

# 空中防撞系统避撞机制的数学模型

林云松<sup>1</sup>, 彭良福<sup>2</sup>, 童玲<sup>1</sup>

(1. 电子科技大学自动化工程学院 成都 610054; 2. 西南民族大学电气信息工程学院 成都 610041)

**【摘要】**在TCAS系统中, 到达最接近点的时间Tau、HMD和VMD是描述空中碰撞物理过程的主要参数, 利用该组参数能够完整地描述TCAS系统的防撞机制。该文通过对到CPA时间的近似, 引入对Tau时间的物理解释; 并通过坐标变换, 采用本机和入侵飞机的相对距离、相对距离变化率和相对距离加速度推导出了HMD的数学表达式; 分析了工程实际应用中的修正模型。

**关键词** 最接近点; 空中防撞系统; 水平距离; Tau时间  
**中图分类号** TN953<sup>+</sup>.4; TN958.96 **文献标识码** A

## Mathematics Model for Collision Avoidance in Traffic Alert and Collision Avoidance System

LIN Yun-song<sup>1</sup>, PENG Liang-fu<sup>2</sup>, and TONG Ling<sup>1</sup>

(1. School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 610054;  
2. College of Electrical Information Engineering, Southwest University for Nationalities Chengdu 610041)

**Abstract** In the system of traffic alert and collision avoidance system (TCAS), the time of closest point of approach of the aircraft, horizontal miss distance (HMD), and vertical miss distance (VMD) are the primary parameters to describe the concept of collision avoidance. Firstly, the time of Tau is explained physically which approximates the time to closest point of approach (CPA), and then the formal expression of HMD is induced via the transforming of coordinate which is expressed by relative distance, relative distance rate, and relative acceleration between aircrafts. Finally, the modified model for engineering application is considered.

**Key words** closest point of approach; collision avoidance system; horizontal miss distance; Tau

空中防撞是一个复杂的问题, 1955年, Radio Technical Commission for Aeronautics (RTCA) 和 IEEE 联合提出了对开发空中防撞系统的需求<sup>[1-4]</sup>。1981年, 美国联邦航空管理局(FAA)正式提出了对空中防撞系统的功能需求和技术定义, 并制定和实施了 Traffic Alert and Collision Avoidance System (TCAS) 研制计划, 包括 TCAS I、TCAS II 和 TCAS III。由于技术原因, TCAS III 已停止研制, RTCA 组织进行了 TCAS IV 的需求定义。

TCAS 是一套能独立于地面电台工作的机载交通警戒及空中防撞系统<sup>[5]</sup>。TCAS 不断地观测本机周围的空域, 借助于 ATC 应答机, 搜寻来自附近空域其他飞机的回答。如果有其他飞机进入本机的监视区内, 则根据对本机询问做出的回答, 获得它的相对距离、方位和高度信息, 通过 CAS 防撞逻辑连续跟踪和评估入侵飞机对本机的威胁性大小, 并且在电子飞行仪表系统(EFIS)上显示出来。TCAS 发现入

侵飞机后的告警分为以下两个等级: (1) 当入侵飞机进入提醒区时构成了交通威胁, TCAS 发出交通咨询 (traffic advisory, TA), 使飞行员觉察并引起注意; (2) 当入侵飞机更接近, 并且进入告警区时便构成威胁, TCAS 发出决策咨询 (resolution advisory, RA), 告诉飞行员为避免碰撞需要使本机以提示的速度爬升或下降<sup>[6-8]</sup>。

TCAS 采用本机和入侵飞机到达它们之间的最接近点 (closest point of approach, CPA) 的时间, 而不是距离来决定是否发出 TA 和 RA 信息, 并根据本机和入侵飞机在最接近点的水平间隔 (horizontal miss distance, HMD) 和垂直间隔 (vertical miss distance, VMD) 来对入侵飞机进行威胁探测和评估, 预测出两机到达 CPA 的时间 Tau 以及 HMD 和 VMD<sup>[9-10]</sup>。跟踪入侵飞机的垂直高度和垂直高度变化率, 可以在相对于地面 (或海拔) 的一维坐标系下, 直接根据到 CPA 的时间计算出 VMD。而本机和入侵飞机之间的水平间

