

# Delaunay三角剖分插值用于超分辨率成像

李光伟<sup>1,2</sup>, 陈志杰<sup>2</sup>, 李建勋<sup>2</sup>

(1. 清华大学精密仪器与机械学系 北京 海淀区 100084; 2. 空军装备研究院雷达与电子对抗研究所 北京 海淀区 100085)

**【摘要】**微变焦超分辨率成像在插值重建方面比较困难, 目前基于最小二乘估计的频域模型和空域模型也都存在一些局限性。为了兼顾超分辨率成像的实时性和精确性, 该文在图像重建过程中, 借鉴Delaunay三角剖分的数学概念, 采用随机增量算法, 定义了基于Delaunay三角剖分的插值算法。该算法可以提高分辨率, 降低运算量。仿真实验结果表明, 该算法在图像重建的时间和均方误差方面, 均优于共轭梯度最小二乘法, 其中基于Delaunay三角剖分的三次方插值算法的优越性更为突出。

**关键词** 插值; 微变焦; 超分辨率; 三角剖分

中图分类号 TP302

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2009.04.033

## Delaunay Triangulation Interpolation Used in Super-Resolution Imaging

LI Guang-wei<sup>1,2</sup>, CHEN Zhi-jie<sup>2</sup>, and LI Jian-xun<sup>2</sup>

(1. Department of Precision Instruments and Mechanology, Tsinghua University Haidian Beijing 100084;

2. Radar and ECM Institute, Equipment Academy of Air Force Haidian Beijing 100085)

**Abstract** micro zooming super-resolution imaging is difficult for interpolation and reconstruction, and there are some limitations in the frequency domain model and space domain model based on LSE (least squares estimation). By referring to the mathematical concept of Delaunay triangulation and randomized incremental algorithm, an interpolation algorithm based on Delaunay triangulation in the course of image reconstruction is defined for both real time and accuracy of super-resolution imaging. This algorithm can improve the resolution and reduce the amount of calculation. The results of simulation experiment show that this method is better than the method based on conjugate gradient least square (CGLS) in the speed and error of image reconstruction.

**Key words** interpolation; micro-zoom; superresolution; triangulation

微变焦法超分辨率成像技术通过微变光学系统焦距获得同一场景多帧放大倍数不同的图像, 然后由此重构高分辨率图像。由于改变光学放大率只需控制镜片在光轴方向上的位移, 通过变焦镜头即可实现, 避免了采用微扫描中控制水平、垂直两个方向位移的高精度机械装置, 而重建效果与微扫描效果类似<sup>[1-3]</sup>。

微变焦法超分辨率成像不满足多通道采样理论, 插值重建比较困难, 常用的微变焦法超分辨率成像是采用解方程组的方法进行最小二乘估计, 目前已有对频域模型和空域模型的研究。连续频域混叠模型是把欠采样的低分辨率图像看作是高分辨率图像发生频谱混叠后的结果, 建模后联立成一个稀疏线性方程组, 然后通过求最小二乘解, 并经逆傅里叶变换得到高分辨率图像<sup>[4]</sup>。该方法计算量和存储量都很大, 不能满足大尺寸图像的实时处理, 而

且高精度的图像配准也难于实现。空域模型的核心思想是把低分辨率图像的每个像素的灰度值看作是待求高分辨率图像上对应相关区域内所有像素灰度值的线性加权和, 对所有低分辨率图像的每个像素的灰度值列出一个线性方程, 联立得到一个稀疏线性方程组, 其最小二乘解即为超分辨率重建出的高分辨率图像<sup>[5]</sup>。该方法利用基于改进Cimmino行处理迭代法解稀疏线性方程组, 但迭代收敛速度仍较慢。

因此, 为了减少微变焦超分辨率成像的重建时间, 提高实时性, 本文借鉴三角剖分的概念和算法, 定义了基于Delaunay三角剖分的插值算法, 应用于超分辨率成像过程。仿真实验证明了该方法在精确度和实时性方面都有独到的优势。

### 1 Delaunay三角剖分

点集的三角剖分问题是计算几何的经典问题,

收稿日期: 2008-03-21; 修回日期: 2008-10-20

基金项目: 部级预研项目

作者简介: 李光伟(1963-), 男, 博士生, 高级工程师, 主要从事光学成像和图像处理方面的研究。

对数值分析(如有限元分析)、计算机图形学等意义重大,目前已广泛应用在几何形体重构、图形处理、模式识别、物理、化学、分子生物学,以及机器人、城市规划、经济决策过程和物理方程中偏微分方程的求解等方面<sup>[6]</sup>。尤其是Delaunay三角剖分,是一种优化的空间结构,具有严格的数学定义和完备的基础理论,有很好的可操作性,因而与一般的三角剖分相比有极大的优越性<sup>[7-8]</sup>。

