

# 扩展卡尔曼滤波估计载波参数的算法研究

陈培, 杨颖, 王云, 陈杰

(中国科学院微电子研究所 北京 朝阳区 100029)

**【摘要】**提出了一种在接收信号幅度未知的情况下进行载波参数估计的扩展卡尔曼滤波算法, 该算法把信号幅度及伪码自相关的乘积作为一个独立变量和载波相位、频率一起组成状态向量进行扩展卡尔曼滤波。理论分析表明该算法本质上是具有可变增益的幅度锁定环和相位锁定环的联合估计, 并给出了稳态时环路闭环传输函数和等效噪声带宽的解析表达式。仿真结果表明该算法在高低信噪比下, 均具有较高的估计精度和较快的收敛速度。

**关键词** 幅度锁定环; 扩展卡尔曼滤波; 参数估计; 相位锁定环

中图分类号 TN911.72

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2009.04.008

## Estimation for Carrier Parameters Based on the Extended Kalman Filter

CHEN Pei, YANG Ying, WANG Yun, and CHEN Jie

(Institute of Microelectronics, Chinese Academy of Sciences Chaoyang Beijing 100029)

**Abstract** A method for estimating carrier parameters is proposed by using extended Kalman filter (EKF) when the amplitude of the received signal is unknown. In the method, the state vector of EKF is composed of the carrier phase, the frequency and the product of the signal amplitude and auto-correlation of PN code. Theoretical analysis illustrates that the method is essentially the joint estimation of amplitude-locked loop and phase-locked loop with variable gains. The closed-form expression of transform function and equivalent noise bandwidth are obtained. Numerical simulation shows that the method proposed can obtain the high accuracy of estimation and the short convergent time.

**Key words** amplitude-locked loop; extended Kalman filter; parameter estimation; phase-locked loop

直接序列扩频通信系统的接收机在数据解调之前, 必须进行伪码同步和载波同步。目前伪码同步算法已有大量的研究成果<sup>[1-3]</sup>, 而载波由于其频率较高而具有较高的动态, 因此要求载波同步算法具有较高动态容忍能力的同时尽量保持较高的估计精度和较低的跟踪门限, 这使得载波同步算法成为研究的热点之一。

基于扩展卡尔曼滤波技术的载波参数估计方法具有较强动态容忍能力和较低跟踪门限, 并且较易实现, 因此得到广泛应用, 国内外在这一领域进行了大量的研究。文献[4-5]研究了EKF用于估计载波参数的基本原理及算法的迭代流程, 其中状态向量由相位、频率及频率的高阶导数构成; 文献[6-7]研究了频率扩展卡尔曼滤波(frequency EKF, FEKF)算法, 即只估计载波频率及频率变化率, 而不同时估计相位以得到更低的跟踪门限并可以降低EKF的阶数, 但是FEKF的估计方差与EKF算法相比较较大; 文

献[8]研究了利用EKF估计出接收信号频率来辅助锁相环以跟踪载波信号的算法。在这些算法中, 进行EKF估计前需要得到接收信号的幅度, 在幅度已知的情况下再对信号的相位、频率和频率的高阶导数进行估计。

文献[9]通过I/Q两路求出信号包络作为幅度的估计, 然后进行EKF迭代。该方法在高信噪比下能获得较好的性能, 但是低信噪比下因为包络估计幅度的误差很大, 导致EKF估计的精度下降和收敛速度减慢。此外还可以根据接收信号幅度的动态范围, 选定一个固定的幅度作为所有信噪比下幅度的估计。该方法在幅度动态范围不大时, 可以保证EKF能够正常工作, 但是在幅度动态范围较大时, 容易因模型失配造成估计精度和收敛速度恶化, 严重时会导致EKF发散。

为此本文提出一种扩展卡尔曼滤波估计载波参数的算法, 把信号幅度及伪码自相关的乘积看作一

收稿日期: 2008-02-28; 修回日期: 2008-08-24

基金项目: 国家863计划(2007AA12Z344)

