

# 一种新的波达估计方法

靳天玉, 吕振肃, 吕鑫

(兰州大学信息科学与工程学院 兰州 730000)

**【摘要】**分析了目前常用的波达角估计算法,研究了等距线阵和圆阵的特点,指出其存在关于横轴镜像对称信号源的空间模糊性,利用等距T型阵克服了这一困难。提出了一种新的基于训练序列波角估计新算法,新算法基于如下假设:各个信号源的训练序列互相正交,并且各个信号源都是幅度为1的恒模信号。该文给出了新算法的数学推导过程,得到一个简单的波达角估计公式。应用Matlab对新算法进行了仿真,仿真结果表明新算法能够快速、精确地估计波达方向。

**关键词** 天线阵列; 阵列信号; 信号源盲分离; 波达估计

中图分类号 TN 431

文献标识码 A

## A New Method of Estimating the DOA

JIN Tian-yu, LÜ Zhen-su, LÜ Xin

(School of Information Science and Engineering, Lanzhou University Lanzhou 730000)

**Abstract** Since the most of existing algorithms of direction of arrival (DOA) have spatial ambiguity to the signals which are mirror symmetry to  $x$  axis, T shape array is usually used to overcome the spatial ambiguity. In this paper, a new DOA estimation method based on train signal is proposed. The new method is based on the supposition: the training signals are mutually orthogonal and the magnitude of each signal is constant. The paper gives out the mathematical derivation of the new algorithm and gets a simple estimating formula. The simulation result shows that the new algorithm can estimate the DOA accurately and rapidly.

**Key words** antenna array; array signal; blind separation of signal sources; the estimation of direction of arrival

阵列信号处理的核心问题是多个信号源的分离,而波达方向的估计又是阵列信号分离的先决条件。因此,关于波达方向的估计是目前的一个研究重点。经典的波束形成器,实质上就是估计波达方向。Bartlett波束形成器<sup>[1]</sup>和Capon波束形成器是两个典型算法,它们一个共同的不足是分辨率低。为了克服这个问题,人们先后提出了MUSIC方法<sup>[2-3]</sup>、ESPRIT方法<sup>[4-5]</sup>、最小内积法<sup>[6]</sup>、投影矩阵法<sup>[7]</sup>、矩阵分解法<sup>[8]</sup>、最小范数算法<sup>[9]</sup>。它们同属特征子空间方法,具有超高的分辨率。但是,这些方法都需要解决复杂的优化问题,其计算量很大。基于此,本文提出一种基于训练序列的波达方向估计算法。

### 1 等距T型阵

具有 $M$ 个阵元的等距T型阵如图1所示。等距线阵和圆阵对于图1中的两个关于横轴镜像对称的信

号源是不能分辨的,因为这两种阵列的两个信号源的方向矢量相等。而对于T型阵列,它们所对应的方向矢量是不同的。因而,T型阵列不存在空间模糊性。

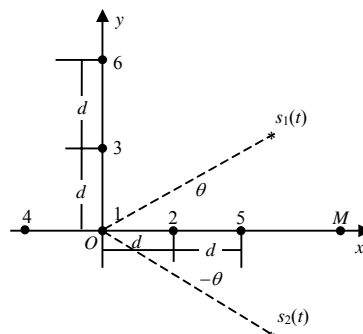


图1 等距T型阵示意图

图中,阵元分别设置在 $x$ 和 $y$ 轴上,按图示顺序编号。信源 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的方向矢量分别为:

$$a_1(\theta) = [1, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d \cos \theta}, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta}, e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d \cos \theta}]^T \quad (1)$$

收稿日期: 2006-10-23

基金项目: 甘肃省自然科学基金资助项目(ZS011-A25016-G)

作者简介: 靳天玉(1962-),男,硕士,工程师,主要从事阵列数字信号处理算法和多用户检测方面的研究。

$$\mathbf{a}_2(\theta) = [1, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\cos\theta}, e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta}, e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\cos\theta}]^T \quad (2)$$

为了简单起见,在式(1)、(2)中,假定只有四个阵元。显然,两个方向矢量是不同的,因此,T型阵列克服了对称阵列(如等距线阵和对称圆阵)的模糊性。对于阵元多于五个以上的T型天线阵,也可以写出其方向矢量为:

$$\mathbf{a}_1(\theta) = [1, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\cos\theta}, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta}, e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\cos\theta}, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\cos\theta}, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta}, e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\cos\theta}, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\cos\theta}, \dots]^T$$