### 1.1 概念与定义<sup>[9-10]</sup>

**定义 1** 二维三角剖分:假设 $V$ 是二维实数域上的有限点集,边 $e$ 是由点集中的点作为端点构成的封闭线段, $E$ 为 $e$ 的集合。那么该点集 $V$ 的一个三角剖分 $T=(V,E)$ 是一个平面图 $G$ ,该平面图满足以下条件:

- (1) 除了端点,平面图中的边不包含点集中的任何点;
- (2) 没有相交边;
- (3) 平面图中所有的面都是三角面,且所有三角面的合集就是点集 $V$ 的凸包。

**定义 2** Delaunay边:假设 $E$ 中的一条边 $e$ (两个端点为 $a$ 、 $b$ ) $e$ 若满足下列条件,则称之为Delaunay边:存在一个圆经过 $a$ 、 $b$ 两点,圆内不含点集 $V$ 中任何的点,这一特性又称空外接圆特性。

**定义 3** Delaunay三角剖分:如果点集 $V$ 的一个三角剖分 $T$ 只包含Delaunay边,那么该三角剖分称为Delaunay三角剖分。

### 1.2 Delaunay三角剖分算法

目前常用的算法分为:扫描线法(sweep line)、随机增量法(randomized incremental algorithm)、分治法(divide and conquer)等等。由于随机增量法遵循增量法的一贯思路,即按照随机的顺序依次插入点集中的点,在整个过程中仅需要维护并更新一个与当前点集对应的Delaunay三角剖分<sup>[11-12]</sup>,所以本文选用随机增量算法。

考虑插入 $v_i$ 点的情况,由于前面插入所有的点 $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$ 构成的 $DT(v_1, v_2, \dots, v_{i-1})$ 已经是Delaunay三角剖分,只需要考虑插入点 $v_i$ 后引起的变化,并作调整使得 $DT(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}) \cup v_i$ 成为新的Delaunay三角剖分 $DT(v_1, v_2, \dots, v_i)$ 。

插入调整的具体过程为:首先确定 $v_i$ 落在哪个三角形中(或边上),然后将 $v_i$ 与三角形3个顶点连接起来构成3个三角形(或与共边的两个三角形的对顶点连接起来构成4个三角形),由于新生成的边以及原来的边可能不是或不再是Delaunay边,故进行边翻转来调整使之都成为Delaunay边,从而得出

$DT(v_1, v_2, \dots, v_i)$ 。

对于点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_N\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,随机增量算法如下:

- (1) 选取一个大三角形 $v_1 - v_2 - v_3$ 包含 $V$ ;
- (2) 在 $V$ 中任取一个点 $v_i$ ,并将点 $v_i$ 从 $V$ 中删去, $v_i$ 必落入一个三角形中(或边上);
- (3) 找到所有外接圆包含 $v_i$ 的三角形,构成一个凸包;
- (4) 删去该凸包中的所有边;
- (5) 将 $v_i$ 与该凸包所有顶点连接;
- (6) 得到当前的Delaunay三角剖分;
- (7) 如果 $V \neq \Phi$ ,则转向步骤(2);否则,结束。

## 2 基于Delaunay三角剖分的插值算法

经典的插值理论表明,误差界的大小依赖于三角剖分的最小角,“瘦长”形的三角剖分对插值精度是不利的,而Delaunay三角剖分总是尽可能避免“瘦长”形的三角形,剖分结果自动向正三角形逼近,这对于提高插值精度十分有利。

基于Delaunay三角剖分的插值算法:

- (1) 计算所求高分辨率图像像素点投影到物空间坐标系;
- (2) 将得到的低分辨率图像像素点投影到物空间坐标系;
- (3) 在空间坐标系中,按随机增量算法对现有像素点进行Delaunay三角剖分;
- (4) 获取每一个高分辨率图像像素点所在的三角形;
- (5) 由高分辨率图像像素点相对其落入的三角形3顶点的位置,采用线性或三次方插值得到像素值;
- (6) 如果又得到新的低分辨率图像,则转到步骤(2);否则,结束。

该算法便于修正成像结果,可以根据当前的成像质量判断是否再进行微变焦得到新的低分辨率图像,用以增加采样点的数量,从而提高图像的分辨率。由于采用随机增量算法,修正时只需对外接圆包含新增采样点的三角形进行Delaunay三角剖分,新增运算量很小。

