混合型单调算子对的不动点及其应用

王延源，高理峰

(山东临沂师范学院数学系　山东 临沂　276005)

【摘要】提出了混合型单调算子对的概念，利用混合型单调算子对的定义及数学归纳法对混合型单调算子对的不动点的存在性及唯一性进行了证明，得出了混合型单调算子对的不动点若存在必唯一的结论。该结论应用于带奇性的一阶非线性常微分方程组的初值问题。

关　键　词　混合型；　算子；　不动点；　归纳法

中图分类号　O175.28;　O175.3　　　**文献标识码**　A

Fixed Point of Mixed Type Monotone Operator and Its Application

WANG Yan-yuan，GAO Li-feng

(Department of Mathematics,Linyi Teachers College,　Shandong Linyi　276005)

Abstract　In this paper, we give the definition of the mixed type monotone operator，then we prove the existence and the unique of the fixed point of the operator with induction. Furthermore we prove the fixed point is unique if it exists. Finally we give the application in differential equation group.

Key words　mixed type;　operator;　fixed point;　induction

设 E 是一 *Banach* 空间，$P\subset E$ 是 E 中的锥。本节对 $E\times E$ 到 E 上的算子 B 与 C 构成的算子对 $A(x,y)=(B(x,y),\ C(x,y))$ 进行讨论分析。称 $A(x,y)=(B(x,y),C(x,y)):E\times E\to E\times E$ 是一混合型单调算子对是指 $B(x,y)$ 关于 x 增且关于 y 减，$C(x,y)$ 关于 x 减且关于 y 增。

定理 1　设 E 是一 *Banach* 空间，$P\subset E$ 是 E 中的正规体锥(即 $P^0\neq\phi$)，$A(x,y)=(B(x,y),C(x,y)):$ $P^0\times P^0\to P^0\times P^0$，满足以下条件：

1) $A(x,y)$ 是混合单调算子对；2) 存在 $0<\alpha<1$ 使对任意的 $(x,y)\in P^0\times P^0$，$0<t<1$，有：

$$B(tx,t^{-1}y)\geqslant t^{\alpha}B(x,y) \tag{1}$$

$$C(t^{-1}x,ty)\geqslant t^{\alpha}C(x,y) \tag{2}$$

式中　A 在 $P^0\times P^0$ 中具有唯一不动点 (x^*,y^*)，且 $\forall(r_0,s_0)\in P^0\times P^0$，作迭代列：

$$(r_n,s_n)=(B(r_{n-1},s_{n-1}),C(r_{n-1},s_{n-1}))，\quad n=1,2,\cdots \tag{3}$$

式中　(r_n,s_n) 收敛于 (x^*,y^*)，且存在 $0<r<1$，使得 $\|r_n-x^*\|=O(1-r^{\alpha^n})$，$\|s_n-y^*\|=O(1-r^{\alpha^n})$。

证明　由条件1)，$\forall\ (x,y)\in P^0\times P^0$，$\forall\ 0<t<1$，有：

$$B(x,y)=B(tt^{-1}x,t^{-1}ty)\geqslant t^{\alpha}B(t^{-1}x,ty)，\quad C(x,y)=C(t^{-1}tx,tt^{-1}y)\geqslant t^{\alpha}C(tx,t^{-1}y)$$

得：

$$B(t^{-1}x,ty)\leqslant t^{-\alpha}B(x,y) \tag{4}$$

$$C(tx,t^{-1}y)\leqslant t^{-\alpha}C(x,y) \tag{5}$$

对任意的 $(\omega_0,z_0)\in P^0\times P^0$，由于 $A(\omega_0,z_0)\in P^0\times P^0$，故存在 $0<t_0<1$ 使得：

收稿日期：2004－04－05

作者简介：王延源(1947－)，男，副教授，主要从事优化理论和不动点理论方面的研究；高理峰(1974－)，男，硕士，主要从事动态模型和不动点理论方面的研究.

