第 34 卷　第 5 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.34　No.5
2005 年 10 月　　Journal　of　UEST　of　China　　Oct. 2005

随机型细胞神经网络的稳定性

文　武[1]，杨汉生[2]，徐　军[2]，钟守铭[3]

(1. 达县师范高等专科学校数学系　四川 达州　635000;　2. 西南科技大学理学院　四川 绵阳　621002;
3. 电子科技大学应用数学学院　成都　610054)

【摘要】借助于李雅谱洛夫理论、矩阵分析方法和Itô公式，结合不等式分析技巧，研究了随机细胞神经网络系统的均方指数稳定性，给出了系统的解的二阶矩Liapunov指数估计式和均方指数稳定的充分条件。

关　键　词　细胞;　随机扰动;　神经网络;　均方指数稳定

中图分类号　O211.63　　　文献标识码　A

Stability of the Stochastic Cellular Neural Networks

WEN Wu[1]，YANG Han-sheng[2]，XU Jun[2]，ZHONG Shou-ming[3]

(1. Daxian Teachers College Department of Mathematics　Sichuan Dazhou　635000;
2. Department of Mathematics, Southwest University of Science and Technology, Sichuan Mianyang　621002;
3. School of Applied Math, UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　In this paper, the stability of stochastic cellular neural networks is studied. The cellular neural networks have become one of the hot study field internationally because of the important applications of the cellular neural networks theory. With the help of Liapunov theory, the method of matrix analysis, the mean square exponential stability of the stochastic cellular networks is studied. Then the second-order matrix Liapunov exponential estimation formula for the solution to the system is given. And the sufficient conditions of the mean square exponential stability for the solution are also given.

Key words　cellular;　stochastic perturbation;　neural networks;　mean square exponential stbility

自文献[1]提出细胞神经网络(CNNs)理论以来，诸如图象处理和模式识别等领域的潜在的重要的应用的研究一直成为国内外多种研究领域内的热点，同时也得到了许多研究成果[2-4]。本文研究随机型CNNs模型，由于在实际应用中，随机干扰是不可避免的，文献[5-6]研究了Hopfield型随机神经网络的稳定性，但对随机型CNNs模型的研究还不多，本文利用Liapunov方法、矩阵分析法结合不等式技巧，建立了随机型CNNs的均方指数稳定的判据。

1　系统的描述与准备

随机型CNNs模型系统为：

$$C_i \mathrm{d}x_i(t) = \left[-\frac{1}{R_i} x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} (T_{ij} f_j(x_j(t)) + b_{ij} E_j) + I_i \right] \mathrm{dt} + \sum_{j=1}^{m} g_{ij}[t, x(t)] \mathrm{d}w_j(t) \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{1}$$

式中　$f_j(x_j(t))$ $(j = 1,2,\cdots,n)$ 为第 j 单元的饱和线性输出函数，并且满足：$f_j(u) = \frac{1}{2}(|u+1| - |u-1|)$，$(j = 1,2,\cdots,n)$，$C_i$、$R_i$、$T_{ij}$、$b_{ij}$、$E_j$ 和 I_i $(i, j = 1,2,\cdots,n)$ 等参数与文献[1-4]中相同，$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^T$ 为网络的状态变量。$\sum_{j=1}^{m} g_{ij}[t, x(t)] dw_j(t)$ 表示随机扰动，并且 $w = [w_1(t), w_2(t), \cdots, w_m(t)]^T$ 是定义在

收稿日期：2003 – 03 – 25
基金项目：国家自然科学基金资助项目(90208003)；教育部科学技术研究重点项目(02065)
作者简介：文　武(1967 –)，男，硕士，主要从事运筹学与控制论方面的研究.

完备的概率空间 (Ω, F, P) 上具 $\{F_t\}_{t\geq 0}$ 自然流的 m 维Brown运动，$g_{ij}(t, x(t))$ 是局部的Lipschitz连续的且满足线性增长条件 $(i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m)$ [7]。由文献[7]知，式(1)过点 (t_0, x_0) 有唯一解，记为：$x(t)=x(t,t_0,x_0)$，并且它是平方可积的。

令 $D=\mathrm{diag}(\frac{1}{R_1C_1},\frac{1}{R_2C_2},\cdots,\frac{1}{R_nC_n})$，$T=(\frac{T_{ij}}{C_i})_{n\times n}$，$B=(\frac{b_{ij}}{C_i})_{n\times n}$，$E=(E_1,E_2,\cdots,E_n)^T$，$I=(I_1,I_2,\cdots,I_n)^T$，$f(x)=[f_1(x_1), f_2(x_2),\cdots, f_n(x_n)]^T$，$g[t,x(t)]=(g_{ij}[t,x(t)])_{n\times m}$。