作者简介: 陈培(1982-), 男, 博士生, 主要从事集成电路设计及系统应用方面的研究。

个独立变量和相位, 与频率联合作为状态向量进行EKF估计, 因而不需要预先得到信号幅度。

## 1 幅度未知的EKF估计算法

直接序列扩频系统接受信号模型为<sup>[10]</sup>:

$$r(t) = \sqrt{2P_s} d(t) c(t + \tau) \cos(\omega_c t + \omega_d t + \varphi) + n(t) \quad (1)$$

式中  $P_s$  是接收功率;  $d(t)$  是数据调制, 假定  $d(t) = 1$ ;  $c(t + \tau)$  是延时的伪码;  $\omega_0$  是中频频率;  $\omega_d$  是多普勒频移;  $n(t)$  是均值为零、方差为  $\sigma^2$  的高斯白噪声。码速率为  $f_c$ , 奈奎斯特采样率为  $f_s = 2f_c$ , 可证明以该采样率采样时噪声样点相互独立。为提高信噪比, 需先相干积分, 时间为  $T$ , 则第  $k$  次相干积分结果为:

$$I(k) = G_p A(k) \cos(k\omega_d T + \pi f_d T + \varphi) + N_1(k) \quad (2)$$

$$Q(k) = -G_p A(k) \sin(k\omega_d T + \pi f_d T + \varphi) + N_Q(k) \quad (3)$$

式中  $G_p = \sin(\pi f_d T) / \sin(\pi f_d T_s)$ ;  $A(k) = R(\tau_k) \times \sqrt{2P_s} / 2$ ; 令  $N = T / T_s$ , 则  $N_1(k) \sim N(0, N\sigma^2 / 2)$ ,  $N_Q(k) \sim N(0, N\sigma^2 / 2)$ , 且  $E[N_1(k)N_Q(k)] = 0$ ;  $G_p$  为相干积分的处理增益, 在EKF估计中可以认为是一固定量。则系统观测向量为:

$$\mathbf{Y}(k) = [I(k), Q(k)]^T \quad (4)$$

传统的EKF估计算法是假定  $A(k)$  为已知量, 状态向量由  $\theta(k)$  和  $\omega_d(k)$  构成。状态方程采用运动模型(kinematic model)的建模方法来建立<sup>[11]</sup>, 即:

$$\begin{cases} \theta(kT) = \theta((k-1)T) + \omega_d((k-1)T)T + w_1(k) \\ \omega_d(kT) = \omega_d((k-1)T) + w_2(k) \end{cases} \quad (5)$$

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} G_p \cos(\hat{\theta}(k/k-1)) & -\hat{A}(k/k-1)G_p \sin(\hat{\theta}(k/k-1)) & 0 \\ -G_p \sin(\hat{\theta}(k/k-1)) & -\hat{A}(k/k-1)G_p \cos(\hat{\theta}(k/k-1)) & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

观测噪声方差阵为:

$$\mathbf{R} = \sigma_n^2 \mathbf{I}_{2 \times 2}, \quad \sigma_n^2 = N\sigma^2 / 2 \quad (12)$$

定义  $\mathbf{P}$  为误差协方差阵, 根据以上分析, 可以进行标准EKF算法迭代<sup>[12]</sup>:

$$\hat{\mathbf{x}}(k/k) = \hat{\mathbf{x}}(k/k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot (\mathbf{Y}(k) - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)))$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k/k-1)\mathbf{H}^T(k) \cdot$$

$$(\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k/k-1)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R})^{-1}$$

$$\mathbf{P}(k/k) = \mathbf{P}(k/k-1) - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k/k-1)$$

$$\mathbf{P}(k+1/k) = \alpha^2 \mathbf{F}\mathbf{P}(k/k)\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}_m$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1/k) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k/k)$$

$$\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}(k+1/k)) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k+1/k)}$$

式中  $\alpha$  为调整因子;  $\alpha \geq 1$ , 主要用以调节EKF的收敛速度。

其中:

$$w_i(k) = \int_{(k-1)T}^{kT} \frac{\tau^{2-i}}{(2-i)!} J(\tau) d\tau \quad i=1,2 \quad (6)$$