## 3 仿真实验与分析

取微变焦倍率比为1:1.007 8:1.015 5:1.023 3,用函数 $f(x, y) = \sin(k(x^2 + y^2)) + 1$ 产生 $128 \times 128$ 像素大小的欠采样Fresnel圆环图像,分别用频域模型共轭梯度最小二乘法(CGLS)、Delaunay线性(linear)插

值和Delaunay三次方(cubic)插值进行重建。

### 3.1 计算速度比较

测试环境: DELL D630 Duo T7250 (2.0 GHz)/1 GB; MATLAB 7.3.0, 测试结果如表1所示。

表1给出了不同算法的计算时间,可以看出,一方面,基于Delaunay三角剖分的插值算法计算效率极高,在进行程序的时间优化以后有望实现实时应用。共轭梯度最小二乘法的计算时间与迭代次数成正比,其200次迭代的计算速度离实时还很远。另一方面,重建图像越大则计算时间越长,要实现实时应用还需在程序优化和硬件升级方面努力。

表1 不同算法的计算速度比较

重建图像大小	CGLS(200次迭代)/s	Delaunay线性/s	Delaunay三次方/s
256×256	9.2	0.5	0.6
512×512	55.6	1.1	1.4

### 3.2 重建误差比较

为了考察微变焦法超分辨率成像各种重建算法的重建误差,仍以Fresnel圆环图像为仿真实验对象,定义重建高分辨率图像  $f^*$  与对应的用函数产生的高分辨率图像  $f$  均方误差 (mean square error, MSE) 为:

$$\text{MSE} = \frac{1}{MN} \|f - f^*\|_2 = \frac{1}{MN} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (f(m,n) - f^*(m,n))^2 \quad (1)$$

均方误差越小,表明重建图像  $f^*$  越接近高分辨率图像  $f$ 。将基于空域模型的共轭梯度最小二乘法的重建均方误差化成迭代次数的函数,并与基于Delaunay三角剖分的线性和三次方插值算法进行比较,如图1所示。

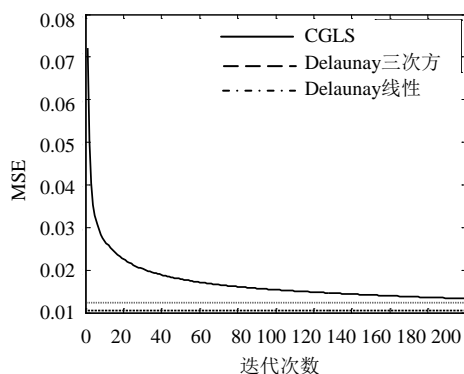


图1 重建均方误差比较

由图1可以看出,频域模型CGLS法的重建均方误差随迭代次数的增加逐渐减小,且减小速度逐渐变慢,可以预见,迭代次数足够多时,重建的均方误差将优于基于Delaunay三角剖分的插值算法,但

将需要更多的重建时间,不利于实时处理;基于Delaunay三角剖分的三次方插值算法的重建均方误差优于线性插值算法,而重建时间差别不大,所以应该是实际应用中的在重建质量和重建时间两方面的一个最好的折中。

## 4 结论

为了提高微变焦超分辨率成像算法的运算速度和精确度,克服频域模型和空域模型的局限性,引入Delaunay三角剖分的数学概念,定义基于Delaunay三角剖分的插值算法用于超分辨成像的重建过程。仿真实验中将这种算法与频域模型和空域模型的共轭梯度最小二乘法进行了比较,发现在重建时间和误差方面均具有优越性。

## 参考文献

- [1] PARK S C, PARK M K, KANG M G. Super-resolution image reconstruction: a technical overview[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2003, 20(3): 21-36.
- [2] OJEDA L, DANIEL C, GIULIO R, et al. Current-bassed slippage detection and odometry correction for mobile robots and planetary rovers[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2006, 22(2): 366-378.
- [3] 韩玉兵, 吴乐南, 张冬青. 基于正则化处理的超分辨率重建[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(7): 1713-1716. HAN Yu-bing, WU Le-nan, ZHANG Dong-qing. Super-resolution reconstruction based on regularization[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2007, 29(7): 1713-1716.
- [4] FARSIU S, ROBINSON D M, ELAD M, et al. Fast and robust multiframe super resolution[J]. IEEE Transactions On Image Processing, 2004, 13(10): 1327-1344.
- [5] BOSE N K, NG M K, YAU A C. Super-resolution image restoration from blurred observations[C]//2005 IEEE International Symposium on Circuits and Systems. [S.l.]: IEEE Press, 2005: 6 296-6 299.
- [6] 刘海涛, 张三元, 叶修梓. 一种快速相容三角剖分算法[J]. 计算机应用研究, 2007, 24(1): 1-2. LIU Hai-tao, ZHANG San-yuan, YE Xiu-zi. Fast compatible triangulations algorithm[J]. Application Research of Computers, 2007, 24(1): 1-2.
- [7] XU Hai-xiang, ZHU Guang-xi, TIAN Jin-wen, et al. Image segmentation based on support vector machine[J]. Journal of Electronic Science and Technology of China, 2005, 3(3), 226-230.
- [8] 仇宇. 全息图的数字化频域滤波及数值再现研究[J]. 电子科技大学学报, 2006, 35(6): 970-972. QIU Yu. Digital frequency filtering and numerical reconstruction of computer generated hologram[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2006, 35(6): 970-972.
- [9] 杨钦. 限定Delaunay三角网格剖分技术[M]. 北京: 电子工业出版社, 2005.