隔HMD, 其数学模型及计算比较复杂。

### 1 问题的提出

假设本机和入侵飞机在空中作匀速飞行(对相对方位不作假设), 本机速度和入侵飞机速度分别为  $v_1$  和  $v_2$ , 可获得的测量参数为入侵飞机相对本机的距离  $R$ , 相对距离变化率  $\dot{R}$  以及相对距离加速度  $\ddot{R}$ 。预测本机到CPA的时间和在最接近点与入侵飞机的距离间隔, 如图1所示。

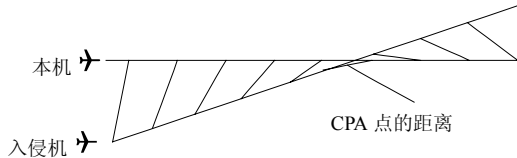


图1 两机间最接近点(CPA)的距离

### 2 Tau时间的引入

从图1可看出, 两机间最接近点的距离是两机到达最接近点时的相对斜距。假设在正常情况下, 本机和入侵飞机都在作匀速直线飞行。在以本机速度  $v_2$  运动的相对运动坐标系中, 如果以本机为观测点, 那么本机静止不动, 入侵飞机的运动速度为  $v$ 。两架飞机之间的相对速度  $v = v_2 - v_1$ , 其中,  $v_1$  为入侵飞机的速度矢量;  $v_2$  为本机的速度矢量。本机作为观测点与相对速度  $v$  之间可构成一个斜面, 可以得到该投影斜面上的二维表示, 如图2所示。

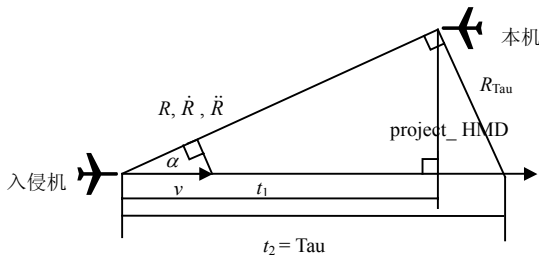


图2 以本机为观测点的投影HMD

在图2中,  $R$  为本机与入侵飞机之间的相对距离,  $\alpha$  为两机的相对速度和相对距离之间的夹角,  $t_1$  为到达两架飞机之间的最接近点CPA的时间, 而水平距离则可表示为在斜面上的投影水平距离(project\_HMD)。接近时间的定义为<sup>[4]</sup>:

$$\text{Tau} = -\frac{\text{相对距离}}{\text{相对距离变化率}} = -\frac{R}{\dot{R}} \quad (1)$$

令  $S = v \times (\text{Tau})$ , 由  $\dot{R} = v \cos \alpha$  可知:

$$R = S \cos \alpha \quad (2)$$

$$\text{Tau} = t_2 \quad (3)$$

由式(1)可看出, Tau是对实际到达CPA时间  $t_1$  的一种近似估计, 且当前时刻测量的相对距离  $R$  与Tau时间后测量的相对距离  $R_{\text{Tau}}$  之间在投影斜面上满足

直角三角形的关系, 即有:

$$S^2 = R^2 + R_{\text{Tau}}^2 \quad (4)$$

### 3 计算投影水平距离(project\_HMD)

要计算project\_HMD需要求出到达CPA的时间  $t_1$ , 这时需考虑相对距离加速度  $\ddot{R}$ , 如图3所示。在图3中以本飞机为参考点建立直角坐标, 可得到入侵飞机的径向速度  $v_R$  和横向速度  $v_\alpha$  为:

$$\begin{cases} v_R = v \cos \alpha = \dot{R} \\ v_\alpha = v \sin \alpha = R\dot{\alpha} \end{cases} \quad (5)$$

式中  $\dot{\alpha}$  为角度  $\alpha$  的变化率。

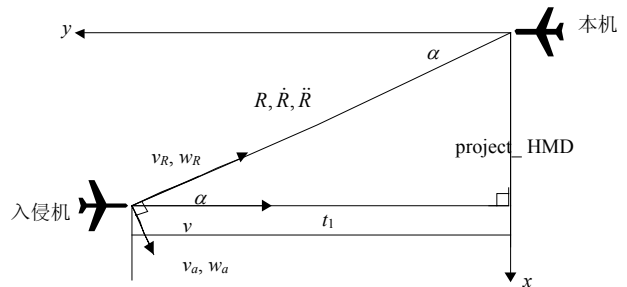


图3 以入侵飞机为参考点建立直角坐标

对于加速度可以类似地得到径向加速度  $w_R$  和横向加速度  $w_\alpha$  为:

$$\begin{cases} w_R = \ddot{R} - R\dot{\alpha}^2 \\ w_\alpha = R\ddot{\alpha} + 2\dot{R}\dot{\alpha} \end{cases} \quad (6)$$