式中  $J(\tau)$  是相位的二阶导数, 代表信号中含有的更高的随机动态, 在这里被建模成均值为 0、方差为  $\sigma_j^2$  的系统白噪声。则系统噪声  $\mathbf{W} = [w_1, w_2]^T$  的协方差矩阵为<sup>[3]</sup>:

$$\mathbf{Q} = E[\mathbf{W}\mathbf{W}^T] = \sigma_j^2 T_n^2 \begin{bmatrix} T^2/3 & T/2 \\ T/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

然而, 若考虑到  $A(k)$  包含了信号幅度及伪码的自相关, 信号幅度短时间内变化缓慢, 而当伪码进行跟踪时, 其自相关在“1”附近抖动, 因此  $A(k)$  可以建模成一个含有一定随机抖动的物理过程, 即:

$$A(k) = A(k-1) + w_A(k) \quad (8)$$

式中  $w_A(k)$  可以认为是均值为 0、方差为  $\sigma_A^2$  的白噪声。则相应的状态矩阵  $\mathbf{F}$  和系统噪声协方差矩阵  $\mathbf{Q}_m$  分别为:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_m = \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (9)$$

新的状态方程为  $\mathbf{x}(k) = [A(k), \theta(k), \omega_d(k)]^T$ , 由式(4)可得系统观测方程为:

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{H}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{N}(k) = [I(k), Q(k)]^T \quad (10)$$

对应的观测矩阵为:  $\mathbf{H}(k) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)}$ , 即:

## 2 理论分析

为分析方便, 令  $\phi = \hat{\theta}(k/k-1)$ ,  $\hat{A}_k = \hat{A}(k/k-1)$ , 每次迭代时估计误差协方差阵为:

$$\mathbf{P}(k/k-1) = \begin{bmatrix} \sigma_{A_k}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{1k}^2 & \beta_k \\ 0 & \beta_k & \sigma_{2k}^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

由式(11)~式(13)得第  $k$  次迭代时增益矩阵为:

$$\mathbf{K}(k) =$$

$$\mathbf{P}(k/k-1)\mathbf{H}^T(k)(\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k/k-1)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R})^{-1} =$$

$$\frac{1}{G_p^2 \sigma_{A_k}^2 + \sigma_n^2} \begin{bmatrix} G_p \sigma_{A_k}^2 \cos \phi & -G_p \sigma_{A_k}^2 \sin \phi \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\frac{1}{G_p^2 \hat{A}_k^2 \sigma_{1k}^2 + \sigma_n^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -G_p \hat{A}_k \sigma_{1k}^2 \sin \phi & -G_p \hat{A}_k \sigma_{1k}^2 \cos \phi \\ -G_p \hat{A}_k \beta_k \sin \phi & -G_p \hat{A}_k \beta_k \cos \phi \end{bmatrix} \quad (14)$$

重写迭代流程中的一步预测方程:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1/k) =$$

$$\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k/k-1) + \mathbf{F}\mathbf{K}(k)(\mathbf{Y}(k) - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}(k/k-1))) \quad (15)$$

为书写方便, 在以下分析中  $k+1/k$  用  $k+1$  来表示;  $k/k-1$  用  $k$  来表示。把式(9)、式(10)、式(14)代入式(15)中得幅度及相位频率的迭代关系分别为:

$$\hat{A}(k+1) = \hat{A}(k) + g_{Ak} [A(k) \cos(\theta(k) - \hat{\theta}(k)) - \hat{A}(k)] \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}(k+1) \\ \hat{\omega}_d(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}(k) \\ \hat{\omega}_d(k) \end{bmatrix} + g_k \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1k}^2 \\ \beta_k \end{bmatrix} \sin(\theta(k) - \hat{\theta}(k)) \quad (17)$$

其中:

$$g_{Ak} = \frac{G_p^2 \sigma_{AK}^2}{G_p^2 \sigma_{AK}^2 + \sigma_n^2}, g_k = \frac{G_p^2 A(k) \hat{A}(k) \sigma_{1k}^2}{G_p^2 A(k) \hat{A}(k) \sigma_{1k}^2 + \sigma_n^2}$$