$$t_0^{\frac{1-\alpha}{2}}\omega_0 \leqslant B(\omega_0,z_0) \leqslant t_0^{-\frac{1-\alpha}{2}}\omega_0 \tag{6}$$

$$t_0^{\frac{1-\alpha}{2}}z_0 \leqslant C(\omega_0,z_0) \leqslant t_0^{-\frac{1-\alpha}{2}}z_0 \tag{7}$$

令 $u_0=t_0^{\frac{1}{2}}\omega_0$， $v_0=t_0^{-\frac{1}{2}}\omega_0$， $x_0=t_0^{\frac{1}{2}}z_0$， $y_0=t_0^{-\frac{1}{2}}z_0$， 则 $u_0,v_0,x_0,y_0\in P^0$， 且 $u_0=t_0v_0$， $x_0=t_0y_0$。

令 $u_n=B(u_{n-1},y_{n-1})$， $v_n=B(v_{n-1},x_{n-1})$， $x_n=C(v_{n-1},x_{n-1})$， $y_n=C(u_{n-1},y_{n-1})$， $n=1,2,\cdots$。

于是，利用式(1)，(2)，(4)，(5)及 B 与 C 的混合单调性得：

$$u_1=B(u_0,y_0)=B(t_0^{\frac{1}{2}}\omega_0,t_0^{-\frac{1}{2}}z_0)\geqslant t_0^{\frac{\alpha}{2}}B(\omega_0,z_0)\geqslant t_0^{\frac{1}{2}}\omega_0=u_0$$

$$y_1=C(u_0,y_0)=C(t_0^{\frac{1}{2}}\omega_0,t_0^{-\frac{1}{2}}z_0)\leqslant t_0^{-\frac{\alpha}{2}}C(\omega_0,z_0)\leqslant t_0^{-\frac{1}{2}}z_0=y_0$$

$$v_1=B(v_0,x_0)=B(t_0^{-\frac{1}{2}}\omega_0,t_0^{\frac{1}{2}}z_0)\leqslant t_0^{-\frac{\alpha}{2}}B(\omega_0,z_0)\leqslant t_0^{-\frac{1}{2}}\omega_0=v_0$$

$$x_1=C(v_0,x_0)=C(t_0^{-\frac{1}{2}}\omega_0,t_0^{\frac{1}{2}}z_0)\geqslant t_0^{\frac{\alpha}{2}}C(\omega_0,z_0)\geqslant t_0^{\frac{1}{2}}z_0=x_0$$

$$u_1=B(u_0,y_0)\leqslant B(v_0,x_0)=v\text{，}\quad y_1=C(u_0,y_0)\geqslant C(v_0,x_0)=x_1$$

由此，利用归纳法可证明：

$$u_0\leqslant u_1\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant v_1\leqslant v_0 \tag{8}$$

$$x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant\cdots\leqslant x_1\leqslant x_0 \tag{9}$$

由 u_0,v_0,x_0,y_0 的定义得知， $u_0=t_0^{\alpha^0}v_0$， $x_0=t_0^{\alpha^0}y_0$。设 $u_n\geqslant t_0^{\alpha^n}v_n$， $x_n\geqslant t_0^{\alpha^n}y_n$ 则：

$$u_{n+1}=B(u_n,y_n)\geqslant B(t_0^{\alpha^n}v_n,t_0^{-\alpha^n}x_n)\geqslant(t_0^{\alpha^n})^\alpha B(v_n,x_n)=t_0^{\alpha^{n+1}}v_{n+1}$$

$$x_{n+1}=C(v_n,x_n)\geqslant C(t_0^{-\alpha^n}u_n,t_0^{\alpha^n}y_n)\geqslant(t_0^{\alpha^n})^\alpha C(u_n,y_n)=t_0^{\alpha^{n+1}}y_{n+1}$$