式中 方括号内共有 $M$ 个元素,对应于T型阵的 $M$ 个阵元。

## 2 基于训练序列的波达方向估计算法

新的波达方向估计算法基于假设:(1)各个信号源是相互独立的零均值随机过程。(2)信道噪声是零均值高斯白噪声,且与信号源相互独立。(3)各个信号源的训练序列互相正交。(4)各个信号源为恒模信号,且设幅度为1。

考虑一个具有 $K$ 个信号源(用户), $M$ 个阵元的系统。设各个信号为 $s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)$ ;波达角分别为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$ ;第 $k$ 个信号源的训练序列为 $\mathbf{p}_k = [p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{kN}]$ 。由式(1)和文献[1]可知,阵列信号的采样值为:

$$\mathbf{x}(j) = \mathbf{a}(\theta)s(j) + \sigma\mathbf{n}(j) = s_1(j)\mathbf{a}(\theta_1) + s_2(j)\mathbf{a}(\theta_2) + \dots + s_K(j)\mathbf{a}(\theta_K) + \sigma\mathbf{n}(j) \quad (3)$$

设从第1个比特到第 $N$ 个比特发射训练序列,因而根据假设(4),有如下关系:

$$s_k(j) = p_{kj} \quad (4)$$

对第 $k$ 个信号源的第 $j$ 个训练比特进行如下处理:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(j)p_{kj} &= s_1(j)\mathbf{a}(\theta_1)p_{kj} + s_2(j)\mathbf{a}(\theta_2)p_{kj} + \dots + \\ & s_k(j)\mathbf{a}(\theta_k)p_{kj} + \dots + s_K(j)\mathbf{a}(\theta_K)p_{kj} + \sigma\mathbf{n}(j)p_{kj} = \\ & p_{1j}\mathbf{a}(\theta_1)p_{kj} + p_{2j}\mathbf{a}(\theta_2)p_{kj} + \dots + p_{kj}\mathbf{a}(\theta_k)p_{kj} + \dots + \\ & p_{Kj}\mathbf{a}(\theta_K)p_{kj} + \sigma\mathbf{n}(j)p_{kj} = p_{1j}p_{kj}\mathbf{a}(\theta_1) + \\ & p_{2j}p_{kj}\mathbf{a}(\theta_2) + \dots + p_{kj}p_{kj}\mathbf{a}(\theta_k) + \dots + p_{Kj}p_{kj}\mathbf{a}(\theta_K) + \\ & \sigma\mathbf{n}(j)p_{kj} = p_{1j}p_{kj}\mathbf{a}(\theta_1) + p_{2j}p_{kj}\mathbf{a}(\theta_2) + \dots + \\ & p_{kj}p_{kj}\mathbf{a}(\theta_k) + \dots + p_{Kj}p_{kj}\mathbf{a}(\theta_K) + \sigma\mathbf{n}(j)p_{kj} \end{aligned} \quad (6)$$

本文定义:

$$\mathbf{L}_k = E[\mathbf{x}(j)p_{kj}] \quad (7)$$

由各态遍历平稳随机过程得到:

$$\mathbf{L}_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{x}(j)p_{kj} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p_{1j}p_{kj}\mathbf{a}(\theta_1) +$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p_{2j}p_{kj}\mathbf{a}(\theta_2) + \dots + \mathbf{a}(\theta_k) + \dots +$$

$$p_{Kj}p_{kj}\mathbf{a}(\theta_K) + \sigma\mathbf{n}(j)p_{kj} = \mathbf{a}(\theta_k) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} [p_{1j}p_{kj}\mathbf{a}(\theta_1) +$$

$$p_{2j}p_{kj}\mathbf{a}(\theta_2) + \dots + p_{Kj}p_{kj}\mathbf{a}(\theta_K) + \sigma\mathbf{M}p_{kj}] \quad (8)$$

式中  $\mathbf{M} = [n(1), n(2), \dots, n(N)]$ 。如果选择不同信源的训练序列正交,即:

$$p_j p_k^T = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \quad (9)$$

考虑到假设(2),得到如下结论:

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{a}(\theta_k) \quad (10)$$

式中  $\mathbf{L}_k = [L_{k1}, L_{k2}, \dots, L_{kM}]^T$ 。根据式(7),可以看出 $L_k$ 实际上是第 $k$ 个信号源的方向矢量的估计值,所以把 $L_k$ 叫做方向矢量估计。

下面推导波达角 $\theta_k$ 的计算公式。由于 $L_k$ 是第 $k$ 个信号源的方向矢量估计,所以, $L_{k1}$ 、 $L_{k2}$ 、 $L_{k3}$ ……分别是方向矢量的第一项、第二项、第三项……的估计值。研究式(1)或式(2)中的第三、第四项的实部和虚部正负号与波达角所在象限的关系,发现利用这种关系可以确定波达角所在象限。因此,根据 $L_{k3}$ 、 $L_{k4}$ 的符号可以确定波达角所在象限。同样地, $L_{k3}$ 是式(2)中第三项的估计值,所以可按如下方法推导得到波达估计公式:

$$L_{k3} = e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta} = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta\right)$$

$$\text{Re}(L_{k3}) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta\right)$$