从式(16)、式(17)可以看出幅度迭代和相位频率迭代耦合在一起, 迭代的过程相当于两个闭环负反馈过程, 下面分别对幅度和相位进行分析。

### 2.1 幅度估计分析

对式(16)关于  $A(k)$  和  $\hat{A}(k)$  求Z变换, 得:

$$z\hat{A}(z) = \hat{A}(z) + g_{Ak} [A(z) \cos(\theta(k) - \hat{\theta}(k)) - \hat{A}(z)] \quad (18)$$

则其传输函数为:

$$H_A(z) = \frac{\hat{A}(z)}{A(z)} = \frac{g_{Ak} \cos(\theta(k) - \hat{\theta}(k))}{z - (1 - g_{Ak})} \quad (19)$$

由以上分析知  $0 < g_{Ak} < 1$ , 因此闭环传输函数的极点必位于单位圆内, 系统稳定。式(19)也说明幅度估计的本质是个一阶幅度锁定环路(ALL)。由于  $g_{Ak}$  在迭代过程中不断发生变化, 因此式(16)表示的 ALL 是具有可变增益的环路, 这点与传统的固定增益 ALL 环路不同。当系统处于稳定时,  $g_{Ak} \rightarrow g_A$ ,  $\sigma_{Ak}^2 \rightarrow \sigma_{As}^2$  及  $\hat{\theta}(k) \rightarrow \theta(k)$ , 因此稳态时 ALL 的闭环传输函数为:

$$H_{As}(z) = \frac{G_p^2 \sigma_{As}^2}{(G_p^2 \sigma_{As}^2 + \sigma_n^2)z - \sigma_n^2} \quad (20)$$

### 2.2 相位频率估计分析

当  $\theta(k) - \hat{\theta}(k)$  较小时, 有以下近似:

$$\sin(\theta(k) - \hat{\theta}(k)) \approx \theta(k) - \hat{\theta}(k)$$

代入式(17)中, 对  $\theta(k)$  和  $\omega_d(k)$  进行 Z 变换, 得:

$$\begin{bmatrix} z\hat{\theta}(z) \\ z\hat{\omega}_d(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}(z) \\ \hat{\omega}_d(z) \end{bmatrix} + g_k \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1k}^2 \\ \beta_k \end{bmatrix} \cdot (\theta(z) - \hat{\theta}(z)) \quad (21)$$

解式(21)的方程组, 可以得到关于相位的闭环传输函数为:

$$H(z) = \frac{\hat{\theta}(z)}{\theta(z)} = \frac{g_k(\sigma_{1k}^2 + \beta_k T)z - g_k \sigma_{1k}^2}{(z-1)^2 + g_k(\sigma_{1k}^2 + \beta_k T)z - g_k \sigma_{1k}^2} \quad (22)$$

式(22)说明相位估计本质上是个数字锁相环(DPLL), 由于  $g_k$ 、 $\sigma_{1k}^2$  及  $\beta_k$  在迭代过程中可变, 因此式(22)表示该 DPLL 是具有可变增益的环路, 这点与传统固定增益的 DPLL 不同。当环路处于稳定状态时  $\hat{A} \rightarrow A$ ,  $g_k \rightarrow g$ ,  $\sigma_{1k}^2 \rightarrow \sigma_1^2$  及  $\beta_k \rightarrow \beta$ , 并令  $\rho = G_p^2 A \hat{A} / \sigma_n^2$  表示 EKF 输入信噪比, 则稳态时相位估计的闭环传输函数为:

$$H_s(z) = \frac{(\sigma_1^2 + \beta T)z - \sigma_1^2}{(\sigma_1^2 + 1/\rho)z^2 + (\beta T - 2/\rho - \sigma_1^2)z + 1/\rho} \quad (23)$$

数字环路的等效噪声带宽定义为:

$$B_{Hs-L} = \frac{1}{2T} \frac{1}{j2\pi} \oint_{|z|=1} H(z)H(z^{-1})z^{-1} dz \quad (24)$$