故由数学归纳法得知：

$$u_n\geqslant t_0^{\alpha^n}v_n\text{，}\quad x_n\geqslant t_0^{\alpha^n}y_n\text{，}\quad n=1,2,\cdots \tag{10}$$

由式(8)～(10)得：

$$\theta\leqslant u_{n+p}-u_n\leqslant v_{n+p}-t_0^{\alpha^n}v_n\leqslant(1-t_0^{\alpha^n})\ v_n\leqslant(1-t_0^{\alpha^n})\ v_0$$

$$\theta\leqslant v_n-v_{n+p}\leqslant t_0^{-\alpha^n}u_n-u_{n+p}\leqslant(\ t_0^{-\alpha^n}-1)\ u_n\leqslant(\ t_0^{-\alpha^n}-1)\ v_0$$

$$\theta\leqslant x_{n+p}-x_n\leqslant y_{n+p}-t_0^{\alpha^n}y_n\leqslant(1-t_0^{\alpha^n})\ y_n\leqslant(1-t_0^{\alpha^n})\ y_0$$

$$\theta\leqslant y_n-y_{n+p}\leqslant t_0^{-\alpha^n}x_n-x_{n+p}\leqslant(\ t_0^{-\alpha^n}-1)\ x_n\leqslant(\ t_0^{-\alpha^n}-1)\ y_0$$

从而有：

$$\|u_{n+p}-u_n\|\leqslant N(1-t_0^{\alpha^n})\|v_0\|\text{，}\quad\|v_n-v_{n+p}\|\leqslant N(t^{-\alpha^n}-1)\|v_0\|$$

$$\|x_{n+p}-x_n\|\leqslant N(1-t_0^{\alpha^n})\|y_0\|\text{，}\quad\|y_n-y_{n+p}\|\leqslant N(t^{-\alpha^n}-1)\|y_0\|$$

式中 N 是 P 的正规常数．表明存在 $u^*,v^*,x^*,y^*\in P$ 使得 $u_n\to u^*$， $v_n\to v^*$， $x_n\to x^*$， $y_n\to y^*$，且

$$u_n\leqslant u^*\leqslant v^*\leqslant v_n\text{，}\quad x_n\leqslant x^*\leqslant y^*\leqslant y_n\text{，}\quad n=1,2,\cdots \tag{11}$$

从而 $(u^*,y^*)\in P^0\times P^0$， $(v^*,x^*)\in P^0\times P^0$，并且由式(10)得知：

$$\theta\leqslant v^*-u^*\leqslant v_n-u_n\leqslant v_n-t_0^{\alpha^n}v_n\leqslant((1-t_0^{\alpha^n})v_0\qquad\theta\leqslant y^*-x^*\leqslant y_n-x_n\leqslant y_n-t_0^{\alpha^n}y_n\leqslant((1-t_0^{\alpha^n})y_0$$

因此 $\|v^*-u^*\|\leqslant N(1-t_0^{\alpha^n})\|v_0\|$， $\|y^*-x^*\|\leqslant N(1-t_0^{\alpha^n})\|y_0\|$，令 $n\to+\infty$ 得 $u^*=v^*$， $x^*=y^*$。再由式(11)得：

$$u_{n+1}=B(u_n,y_n)\leqslant B(u^*,y^*)\leqslant B(v_n,x_n)=v_{n+1} \tag{12}$$

$$x_{n+1}=C(v_n,x_n)\leqslant C(u^*,y^*)\leqslant C(u_n,y_n)=y_{n+1} \tag{13}$$

在式(12)和(13)中令 $n\to+\infty$ 得， $B(u^*,y^*)=u^*$， $C(u^*,y^*)=y^*$，即 $A(u^*,y^*)=(u^*,y^*)$， (u^*,y^*) 是 A 的一个不动点。

