ 和 $I_{Ov}(k)$ 分别为 $h_{Ev}(k)$ 和 $h_{Ov}(k)$ 递推公式中的余项

$$\begin{cases}I_{Ev}(k)=\displaystyle\int_{k-1}^{k}x^v\cos(\pi x)\mathrm{d}x\\ I_{Ov}(k)=\displaystyle\int_{k-1}^{k}x^v\sin(\pi x)\mathrm{d}x\end{cases}\tag{10}$$

由式(7),(9),(10)便构成 $h_v(k)$ 的快速算法。该快速算法表明计算每一个系数 $h_v(k)$ 的值都可以通过 $h_v(k-1)$ 和余项值计算出来，从而建立了系数 $h_v(k)$ 之间的关联性。图2表示每次只需计算 $I_v(k)$ 的值，从而避免重复前面计算，特别是求 $k<0$ 时 $h_v(k)$ 的数值，根据 h_{Ev} 和 h_{Ov} 的奇偶性只需要计算 $k>0$ 的部分便可以得到。

采用快速算法计算 $2K+1$ 个 $h_v(k),k=-K,\cdots-1,0,1,\cdots,K$ 的系数值，乘法和加法计算复杂度 $C_{P\times}$ 和 C_{P+} 分别为

$$\begin{cases}C_{P\times}\approx 2Km+4(m-1)\\ C_{P+}\approx 2(m+1)K-1+K\end{cases}\tag{11}$$

式中　m 为子区间的求积分节点数，计算单个 $h_v(k)$ 的平均计算复杂度 $C_{avP\times}$ 和 C_{avP+} 分别为

$$\begin{cases}C_{avP\times}\approx\dfrac{2Km+4(m-1)}{(2K+1)}\\ C_{avP+}\approx\dfrac{2(m+1)K-1+K}{2K+1}\end{cases}\tag{12}$$

由式(11)可知总的计算复杂度是 $O(K)$。

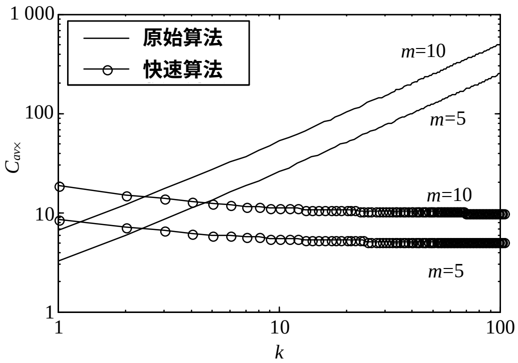

图3　单个h_v(k)乘法平均计算复杂度

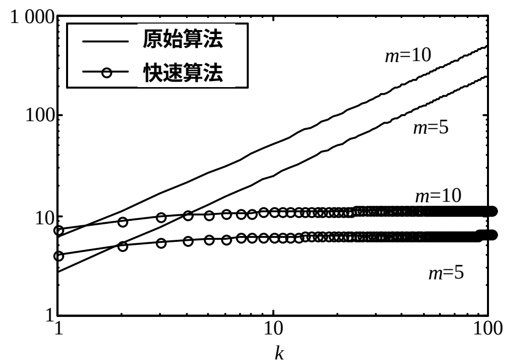

图4　单个h_v(k)加法平均计算复杂

设计算单个$h_v(k),(k=1,\cdots,K)$系数值所需乘法平均计算复杂度为$C_{av\times}$，加法平均计算复杂度为C_{av+}，则快速算法与原始算法计算单个$h_v(k)$系数值平均计算复杂度曲线由图3，4所示。从图中可看出随着K增大，单个$h_v(k)$系数值的平均计算复杂度快速算法趋于恒定，而用原始算法则不断增大。计算机运算结果说明快速算法与原始积分算法相比具有计算量小，运算速度较快的特点。