把式(23)代入式(24)中, 根据留数定理求得:

$$B_{Hs-L} = \frac{1}{2T} \frac{(b_0^2 + b_1^2)(a_0 + a_2) - 2b_0 b_1 a_1}{2T(a_0^2 - a_2^2)(a_0 + a_2) - (a_0 - a_2)a_1^2} \quad (25)$$

式中  $a_0 = \sigma_1^2 + 1/\rho$ ;  $a_1 = \beta T - 2/\rho - \sigma_1^2$ ;  $a_2 = 1/\rho$ ;  $b_0 = \sigma_1^2 + \beta T$ ;  $b_1 = -\sigma_1^2$ 。稳态时  $\sigma_1^2$  和  $\beta$  可由下面的离散代数 Riccati 方程求得:

$\alpha^2 \mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{F}^T - \mathbf{P} - \alpha^2 \mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}_m = 0$   
该方程的求解方法参见文献[13], 其解仅与  $\alpha$ 、 $T$ 、 $\rho$  及  $\sigma_j^2$  有关, 即:

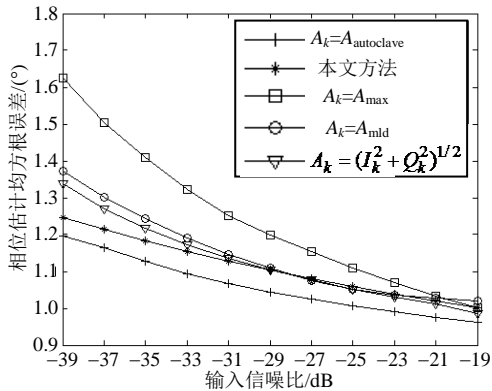
$$(\sigma_1^2, \beta) = f(\alpha, T, \rho, \sigma_j^2) \quad (26)$$

因此这4个参数也决定了算法的稳态估计性能。

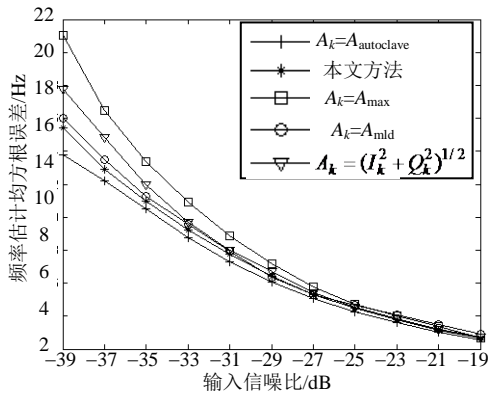
## 3 数值分析及仿真

仿真时以GPS C/A信号为例, 伪码周期1 ms, 码速率 $f_c=1.023$  MHz, 中频 $f_{IF}=1.405$  MHz, 采样率 $f_s=8.184$  MHz, 载波多普勒偏移20 Hz。假定中频输入信噪比在[-19 dB, -39 dB]的范围内, 对应的幅度范围为 $[A_{\max}, A_{\min}]$ , 记  $A_{\text{mid}}$  为中间信噪比即-29 dB 对应的幅度, 相干积分时间  $T=2$  ms 以保证足够的相干增益。EKF迭代时, 可以选择该幅度范围的中间值作为固定的幅度估计, 以兼顾高低信噪比, 或采用文献[9]中信号幅度由  $A_k = \sqrt{I_k^2 + Q_k^2}$  的包络估

计幅度。下面对这两种方法和本文所述方法的稳态性能及收敛时间进行仿真(注: 仿真时  $\alpha = 1.007$ ,  $\sigma_f^2 = 10^3$ )。