于是，式(1)变为：

$$\mathrm{d}x=[-Dx+Tf(x)+BE+I]\mathrm{d}t+g(t,x)\mathrm{d}w \tag{2}$$

为研究式(2)的稳定性，首先讨论如下代数方程的解：

$$-Dx+Tf(x)+BE+I=0 \tag{3}$$

引理 1　代数方程式(3)的解存在。

引理 2[8]　对 $\forall h_i\in[0,1]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，令 $H=\mathrm{diag}(h_i,h_2,\cdots,h_n)$，如果 $-D+TH$ 非奇异，则代浸数方程式(3)存在唯一的解。

设 x^* 是方程式(3)的一个解，作变换 $y=x-x^*$，系统式(2)变为：

$$\mathrm{d}y=[-Dy+TF(y)]\mathrm{d}t+G[t,y(t)]\mathrm{d}w \tag{4}$$

式中　$F(y(t))=f(y(t)+x^*)-f(x^*)$，$G[t,y(t)]=g[t,y(t)+x^*]$，并且存在$\alpha\geq 0$，使得对 $\forall(t,y)\in R^+\times R^n$，均有：$\mathrm{trace}G^T(t,y)G(t,y)\leq\alpha\|y\|^2$。

2　主要结果

定理 1　对于系统式(4)，若存在正定矩阵$\boldsymbol{P}$，使得：$\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}D+D\boldsymbol{P})>\alpha\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\left\|PT+T^T\boldsymbol{P}\right\|$，则系统式(4)的任意解有二阶矩Liapunov指数估计：$\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}\lg[E\|y(t,\xi)\|^2]\leq-\varepsilon$。其中，$\varepsilon=[\lambda_{\min}(P)]^{-1}[\ \lambda_{\min}(PD+DP)-\alpha\lambda_{\max}(P)-\left\|PT+T^TP\right\|]>0$ 为常数，$E\|y(t,\xi)\|^2$ 表示随机过程 $\|y(t,\xi)\|^2$ 的数学期望，从而可知系统式(4)的零解是均方指数稳定的，即系统式(1)的解 $x=x^*$ 是均方指数稳定的。

证　当定理的条件满足时，引理2的条件成立，从而可知方程组式(3)的解存在唯一。对于任意给定的固定的初始值ξ，系统(4)当 $t=t_0$ 时过ξ的解简记为 $y(t,t_0,\xi)=y(t)$，本文取Liapunov函数为：$V=y^TPy$ 则由Itô公式，有：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V=&\{2y^TP[-Dy+TF(y)]+\mathrm{trace}G^T(t,y)PG(t,y)\}\mathrm{d}t+2y^TPG(t,y)\mathrm{d}w=\\&[-y^T(PD+DP)y+y^T(PT+T^TP)F(y)+\mathrm{trace}G^T(t,y)PG(t,y)]\mathrm{d}t\ +2y^TPG(t,y)dw\leq\\&-\lambda_{\min}(PD+DP)y^Ty+\left\|PT+T^TP\right\|\|y\|\|F(y)\|+\ \lambda_{\max}(\mathrm{P})\mathrm{trace}G^T(t,y)G(t,y)]\mathrm{d}t\ +2y^TPG(t,y)\mathrm{d}w\end{aligned}$$

注意到 $\|F(y)\|\leq\|y\|$，于是有：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V\leq&[-\lambda_{\min}(PD+DP)+\left\|PT+T^TP\right\|+\alpha\lambda_{\max}(P)]y^Ty\mathrm{d}t\ +2y^TPG(t,y)\mathrm{d}w=\\&-\varepsilon\lambda_{\min}(P)y^Ty\mathrm{d}t\ +2y^TPG(t,y)\mathrm{d}w\leq-\varepsilon V\mathrm{d}t\ +2y^TPG(t,y)\mathrm{d}w\end{aligned}$$

于是有：$\mathrm{d}(Ve^{\varepsilon t})=e^{\varepsilon t}\mathrm{d}V+\varepsilon e^{\varepsilon t}V\mathrm{d}t\leq 2e^{\varepsilon t}y^TPG(t,y)\mathrm{d}w$ 两边从 t_0 积分到 t，并取数学期望可得：$E(Ve^{\varepsilon t})\leq E[V(y(t_0))e^{\varepsilon t_0}]\leq\lambda_{\max}(P)e^{\varepsilon t_0}\|\xi\|^2$ 于是有 $\lambda_{\min}(P)E\|x(t,\xi)\|^2\leq E(V)\leq\lambda_{\max}(P)\|\xi\|^2e^{-\varepsilon(t-t_0)}$。对上式两边取对数，再取极限，有估计式 $\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}\lg\left[E\|x(t,\xi)\|^2\right]\leq-\varepsilon$。从而可知系统式(4)的零解是均方指数稳定的，即系统式(1)的解 $x=x^*$ 是均方指数稳定的。这里取 $P=D^{-1}$，可得如下推论。