由于入侵飞机是匀速直线运动,  $w_R = w_\alpha = 0$ , 根据式(6)可得:

$$\ddot{R} = R\dot{\alpha}^2 \quad (7)$$

将式(5)中的横向速度  $v_\alpha$  代入式(7)可得:

$$\frac{\ddot{R}}{\sin \alpha} = v\dot{\alpha} \quad (8)$$

由式(5)可得:

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{R} \sin \alpha}{R \cos \alpha} \quad (9)$$

将式(9)代入式(8), 考虑到  $\dot{R} = v \cos \alpha$ , 经推导可得:

$$\sin^2 \alpha = \frac{\ddot{R} R}{R\ddot{R} + \dot{R}^2} \quad (10)$$

由于  $\text{project\_HMD} = R \sin \alpha$ , 可得到投影水平距离平方的表达式为:

$$\text{project\_HMD}^2 = \frac{\ddot{R} R^3}{R\ddot{R} + \dot{R}^2} \quad (11)$$

### 4 工程应用中的考虑

#### 4.1 对Tau的修正

在TCAS系统中, 采用参数Tau来近似到CPA的

时间  $t_1$ 。从图2可看出,当两机越接近CPA点时, Tau 的近似误差越大。另外,当两机缓慢接近时,其相对距离变化率  $\dot{R}$  很小,这时估计的 Tau 值将很大,因此有必要对威胁的边界在近距离上进行修正。

由图2可知:

$$t_1 = \frac{R \cos \alpha}{v} \quad (12)$$

因为  $\dot{R} = v \cos \alpha$ , 代入式(12)可得:

$$t_1 = \frac{R \cos \alpha}{\dot{R} / \cos \alpha} = \frac{R(1 - \sin^2 \alpha)}{\dot{R}} \quad (13)$$

又因为  $\sin \alpha = \frac{\text{project\_HMD}}{R}$ , 代入式(13)可得:

$$t_1 = \frac{R - \frac{\text{project\_HMD}^2}{R}}{\dot{R}} \quad (14)$$

当  $\text{project\_HMD} = 0$  时, 式(14)简化为式(1),

$t_1 = \text{Tau} = R / \dot{R}$ ; 当  $\text{project\_HMD} = \text{DMOD}$  时, 式(14)变为  $t_1 = R - \frac{\text{DMOD}^2}{R} / \dot{R}$ 。为了对缓慢接近的入侵飞机进行防撞, 限定飞机的速度至少为 3.048 m/s。因此, 将式(14)中的分母取为  $\dot{R} = \max(\dot{R}, 3.048)$ , 可得实际工程中对 Tau 的修正公式为:

$$\text{Tau}(\text{MOD}) = \frac{R - \frac{\text{DMOD}^2}{R}}{\max(\dot{R}, 3.048)} \quad (15)$$

在式(15)中采用了一个修正距离(DMOD), 该距离增加了对缓慢接近飞机冲突的保护。同时, 当接近 CPA 点时 ( $R$  相对较小), 由式(15)计算得到的 Tau(MOD) 值也更接近  $t_1$ ; 如图4所示, 在接近 CPA 点时, Tau(MOD) 比 Tau 更近似  $t_1$ 。DMOD 的取值范围是 0.555 6 ~ 2.407 6 km。

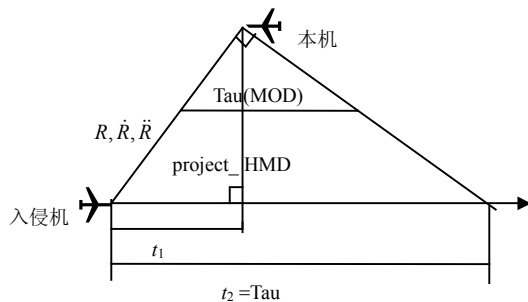


图4 对接近时间 Tau 的修正

根据式(12)、式(10)可得到  $t_1$  的另外一种表达式:

$$t_1 = \frac{R \dot{R}}{v^2} = \frac{R \dot{R}}{R \ddot{R} + \dot{R}^2} = \frac{\dot{R}}{\ddot{R}} \left( \frac{R \ddot{R}}{R \ddot{R} + \dot{R}^2} \right) = \frac{\dot{R}}{\ddot{R}} \sin^2 \alpha \quad (16)$$