2.2 算法的数值稳定性

定义 1 一个算法如果输入数据有扰动(误差)，而计算过程中舍入误差不增长则称此算法数值稳定，否则不稳定。

定理 1 由式(9)和式(10)所确定的快速算法是稳定的。

证明 设$e_{Ev}(k)=|h_{Ev}(k)-\tilde{h}_{Ev}(k)|;k\in Z^+$为真实值与计算值的误差绝对值，快速算法余项积分截断误差为$e_k=I_{Ev}(k)-\tilde{I}_{Ev}(k);k\in Z^+$，根据递推公式(9)与(10)

$$h_{Ev}(k)-\tilde{h}_{Ev}(k)=(\frac{1}{k})^{v+1}\pi^v e_1+(\frac{1}{k})^{v+1}\pi^v e_2+\cdots+(\frac{1}{k})^{v+1}\pi^v e_{k-1}+(\frac{1}{k})^{v+1}\pi^v e_k=\sum_{k=1}^{k}(\frac{1}{k})^{v+1}\pi^v e_k \tag{13}$$

记$d=\max\{\ |e_1|,|e_2|,\cdots,|e_{k-1}|,|e_k|\ \}$代入式(13)有

$$e_{Ev}(k)=\left|h_{Ev}(k)-\tilde{h}_{Ev}(k)\right|=(\frac{1}{k})^{v+1}\pi^v\left|e_1+e_2+\cdots+e_{k-1}+e_k\right|\leq(\frac{1}{k})^{v+1}k\pi^v d=(\frac{1}{k})^v\pi^v d<\pi^v d \tag{14}$$

对式(14)两边取极限得

$$\lim_{k\to\infty}e_{Ev}(k)=\lim_{k\to\infty}\left|h_{Ev}(k)-\tilde{h}_{Ev}(k)\right|\leq\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{k})^v\pi^v d=0 \tag{15}$$

同理可得

$$e_{Ov}(k)=\left|h_{Ov}(k)-\tilde{h}_{Ov}(k)\right|\leq(\frac{1}{k})^v\pi^v d'<\pi^v d'\ ;\ \lim_{k\to\infty}e_{Ov}(k)=\lim_{k\to\infty}\left|h_{Ov}(k)-\tilde{h}_{Ov}(k)\right|=0 \tag{16}$$

记$h=\max\{d,d'\}$，由式(7)，(14)和(16)可得

$$e_v(k)=\left|h_v(k)-\tilde{h}_v(k)\right|\leq\left|\cos(\frac{\pi v}{2})e_{Ev}(k)\right|+\left|\sin(\frac{\pi v}{2})e_{Ov}(k)\right|<2h\pi^v \tag{17}$$

$$\lim_{k\to\infty}e_v(k)=\lim_{k\to\infty}\left|\cos(\frac{\pi v}{2})e_{Ev}(k)\pm\sin(\frac{\pi v}{2})e_{Ov}(k)\right|\leq\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{k})^v\left\{\left|\cos(\frac{\pi v}{2})\pi^v d\right|+\left|\sin(\frac{\pi v}{2})\pi^v d'\right|\right\}=0 \tag{18}$$

由式(17)和(18)说明误差积累不会超过最大误差$2h\pi^v$，当$k\to\infty$时误差趋于零。故本算法稳定且收敛。

证毕

3 结 束 语

本文通过变量代换的方法，得到了理想的数字分数微分器h_v系数的递推公式，建立了一种快速算法，从递推公式中可以看出，前几项系数值的计算对后面系数值的影响很大，因此前几项的系数可以采用更为精确的数值算法来计算，这样就可以保证h_v系数的数值精度要求。

参 考 文 献

[1] 袁 晓, 陈向东, 李良齐, 等. 微分算子与子波构造[J]. 电子学报, 2002, 30(5): 771-773

[2] 陶德元, 袁 晓, 何小海. 一类复子波的时—频局域化特征分析[J]. 电子科技大学学报, 2001, 30(1): 21-24

[3] 李庄杨, 王能超, 易大义. 数值计算(第4版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001

编 辑 刘文珍