任给 $(r_0,s_0)\in P^0\times P^0$，取 $0<t_0<1$ 使得式(6)和(7)成立，并且同时有： $t_0^{\frac{1}{2}}\omega_0\leqslant r_0\leqslant t_0^{-\frac{1}{2}}w_0$， $t_0^{\frac{1}{2}}z_0\leqslant s_0\leqslant t_0^{-\frac{1}{2}}z_0$，即有 $u_0\leqslant r_0\leqslant v_0$， $x_0\leqslant s_0\leqslant y_0$。设 $u_n\leqslant r_n\leqslant v_n$， $x_n\leqslant s_n\leqslant y_n$，则：

$$u_{n+1}=B(u_n,y_n)\leqslant B(r_n,s_n)=r_{n+1}\leqslant B(v_n,x_n)=v_{n+1}$$

$$x_{n+1}=C(v_n,x_n)\leqslant C(r_n,s_n)=s_{n+1}\leqslant C(u_n,y_n)=y_{n+1}$$

因此由数学归纳法得：

$$u_n\leqslant r_n\leqslant v_n\text{，}\quad x_n\leqslant s_n\leqslant y_n\text{，}\quad n=1,2,\cdots \tag{14}$$

所以有：

$$\left\|r_n-u^*\right\|\leqslant\left\|v_n-u_n\right\|+\left\|u_n-u^*\right\|\leqslant 2N(1-t_0^{\alpha^n})\left\|v_0\right\|$$

$$\left\|s_n-y^*\right\|\leqslant\left\|y_n-x_n\right\|+\left\|x_n-y^*\right\|\leqslant 2N(1-t_0^{\alpha^n})\left\|y_0\right\|$$

令 $n\to+\infty$ 即得 $r_n\to u^*$， $s_n\to y^*$，且在取 $r=t_0$ 时，有 $\left\|r_n-u^*\right\|=O(1-t_0^{\alpha^n})$， $\left\|s_n-y^*\right\|=O(1-t_0^{\alpha^n})$。

设 $(\overline{x},\overline{y})$ 是A在 $P^0\times P^0$ 中的任一不动点，则在上一段的证明中令 $r_0=\overline{x}$， $s_0=\overline{y}$，那么有 $r_n=\overline{x}$， $s_n=\overline{y}$， $n=1,2,\cdots$，且 $r_n\to u^*$， $s_n\to y^*$，故 $\overline{x}=u^*$， $\overline{y}=y^*$，即 (u^*,y^*) 是A的唯一不动点。　　证毕

利用定理1研究带奇性条件的一阶常微分方程组的初值问题：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f_1(t,u,v),u(0)=x_0>0\qquad\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=f_2(t,u,v),v(0)=y_0>0\tag{15}$$

设 $T>0$ 为一常数， $J=[0,T]$。设 $f_i(t,x,y)$ 可表示为如下形式：

$$f_1(t,x,y)=\sum_{j=1}^{k_1}a_{1j(t)}x^{\alpha_{1j}}+(\sum_{l=1}^{m_1}b_{1l}(t)y^{\beta_{1l}})^{-1},\quad f_2(t,x,y)=(\sum_{j=1}^{k_2}a_{2j(t)}x^{\alpha_{2j}})^{-1}+\sum_{l=1}^{m_2}b_{2l}(t)y^{\beta_{2l}}$$

式中　$0<\alpha_{ij}<1$， $0<\beta_{ij}<1$ ($i=1$ 时， $j=1,2,\cdots,k_1$， $l=1,2,\cdots,m_1$； $i=2$ 时， $j=1,2,\cdots,k_2$， $l=1,2,\cdots,m_2$，每个 $a_{ij}(t)$ 和 $b_{ij}(t)$ 均为J上的非负可测函数且满足： $\inf\limits_{t\in J}\sum_{l=1}^{m_1}b_{1l}(t)>0$， $\inf\limits_{t\in J}\sum_{j=1}^{k_2}a_{2j}(t)>0$。