#### 4.2 project\_HMD 的使用

本文对 project\_HMD 的推导过程是假设两机作匀速飞行, 没有考虑飞机在空中的机动情况, 即上

述模型是建立在观测间隔内飞机是匀速运动的。因此, 需要在每次跟踪周期内探测两机间是否发生了相对机动, 如果发生了相对机动, 则不计算更新 project\_HMD。

机动探测与目标跟踪器模型有关。一般来说, 对相对机动的探测可利用相对加速度的变化率  $\ddot{R}$  来判定。如果  $\ddot{R} < 0$  或相对加速度  $\dot{R} < -0.457 2 \text{ m/s}^2$ , 则可认为发生了相对 CPA 点的汇聚机动<sup>[1]</sup>, 即预测的 project\_HMD 比实际的 HMD 大。此时预测的 project\_HMD 不能用来进行下一步的威胁探测<sup>[4]</sup>。

#### 4.3 根据防撞模型计算水平跟踪的预测值

由图3可知,  $v = \dot{R} / \cos \alpha$ ; 又由式(10)可得:

$$\cos^2 \alpha = \frac{\dot{R}^2}{R \ddot{R} + \dot{R}^2} \quad (17)$$

因此有:

$$v = (R \ddot{R} + \dot{R}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

令  $X$  表示两机间距在斜平面上的  $x$  坐标,  $Y$  表示在斜平面上的  $y$  坐标,  $Y_{\text{DOT}} = v$ ,  $\Delta t$  为测量间隔, 根据图3可得:

$$X = \left( \frac{\ddot{R} R^3}{R \ddot{R} + \dot{R}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

$$Y = R \cos \alpha + Y_{\text{DOT}} \Delta t = R \dot{R} / Y_{\text{DOT}} + Y_{\text{DOT}} \Delta t \quad (20)$$

因此, 两机相对距离的预测值为:

$$\tilde{R} = (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

设经  $\Delta t$  后两机间的相对角度为  $\alpha'$ , 则有相对距离变化率的预测值为:

$$\tilde{\dot{R}} = v \cos \alpha' = Y Y_{\text{DOT}} / \tilde{R} \quad (22)$$

又设经  $\Delta t$  后两机到达 CPA 的时间为  $t'_1$ , 则根据图3和式(16)可得:

$$Y = v t'_1 = Y_{\text{DOT}} \frac{\tilde{R}}{\tilde{\dot{R}}} \sin^2 \alpha' \quad (23)$$

将  $\sin \alpha' = \frac{X}{\tilde{R}}$  和式(22)代入式(23), 可得到相对加速度的预测值为:

$$\tilde{\ddot{R}} = \frac{X^2 Y_{\text{DOT}}^2}{\tilde{R}^3} \quad (24)$$

式(21)、式(22)、式(24)给出了水平跟踪的一步预测值。

## 5 结束语

目前国内对 TCAS 系统防撞机制的研究工作较少, 缺乏有关资料。本文从数学模型的角度考察了 TCAS 的防撞机理。为了在垂直方向上给飞行员提供

准确的避免碰撞的决策咨询, TCAS系统必须在本机与入侵飞机到达最近点(CPA)之前进行预测。根据本机与入侵飞机在空中的相对几何位置, 计算出本机和入侵飞机在当前时刻和今后的  $\tau$  时刻之间的飞行轨迹, 然后根据预测的飞行轨迹来判断两架飞机是否会相撞, 从而确定本机应该采取的机动飞行措施。总之, 在CAS逻辑中, 两机飞行到最近点CPA的时间、HMD和VMD是刻画空中碰撞的主要参数, 采用它们能准确地描述TCAS系统的防撞机制。

### 参 考 文 献

- [1] WILLIAMSON T, SPENCER N A. Development and operation of the traffic alert and collision avoidance system (TCAS)[J]. Proceedings of the IEEE, 1989, 77(11): 1735-1744.
- [2] U.S. Department of Transportation Federal Aviation Administration. Introduction to TCAS II version 7 [EB/OL]. [2000-05-11]. <http://www.arinc.com>.
- [3] LOVE W D. Preview of TCAS II version 7[EB/OL]. [2000-05-11]. <http://www.mitre.org>.
- [4] SHIRAKAWA M, SUMIYA Y, OZEKI S. A numerical evaluation method of the revised ACAS algorithms using smoothed spline interpolation[C]//IEEE Aerospace Conference.

