

三角形取样鉴相数字合成器锁相环中的混沌

谭永明, 邓立虎

(东莞理工学院 广东 东莞 523106)

【摘要】研究三角形取样鉴相数字合成器锁相环中的混沌现象。其方法是先对三角形取样鉴相数字合成器锁相环系统作离散化处理,得到相应的离散化系统模型;系统中的环路滤波器采用RC积分滤波器,鉴相器采用三角形鉴相特性;通过验证离散化系统相应的低维系统存在快返反射点,证明了当系统方程满足一定条件时,原系统有混沌输出。最后导出了混沌与系统参数间的关系式。

关键词 三角形取样鉴相; 数字合成器环; RC积分滤波器; 低维系统; 快返反射点; 混沌
中图分类号 TN911.7 **文献标识码** A

Chaos from PLL of Digital Synthesizer with Trigon Sampling Phase-Detector

TAN Yong-ming, DENG Li-hu

(Department of Electron, Dongguan Institute of Technology Guangdong Dongguan 523106)

Abstract Chaos phenomenon of sampling phase-detector digital synthesizer loop is studied. First, the systems of sampling phase-detector digital synthesizer loop is discretization handled and the discretization systems model is given. In this systems, loop filter is RC integral filter and phase-detector is triangle phase-detector characteristic. By verifying the corresponding lower dimension system of discretization systems has the Snapnack Repeller, it is proof that original system output chaos when certain conditions of system parameters are satisfied. The relation between chaos and the parameter of the system is given finally.

Key words triangle sampling phase-detector; digital synthesizer loop; RC integral filter; lower dimension system; snapnack repeller; chaos

锁相环路(Phase Locked Loop, PLL)是一个能够跟踪输入信号相位的闭环自动控制系统^[1]。由于锁相环具有独特的优良性能,如载波跟踪特性、调制跟踪特性、低门限特性等,使它在无线电技术的各个领域及工业生产中得到了广泛的应用。

混沌存在于锁相环路中,文献[2~5]对锁相环路中的混沌现象作了一系列的分析和研究。而本文研究三角形取样鉴相数字合成器锁相环中的混沌现象。其系统的相位模型及方程如下。图1为取样鉴相数字合成器锁相环的相位模型^[2]。

图中 f 为鉴相器鉴相特性,当鉴相器采用三角形鉴相时,其鉴相特性如图2所示。在图1中,令 $\theta_1(s) = r(t)$, $\theta_2(s) = y$, $\theta_e(s) = \theta_1(s) - \theta_2(s) = r(t) - y(t)$ 环路滤波器采用RC积分滤波器 即 $F(s) = 1/(1 + s\tau)$, k_0 为正常数。设压控振荡器的输出为 $x_1(t)$, 环路滤波器的输出为 $x_2(t)$, 取样鉴相器的输出为 $u(t)$, k_d 为正常数,重画环路的相位模型如图3所示。由图3得相应的系统方程为:

收稿日期: 2004-10-11

基金项目: 广东省科技计划基金资助项目(2003A1040312)