定理 2　在上述假设条件下，初值问题式(15)只有一个恒正解 $(u^*(t),v^*(t))$， $u^*(t)>0$， $v^*(t)>0$， $t\in J$，并且若以 (x_0,y_0) 为初始点作迭代序列： $u_0(t)=x_0$， $v_0(t)=y_0$，

$$u_n(t)=x_0+\int_0^t\left[\sum_{j=1}^{k_1}a_{1j}(s)(u_{n-1}(s))^{\alpha_{1j}}+(\sum_{l=1}^{m_1}b_{1l}(s)(v_{n-1}(s))^{\beta_{1l}})^{-1}\right]\mathrm{d}s$$

$$v_n(t)=y_0+\int_0^t\left[\sum_{j=1}^{k_2}a_{2j}(s)(u_{n-1}(s))^{\alpha_{2j}}+(\sum_{l=1}^{m_2}b_{2l}(s)(v_{n-1}(s))^{\beta_{2l}})^{-1}\right]\mathrm{d}s$$

则 $(u_n(t),v_n(t))$ 在J上一致收敛于 $(u^*(t),v^*(t))$。

证明　显然，初值问题式(15)等价于积分方程组：

$$u(t)=x_0+\int_0^t\left[\sum_{j=1}^{k_1}a_{1j}(s)(u(s))^{\alpha_{1j}}+(\sum_{l=1}^{m_1}b_{1l}(s)(v(s))^{\beta_{1l}})^{-1}\right]\mathrm{d}s$$

$$v(t)=y_0+\int_0^t\left[(\sum_{j=1}^{k_2}a_{2j}(s)(u(s))^{\alpha_{2j}})^{-1}+\sum_{l=1}^{m_2}b_{2l}(s)(v(s))^{\beta_{2l}}\right]\mathrm{d}s$$

令 $E=C[J,R^1]$, $P=\{u\in C[J,R^1]:u(t)\geqslant 0,t\in J\}$，则$P$是$E$中的正规体锥，且： $P^0=\{u\in C[J,R^1]:u(t)>0$， $t\in J\}$，对任意的 $(u,v)\in P^0\times P^0$，令

$$B(u,v)(t)=x_0+\int_0^t\left[\sum_{j=1}^{k_1}a_{1j}(s)(u(s))^{\alpha_{1j}}+(\sum_{l=1}^{m_1}b_{1l}(s)(v(s))^{\beta_{1l}})^{-1}\right]\mathrm{d}s$$

$$C(u,v)(t)=y_0+\int_0^t\left[\left(\sum_{j=1}^{k_2}a_{2j}(s)(u(s))^{\alpha_{2j}}\right)^{-1}+\sum_{l=1}^{m_2}b_{2l}(s)(v(s))^{\beta_{2l}}\right]\mathrm{d}s$$

$$A(u,v)=(B(u,v),C(u,v))$$

由假设条件易知， $A:P^0\times P^0\to P^0\times P^0$ 且满足定理1中的条件1)。

令 $\alpha=\max\{\alpha_{1j},\beta_{1l},j=1,2,\cdots k_1,l=1,2,\cdots,m_1;\alpha_{2j},\beta_{2l},j=1,2,\cdots k_2,l=1,2,\cdots,m_2\}$，则通过直接验证得知，对任意的 $0<t<1$， $(u,v)\in P^0\times P^0$，有 $B(tu,t^{-1}v)\geqslant t^{\alpha}B(u,v)$, $C(t^{-1}u,tv)\geqslant t^{\alpha}C(u,v)$。

即定理1中条件2)也成立。于是由定理1中条件所得本定理结论成立。

参　考　文　献

[1] 郭大均，孙经先．非线性积分方程[M]．济南：山东科学技术出版社, 1987

[2] 孙经先．增算子的不动点和广义不动点[J]．数学学报, 1989, 32(4): 457-463

[3] 郭大均，孙经先，刘兆理，等．非线性常微分方程泛函方法[M]．济南：山东科学技术出版社, 1995

编　辑　刘文珍