推论　对于系统式(4)，如果有：$\alpha\max\limits_{1\leq i\leq n}(R_iC_i)+\left\|D^{-1}T+T^TD^{-1}\right\|<2$，则系统式(4)的任意解有二阶矩Liapunov指数估计 $\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}\lg\left[E\|y(t,\xi)\|^2\right]\leq-\varepsilon$。其中：

$$\varepsilon = \max_{1\le i\le n}\frac{1}{R_iC_i}\left[2-\alpha\max_{1\le i\le n}(R_iC_i)-\left\|D^{-1}T+T^TD^{-1}\right\|\right]>0$$

为常数，$E\|y(t,\xi)\|^2$ 表示随机过程 $\|y(t,\xi)\|^2$ 的数学期望，从而可知系统式(4)的零解是均方指数稳定的，即系统式(1)的解 $x=x^*$ 是均方指数稳定的。如果 $G_{ij}(t,y)=G_{ij}(t,y_j)$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，它还满足：

$$G_{ij}^2(t,y_j)\le\alpha_{ij}y_j^2 \quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) \tag{5}$$

则系统式(4)可改写为：

$$C_i\mathrm{d}y_i(t)=[-\frac{1}{R_i}y_i(t)+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}F_j(y_j(t))]\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{m}G_{ij}[t,y_j(t)]\mathrm{d}w_j(t) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{6}$$

定理 2 对于系统式(6)，如果：$\frac{2}{R_i}-2T_{ii}>\sum_{j=1}^{n}(1-\delta_{ij})(|T_{ij}|+|T_{ji}|)+\sum_{j=1}^{m}C_i\alpha_{ij}$，$(i=1,2,\cdots,n)$，则系统式(6)的任意解有二阶矩Liapunov指数估计：

$$\lim_{t\to\infty}t^{-1}\lg[\sum_{i=1}^{n}Ey_i^2]\le-\varepsilon$$

其中，$\varepsilon=\min_{1\le i\le n}\frac{1}{C_i}[\frac{2}{R_i}-2T_{ii}-\sum_{j=1}^{n}(1-\delta_{ij})(|T_{ij}|+|T_{ji}|)-\sum_{j=1}^{m}C_i\alpha_{ij}]>0$ 为常数，$Ey_i^2(t,\xi)$ 表示随机过程 $y_i^2(t,\xi)$ 的数学期望，从而可知系统式(6)的零解是均方指数稳定的，即系统式(1)的解 $x=x^*$ 是均方指数稳定的。

证明 当定理的条件满足时，引理2的条件成立，从而可知方程组式(3)的解存在唯一。对于任意给定的固定的初始值 ξ，系统式(4)当 $t=t_0$ 时过 ξ 的解简记为：$y(t,t_0,\xi)=y(t)$，取Liapunov函数为：$V=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i^2(t)$ 则由Itô公式，有：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V&=2\sum_{i=1}^{n}C_iy_idy_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}C_iG_{ij}^2(t,y_j)\mathrm{d}t=\\&\left\{2\sum_{i=1}^{n}y_i[-\frac{1}{R_i}y_i+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}F(y_j)]+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}C_iG_{ij}^2(t,y_j)\right\}\mathrm{d}t+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_iG_{ij}^2(t,y_j)\mathrm{d}w_j\end{aligned}$$

注意到 $G_{ij}^2(t,y_j)\le\alpha_{ij}y_j^2$，于是有：

$$\mathrm{d}V\le[-2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}y_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}y_iT_{ij}F(y_j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}C_i\alpha_{ij}y_j^2]\mathrm{d}t+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_iG_{ij}^2(t,y_j)\mathrm{d}w_j$$

再注意到 $0\le y_j^{-1}F_j(y_j)\le1$，有：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V&\le-\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{R_i}-2T_{ii}-\sum_{j=1}^{m}C_i\alpha_{ij})y_i^2dt+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(1-\delta_{ij})|T_{ij}||y_i||y_j|\mathrm{d}t+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_iG_{ij}^2(t,y_j)\mathrm{d}w_j\le\\&-\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{R_i}-2T_{ii}-\sum_{j=1}^{m}C_i\alpha_{ij})y_i^2\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(1-\delta_{ij})|T_{ij}|(y_i^2+y_j^2)\mathrm{d}t+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_iG_{ij}^2(t,y_j)\mathrm{d}w_j\le\\&-\sum_{i=1}^{n}[\frac{2}{R_i}-2T_{ii}-\sum_{j=1}^{m}C_i\alpha_{ij}-\sum_{j=1}^{n}(1-\delta_{ij})(|T_{ij}|+|T_{ji}|)]y_i^2\mathrm{d}t+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_iG_{ij}^2(t,y_j)\mathrm{d}w_j\le\\&-\varepsilon\sum_{i=1}^{n}C_iy_i^2\mathrm{d}t+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_iG_{ij}^2(t,y_j)\mathrm{d}w_j=-\varepsilon V\mathrm{d}t+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_iG_{ij}^2(t,y_j)\mathrm{d}w_j\end{aligned}$$