作者简介: 谭永明(1957-), 女, 硕士, 副教授, 主要从事通信技术、混沌理论及其在通信应用方面的研究。

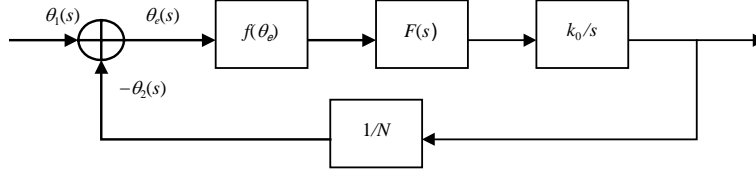


图1 取样鉴相数字合成器锁相环的相位模型

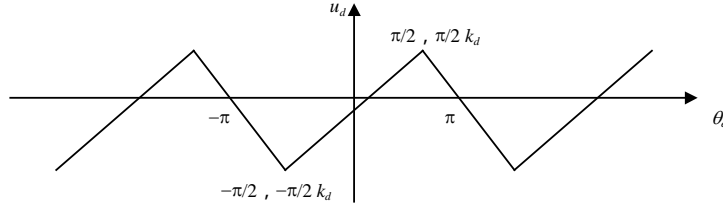


图2 三角形鉴相特性

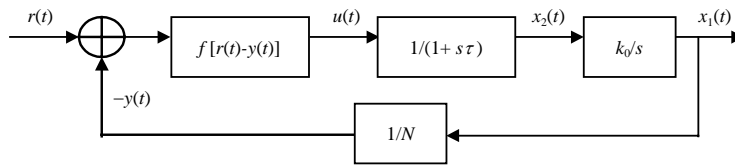


图3 取样鉴相数字合成器锁相环的等效相位模型

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = k_0 x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) = -\frac{1}{\tau} x_2(t) + \frac{1}{\tau} u(t) \\ y(t) = \frac{1}{N} x_1(t) \\ u(t) = f[r(t) - y(t)] \end{cases} \quad (1)$$

相应的离散化系统方程为：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + k_0 \tau (1 - e^{-T/\tau}) x_2(k) + k_0 [T + \tau(e^{-T/\tau} - 1)] u(k) \\ x_2(k+1) = e^{-T/\tau} x_2(k) + (1 - e^{-T/\tau}) u(k) \\ y(k) = \frac{1}{N} x_1(k) \\ u(k) = f[r(k) - y(k)] \end{cases} \quad (2)$$

式中 $x_i \in R^1, y \in R^1$ 。设 $r(k) = 0$ ，鉴相器采用三角形鉴相，这时 $u(k)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为：

$$u(k) = \begin{cases} -k_d y(k) - \pi & -\pi < y(k) < -\pi/2 \\ k_d y(k) & |y(k)| \leq \pi/2 \\ -k_d y(k) + \pi & \pi/2 < y(k) < \pi \end{cases} \quad (3)$$

式中 $u(k)$ 是以 2π 为周期的周期函数，即 $u(k) = u(k + 2n\pi)$ ， $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

1 理论分析

下面求系统方程式(2)，当 $y(k) \in [-\pi, \pi]$ 时的不动点如下：

1) 当 $-\frac{\pi}{2} < y(k) < \frac{\pi}{2}$ 时， $u(k) = k_d y(k) = \frac{k_d}{N} x_1(k)$ ，方程式(2)化为：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \left\{1 + \frac{k_0 k_d}{N} [T + \tau(e^{-T/\tau} - 1)]\right\} x_1(k) + k_0 \tau (1 - e^{-T/\tau}) x_2(k) \\ x_2(k+1) = \frac{k_d}{N} (1 - e^{-T/\tau}) x_1(k) + e^{-T/\tau} x_2(k) \end{cases} \quad (4)$$

求得不动点为: $\bar{x}^{(1)} = (0, 0)^T$, $(\cdot, \cdot)^T$ 表示 (\cdot, \cdot) 的转置。

2) 当 $\pi/2 < y(k) < \pi$ 时, $u(k) = -k_d y(k) + \pi = -k_d/N x_1(k) + \pi$, 方程式(2)化为:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \left\{1 - \frac{k_0 k_d}{N} [T + \tau(e^{-T/\tau} - 1)]\right\} x_1(k) + k_0 \tau (1 - e^{-T/\tau}) x_2(k) + k_0 \pi [T + \tau(e^{-T/\tau} - 1)] \\ x_2(k+1) = -\frac{k_d}{N} (1 - e^{-T/\tau}) x_1(k) + e^{-T/\tau} x_2(k) + \pi (1 - e^{-T/\tau}) \end{cases} \quad (5)$$

求得不动点为: $\bar{x}^{(2)} = (\pi N/k, 0)^T$

3) 当 $-\pi < y(k) < -\pi/2$ 时, $u(k) = -k_d/N x_1(k) - \pi$, 方程式(2)化为:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \left\{1 - \frac{k_0 k_d}{N} [T + \tau(e^{-T/\tau} - 1)]\right\} x_1(k) + k_0 \tau (1 - e^{-T/\tau}) x_2(k) - \pi k_0 [T + \tau(e^{-T/\tau} - 1)] \\ x_2(k+1) = -\frac{k_d}{N} (1 - e^{-T/\tau}) x_1(k) + e^{-T/\tau} x_2(k) - \pi (1 - e^{-T/\tau}) \end{cases} \quad (6)$$