- Big Sky, MT, USA: IEEE, 2000.
- [5] RTCA. Minimum operational performance standards for traffic alert and collision avoidance systems II (TCAS II) airborne equipment[S]//RTCA/DO-185A, 1997.
- [6] GAZIT R Y, POWELL J D. Aircraft collision avoidance based on GPS position broadcasts[C]//15th AIAA/IEEE Digital Avionics Systems Conference. Atlanta, GA, USA: IEEE, 1996.
- [7] ABDUL-BAKI B, BALDWIN J, RUDEL M P. Independent validation and verification of the TCAS II collision avoidance subsystem[J]. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 2000, 15(8): 3-9.
- [8] ZEITLIN A D, LOVE W D, CIEPLAK J J. Enhancements to the next generation collision avoidance system: opportunities for greater safety and efficiency[C]//AIAA/IEEE Digital Avionics Systems Conference. Cambridge, MA, USA: IEEE, 1995.
- [9] RTCA. Safety analysis of proposed changes to TCAS RA reversal logic[S]. RTCA DO-298, Washington D. C., USA: RTCA, 2005.
- [10] KUCHAR J K, DRUMM A C. The traffic alert and collision avoidance system[J]. LINC Lab, 2007, 16(2): 277-295.

编辑 黄 莘

(上接第540页)

## 4 结 论

角锥喇叭存在等效相位中心, 且等效相位中心和等相位面宽度随相位偏差  $\beta$  的变化而变化, 当  $\beta \rightarrow 0$  时, 等效相位中心趋向等于用曲率中心的方法计算得到的结果, 等相位面只存在于辐射的最大指向附近; 当然  $I_E(\theta)$  是与  $\theta$ 、 $\varphi$  及喇叭尺寸有关的函数, 等效相位中心和等相位面宽度也与喇叭的几何尺寸有关系。因此, 在工程设计中, 可以根据需要来确定等效相位中心的位置。

### 参 考 文 献

- [1] HU Y Y. A method of determining phase centers and its application to electro-magnetic horns[J]. Journal-Franklin Inst, 1961, 271(1): 31-39.
- [2] UJII H, YONEYAMA T, NISHIDA S. A consideration of the phase center of aperture antennas[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1967, 15(3): 478-480.
- [3] MUEHL DORF E I. The phase center of horn antennas[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1970, 18, (5): 753-760.
- [4] BAUR K. The phase center of aperture radiators[J]. Arch Elek Ibertragung, 1955, 9: 541-546.

- [5] WAIDELICH D L. The phase centers of aperture antennas[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1980, 28(2): 263-264.
- [6] MURPHY J A, PADMAN R. Phase centers of horn antennas using Gaussian beam mode analysis[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1990, 38(8): 1306-1310.
- [7] 林昌禄, 陈 海, 吴为公. 近代天线设计[M]. 北京: 人民邮电出版社, 1990.  
LIN Cang-lu, CHEN Hai, WU Wei-gong. Modern antenna design[M]. Beijing: Posts&Telecom Press, 1990.
- [8] 王世锦. 天线微波程序集[M]. 北京: 宇航出版社, 1989.  
WANG Si-jin. Microwave antenna procedures assembly[M]. Beijing: Astronautics Publishing House, 1989.
- [9] 丁晓磊, 王 建, 林昌禄. 对数周期偶极子天线相位中心的分析与计算[J]. 电子学报, 2003, 31(9): 1375-1377.  
DING Xiao-lei, WANG Jian, LIN Cang-lu. Analysis and calculation for the phase center of the LPDA[J]. Chinese Journal of Electronics, 2003, 31(9): 1375-1377.
- [10] 金元松, 董明玉, 何绍林, 等. 对数周期偶极子天线的可变相位中心[J]. 电波科学学报, 2001, 16(3): 323-328.  
JIN Yuan-song, DONG Ming-yu, HE Sao-lin, et al. The variable phase center of the log-periodic dipole antenna[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2001, 16(3): 323-328.

编辑 税 红