从而有：$\mathrm{d}(Ve^{\varepsilon t})=e^{\varepsilon t}\mathrm{d}V+\varepsilon e^{\varepsilon t}Vdt\le2e^{\varepsilon t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_iG_{ij}^2(t,y_j)\mathrm{d}w_j$。两边从 t_0 积分到 t，并取数学期望可得：

$$E(Ve^{\varepsilon t})\le E[V(y(t_0))e^{\varepsilon t_0}]\le e^{\varepsilon t_0}\sum_{i=1}^{n}C_i\xi_i^2$$

于是有：$\min_{1\le i\le n}C_i\sum_{i=1}^{n}Ey_i^2\le\sum_{i=1}^{n}C_iEy_i^2\le e^{-\varepsilon(t-t_0)}\sum_{i=1}^{n}C_i\xi_i^2$。对上式两边取对数，再取极限，有估计式：

$$\lim_{t\to\infty}t^{-1}\lg[\sum_{i=1}^{n}Ey_i^2]\le-\varepsilon$$

从而可知系统式(6)的零解是均方指数稳定的，即系统式(1)的解 $x=x^*$ 是均方指数稳定的。

(下转第716页)

定理 5 设$\boldsymbol{A}>0$，则存在正对角矩阵$\boldsymbol{D}$，使得$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\circ(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\in\boldsymbol{M}^{-1}$。

证 令$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\circ(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\in\boldsymbol{M}^{-1}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}=\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0I$，其中$d_0=\min\{d_i\},i\in\langle n\rangle$，$\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}+\mathrm{diag}(d_1-d_0,d_2-d_0,\cdots,d_n-d_0)$，

则$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\circ(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})=(\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0I)\circ(\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0I)$。当$d_0\to+\infty$时，$(\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0I)$满足定理4的条件，则有：$(\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0I)\circ(\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0I)\in\boldsymbol{M}^{-1}$，从而$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})\circ(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})=(\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0I)\circ(\tilde{\boldsymbol{A}}+d_0I)\in\boldsymbol{M}^{-1}$。

从定理及引理可以看出，由正矩阵和正对角矩阵复合得到的矩阵如果满足引理2的条件，则得到的逆***M***-矩阵关于Hadamard积是封闭的。

参 考 文 献

[1] Berman A Plemmons R J, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences[M]. New York: SIAM Press, Philadelphia, 1994

[2] McDonald J J, Neumann M, Schneider H. edll. Inverse of Unipathic M-matrices[J]. SIAM.J. Matrix Anal. Appl, 1996, (17): 1 025-1 037

[3] Neumann M. A conjecture concerning the Hadamard product of inverse of M-matrices[J]. Lin Alg Appl, 1998, (185): 277-290

[4] Horn R A, Johnson C R. Topics in Matrix Analysis. Cambridge University Press[M]. London: Cambridge, 1991

[5] Johnson C R. Inverse M-matrices. Lin Alg Appl[J]. 1982, (47): 195-216

[6] Willoughby R A, The inverse M-matrix problem[J]. Lin Alg Appl, 1977, (18): 75-94

编 辑 刘文珍

(上接第702页)

参 考 文 献

[1] Chua L O. Cellular neural networks: theory[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1988,35(10): 1257-1272

[2] Liao X X. Mathematical theory of cellular networks [J]. Science in China, 1994,24(10): 1037-1046

[3] Cao J D, Zhou D M. Stability analysis of delayed cellular neural networks [J]. Neural Networks, 1998,11(9): 1601-1605

[4] Zhong S M. Stability of cellular neural networks with delay [J]. ACTA Electronca Sinca, 1997, 25(2): 125-127

[5]Liao X X, Mao X. Stability of stochastic neural networks [J]. Neural, Parallel & Scientific Computations, 1996,4: 205-224

[6] Liao X X, Mao X. Exponential stability and instability of stochastic neural networks [J]. Stochastic Analysis and Applications, 1996, 14(2): 165-185

[7] Mao X. Exponential stability of stochastic differential equations [M]. New York, Marcel Dekker, 1994

[8] Juang J C. Stability analysis of Hopfield-type neural network [J]. IEEE Trans Neural Networks, 1999, 10: 1 366-1 374

编 辑 刘文珍