求得不动点为: $\bar{x}^{(3)} = (-\pi N/k, 0)^T$ 。

以下考虑式(2)的对应降阶系统:

$$x_1(k+1) = h_1(x_1(k)) = \begin{cases} \left(1 - \frac{k_0 k_d}{N} b_1\right) x_1(k) - \pi k_0 b_1 & -\pi < x_1(k) < \frac{\pi}{2} \\ \left(1 + \frac{k_0 k_d}{N} b_1\right) x_1(k) & |x_1(k)| = \frac{\pi}{2} \\ \left(1 - \frac{k_0 k_d}{N} b_1\right) x_1(k) + \pi k_0 b_1 & -\frac{\pi}{2} < x_1(k) < \pi \end{cases} \quad (7)$$

式中 $b_1 = T + \tau(e^{-T/\tau} - 1)$, 当 $|x_1(k)| = \pi/2$ 时, 对应式(2)的不动点为: $\bar{x}^{(1)} = (0, 0)^T$, 低维系统式(7)有不动点 $\bar{x}_1^{(1)} = 0$ 。下面验证 $\bar{x}_1^{(1)} = 0$ 为低维系统式(7)的广义不动点^[2]:

对 $\forall x_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\frac{dh_1(x_1)}{dx_1}$ 存在, 又由 $\|Dh_1 - \lambda E\| = \left\| \frac{dh_1}{dx_1} - \lambda \right\| = 0$, 得: $|\lambda| = \left| \frac{dh_1}{dx_1} \right| = \left| 1 + \frac{k_0 k_d}{N} b_1 \right| > 1$ 。故 $\bar{x}_1^{(1)} = 0$

为式(7)的广义不动点。再证 $\bar{x}_1^{(1)} = 0$ 为式(7)的快返反射点^[2]:

取 $0 < x_{01} < \frac{\pi}{2}$, 就有 $0 < h_1(x_{01}) < \frac{\pi}{2}$ 。这时 $h_1^2(x_{01}) = h_1\{h_1(x_{01})\} = \left\{1 + \frac{k_0 k_d}{N} b_1\right\}^2 x_{01} > 0$ 。

取 $x_{02} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (α 为正实数), 先要求 $\frac{\pi k_0 k_d b_1 - N}{2 k_0 k_d b_1 + N} < \alpha < \frac{\pi k_0 k_d b_1}{2 k_0 k_d b_1 + N}$, 则有 $\pi > h_1(x_{02}) = h_1(\frac{\pi}{2} - \alpha) = (1 + \frac{k_0 k_d}{N} b_1)(\frac{\pi}{2} - \alpha) > \frac{\pi}{2}$, 要使 $h_1^2(x_{02}) = h_1(h_1(x_{02})) = h_1\left[\left(1 + \frac{k_0 k_d}{N} b_1\right)\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \left(1 - \frac{k_0 k_d}{N} b_1\right)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \pi k_0 b_1 < 0$, 需 $\alpha > \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{N^2 \pi k_0 b_1}{(N - k_0 k_d b_1)^2}\right)$, 综合得 $\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{N^2 \pi k_0 b_1}{(N - k_0 k_d b_1)^2}\right) < \alpha < \frac{\pi k_0 k_d b_1}{2 k_0 k_d b_1 + N}$ 。记 $H = k_0 k_d b_1$,

即:

$$N^2(1 - \pi k_0 b_1) + H^2 - NH(2 - \pi k_0 b_1) < 0 \quad (8)$$

式中 $h_1^2(x_{02}) < 0$ 。因此存在一点 $x_{1r} \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使 $h_1^2(x_{1r}) = 0$, 且 $\frac{dh_1^2(x_{1r})}{dx_1} \neq 0$ 。

故 $\bar{x}_1^{(1)} = 0$ 为式(7)的快返反射点。

不动点 $\bar{x}^{(1)} = (0, 0)^T$ 的局部稳定流形 $W_{loc}^s(\bar{x}^{(1)})$ 和局部不稳定流形 $W_{loc}^u(\bar{x}^{(1)})$ 分别如下:

$$W_{loc}^s(\bar{x}^{(1)}) = \{[0, x_2]^T : x_2 \in R^1\}, W_{loc}^u(\bar{x}^{(1)}) = \{[x_1, 0]^T : |x_1| < \frac{\pi}{2}\}$$