所以,

$$\theta_k = \sin^{-1} \left\{ \lambda \frac{\cos^{-1}[\text{Re}(L_{k3})]}{2\pi d} \right\} \quad (11)$$

式中 函数 $\text{Re}(L_{k3})$ 表示取 $L_{k3}$ 的实部。在实际问题中,考虑到 $N$ 不可能趋于无穷,在计算波达角时,需要利用下面的修正公式:

$$\theta_k = \sin^{-1} \left\{ \lambda \frac{\cos^{-1}[\text{Re}(L_{k3} - rL_{k1})]}{2\pi d} \right\} \quad (12)$$

式中  $r$ 是一个绝对值小于1的经验参数。利用式(11)也可以获得波达估计,但仿真表明式(12)更精确。

## 3 计算机仿真与结论

本文利用推导得到的式(12)进行了两个波达角估计仿真实验。

(1) 信源的波达角保持不变,观察估计精度与信噪比的关系。设置两个信源,它们的波达角分别为

29°和30°，仿真结果如图2所示。图中“o”线和“\*”线分别是波达角的实际值，标注菱形和方块的线分别是对应波达角的估计值。由图中曲线可见，当信噪比大于10 dB时，估计精度相当好。

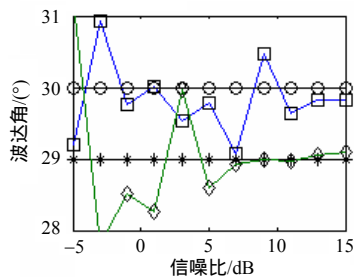


图2 新算法波达估计精度与信噪比关系

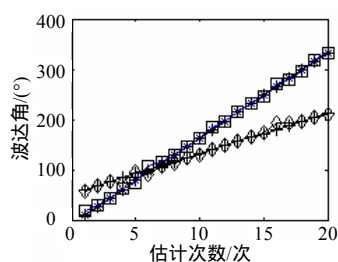


图3 新算法波达估计跟踪性能

(2) 信噪比10 dB保持不变，不断改变信源波达角。在这个实验中，主要考察新的波达估计算法对波达角变化的跟踪性能，仿真结果如图3所示。当两个信号源的波达角分别在 $100^\circ \sim 200^\circ$ 和 $0^\circ \sim 300^\circ$ 之间变化时，新算法的波达角估计值非常精确。图中“\*”线和“+”线表示实际波达变化轨迹，菱形和方块线是估计值的跟踪轨迹。从图中曲线还可以看到，新算法克服了一般波达角估计算法的模糊性，并且新算法的计算量远远小于谱估计算法和Givens

圆盘算法。用谱估计算法估计波达角都需要迭代，比较好的结果是经过25次迭代<sup>[10]</sup>，而新方法不需要迭代就能够得到精确估计。因此，新算法的性能是比较理想的，并且T阵列克服了空间模糊性。

### 参考文献

- [1] 张贤达, 保铮. 通信信号处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002.
- [2] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE. Trans. AP-34, 1986, (3): 276-280.
- [3] SERPEDIN E, GIANNAKIS G B. Blind channel identification and equalizations with modulation-induced cyclostationarity[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1998, (46): 1930-1944.
- [4] ROY R, KAILATH T. ESPRIT-estimation of signal parameter via rotational invariance techniques[J]. IEEE. Trans., ASSP-37, 1989, (7): 984-995.
- [5] ROY R, PAULRAJ A, KAILATH T. ESPRIT-A subspace rotation approach to estimation of parameter of cissoids in noise[J]. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, 1986, (34): 1340-1342.
- [6] YEH C C. Projection approach to bearing estimation[J]. IEEE. Trans. ASSP-34, 1986, (5): 1347-1349.
- [7] DI A Z. Multiple source location—a matrix decomposition approach[J]. IEEE. Trans., 1985, ASSP-33, (4): 1086-1091.
- [8] KUMARESAN R, TUFTS D W. Estimating the angles of arrival of multiple plane waves[J]. IEEE. Trans., AES-19, 1983, (1): 134-139.
- [9] BOHME J F. Estimation of spectral parameters of correlated signals in wavefields[J]. Signal Processing, 1986, (10): 329-337.
- [10] 刘德树, 罗景青, 张剑云, 等. 空间谱估计及其应用[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1997.

编辑 漆蓉