a. 不同方法的稳态相位估计精度比较



b. 不同方法的稳态频率估计精度比较

图1 不同方法的稳态估计精度比较

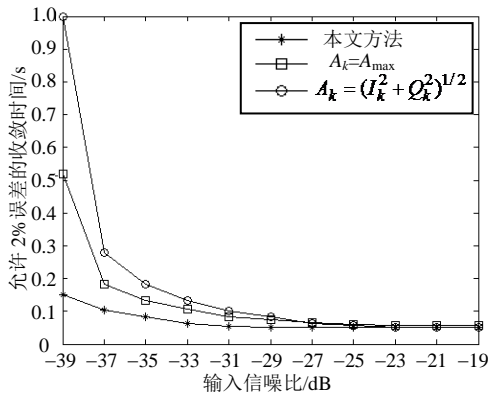
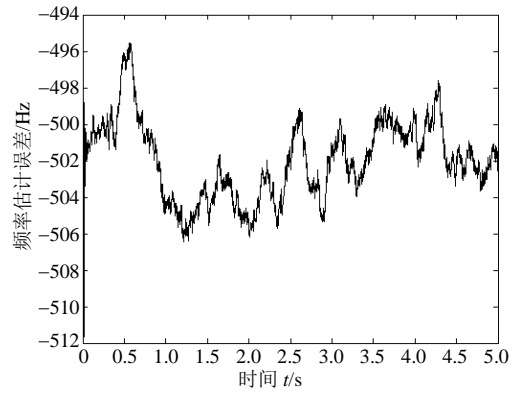
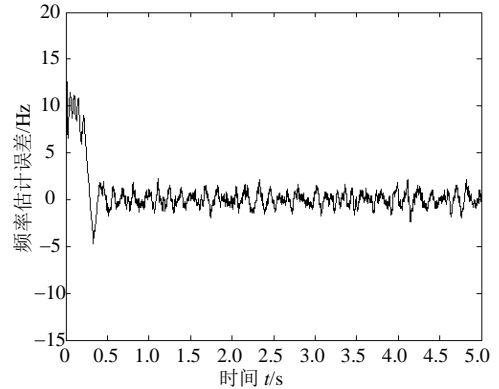


图2 不同方法的收敛时间比较

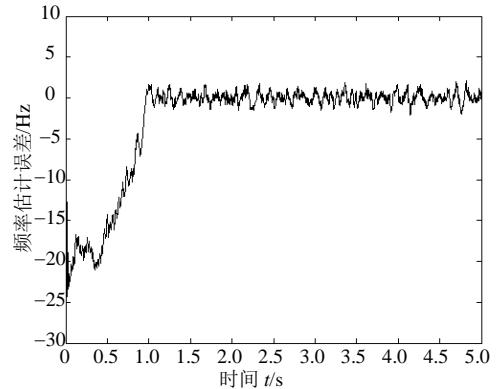
图1中, 分别仿真了不同方法下, EKF的稳态估计精度, 为便于比较, 把理论上精确已知信号幅度时的估计精度作为最优的估计精度。从图中可以看出在高信噪比下, 几种方法的估计精度相差不大,  $A_k = A_{max}$  时的固定幅度方法精度最低, 低信噪比下, 固定幅度方法和包络估计幅度方法的估计精度均低于本文所述方法。图2表示不同方法下, 估计误差达到2%时的收敛时间, 低信噪比下, 本文所述方法明显优于固定幅度方法和包络估计幅度方法。



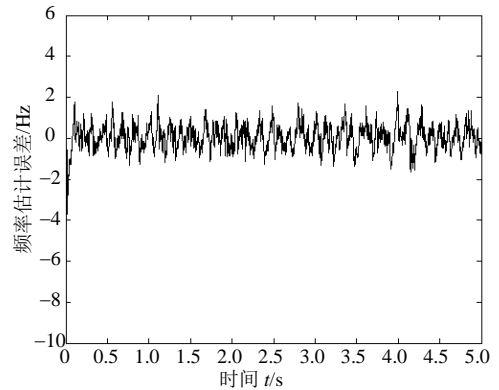
a.  $A_k = A_{min}$ 时, 输入信噪比为-25 dB时EKF发散



b.  $A_k = A_{mid}$ 时, 输入信噪比为-39 dB时收敛情况



c.  $A_k^2 = I_k^2 + Q_k^2$ 时, 输入信噪比为-39 dB时收敛情况



d. 论文所述方法, 输入信噪比为-39 dB时收敛情况

图3 不同方法的收敛情况比较

(下转第604页)