满足初始条件 $x(0) = [\pi/2 - \alpha, 0]^T$ 的轨线 $x(1), x(2)$ 分别为:

$$x(1) = \begin{bmatrix} (1 + \frac{H}{N})(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ \frac{k_d}{N}(1 - e^{-T/\tau})(\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} [1 - (\frac{H}{N})^2](\frac{\pi}{2} - \alpha) + k_0\tau(1 - e^{-T/\tau})^2 \frac{k_d}{N}(\frac{\pi}{2} - \alpha) + k_0\pi b_1 \\ -\frac{k_d}{N}(1 - e^{-T/\tau})(1 + \frac{H}{N})(\frac{\pi}{2} - \alpha) + e^{-T/\tau} \frac{k_d}{N} e^{-T/\tau} (1 - e^{-T/\tau})(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \pi(1 - e^{-T/\tau}) \end{bmatrix}$$

令 $M_1 = x(1), M_2 = x(2)$, 由于 $(1 + \frac{H}{N})(\frac{\pi}{2} - \alpha) > 0$, 只要 $(N^2 - H^2)(\pi - 2\alpha) + k_0k_d\tau(1 - e^{-T/\tau})^2 N(\pi - 2\alpha) + 2N^2k_0\pi b_1 < 0$ 。则以 M_1, M_2 为端点的直线与 x_2 轴有交点, 并记该交点为 \tilde{x} , 且 $\tilde{x} \in W_{loc}^s(\bar{x}^{(1)})$, 即从 $x(0) \in W_{loc}^u(\bar{x}^{(1)})$ 出发的轨线, 总有 $x(p) \in W_{loc}^s(\bar{x}^{(1)})$ (p 为正整数), 因此, 当以下两式同时成立:

$$\begin{cases} N^2(1 - \pi k_0 b_1) + H^2 - NH(2 - \pi k_0 b_1) < 0 \\ (N^2 - H^2)(\pi - 2\alpha) + k_0k_d\tau(1 - e^{-T/\tau})^2 N(\pi - 2\alpha) + 2N^2k_0\pi b_1 < 0 \end{cases} \quad (9)$$

即当系统参数满足式(9)时, 系统式(2)有混沌输出。

2 结束语

本文从理论上证明了当具有三角形取样鉴相数字合成器锁相环系统参数满足式(9)时, 系统有混沌输出。式(9)对于实际设计取样鉴相数字合成器锁相环具有实际参考意义和重要的指导意义。如何对取样鉴相数字合成器锁相环中的混沌现象进行控制, 是一个新的课题, 尚有广泛的领域值得去研究。

参 考 文 献

- [1] 郑继禹, 万心平, 张厥盛. 锁相环原理与应用[M]. 北京: 人民邮电出版社, 1984
- [2] 谭永明, 葛渭高, 郑继禹. 锯齿形取样鉴相频率合成器中的混沌现象的研究[J]. 通信学报, 2001, 22(3): 20-26
- [3] 谭永明, 邓立虎, 郑继禹. 锁相鉴频器混沌现象的研究[J]. 电子与信息学报, 2002, 24(9): 1 251-1 256
- [4] 谭永明, 邓立虎, 郑继禹. 具有锁相式频率合成器的跳频通信系统中的混沌[J]. 电子学报, 2004, 32(10): 1 640-1 643
- [5] 罗诗裕, 谭永明, 邵明珠, 等. 沟道效应的运动阻尼与系统走向混沌的临界特征[J]. 物理学报, 2004, 53(4), 1 157-1 161
- [6] Ushil T, Hirai K. Bifurcation and chaos in non-linear sampled-data control systems[J]. IFAC. 9th World Congress, Budapest, Hungary, 1984, 2(6): 655-667
- [7] Ushil T, Hirai K. Chaotic behavior in piecewise linear sampled-data control systems [J]. Int. J. Nonlinear Mechanics, 1985, 20(5): 493-506

编辑 刘文珍