- YANG Qin. Constrained delaunay triangulation[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005.
- [10] BARBER C B, DOBKIN D P, HUHDANPAA H. The quickhull algorithm for convex hulls[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 1996, 22(4): 469-483.
- [11] WATSON D F. Contouring: a guide to the analysis and display of spatial data[M]. New York: Pergamon Press, 1994.
- [12] LERTRATTANAPANICH S, BOSE N K. High resolution image formation from low resolution frames using Delaunay triangulation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 11(12): 1427-1441.

编辑 张俊

(上接第520页)

- [3] COSGROVE R B, MILANFAR P, KOSITSKY J. Trained detection of buried mines in SAR images via the deflection optimal criterion[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2004, 42(11): 2569-2575.
- [4] LIU G Q, WANG Y W, LI J, et al. SAR imaging for a forward-looking GPR system[C]//Detection and Remediation Technologies for Mines and Minelike Targets VIII. Orlando, Florida, USA: SPIE, 2003, 5089:322-333.
- [5] WANG Y W, LI X, SUN Y J, et al. Adaptive imaging for forward-looking ground penetrating radar[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2005, 41(3): 922-936.
- [6] JIN T, ZHOU Z M, CHANG W. Modified wavefront reconstruction imaging formation for stand-off GPEN SAR[J]. Electronics Letters, 2005, 41(10): 63-64.
- [7] WANG T, KELLER J M, BUSCH M, et al. On the confidence level fusion of IR and forward-looking GPR[C]//Detection and Remediation Technologies for Mines and Minelike Targets XI. Kissimmee, Florida, USA: SPIE, 2006.
- [8] 李廷军, 周正欧. 探地雷达中双曲线的提取及在波速估计中的应用[J]. 电波科学学报, 2008, 23(1): 124-128.  
LI Yan-jun, ZHOU Zheng-ou. Extraction of hyperbolic signatures and application for propagation velocity estimation in GPR[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2008, 23(1): 124-128.
- [9] 张安学, 蒋延生, 汪文秉. 探地雷达频率波数域速度估计和成像方法的实验研究[J]. 电子学报, 2001, 29(3): 315-317.  
ZHANG An-xue, JIANG Yan-sheng, WANG Wen-bing. Experimental studies on GPR velocity estimation and imaging method using migration in frequency-wavenumber domain[J]. ACTA Electronica Sinica, 2001, 29(3): 315-317.
- [10] XU X Y, MILLER E L, RAPPAPORT C M. Minimum entropy regularization in frequency-wavenumber migration to localize subsurface objects[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2003, 41(8): 1804-1812.
- [11] WU R B, GU K L, LI J, et al. Propagation velocity uncertainty on GPR SAR processing[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2003, 39(3): 849-861.
- [12] MARGRAVE G F. Theory of nonstationary filtering in the Fourier domain with application to time-variant filtering[J]. Geophysics, 1998, 63: 244-259.
- [13] 徐建华. 图像处理与分析[M]. 北京: 科学出版社, 1992.  
XU Jian-hua. Imaging processing and analysis[M]. Beijing: Science Press, 1992.

编辑 税红

(上接第545页)

- [8] 余堃. 鲁棒图像多目数字水印技术研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2006.  
SHE Kun. Research on robust still image watermarking based on multi-sensing[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2006.
- [9] 余堃, 蒲红梅, 郑方伟, 等. 快速单像素多目独立成分设计[J]. 电子科技大学学报, 2008, 37(3): 421-423.  
SHE Kun, PU Hong-mei, ZHENG Fang-wei, et al. Fast design of independent component based on single pixel under multisensing[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China. 2008, 37(3): 421-423.
- [10] LI Y Q, CICHOCKI A, AMARI S. Analysis of sparse representation and blind source separation[J]. Neural Compute, 2004, 16(6): 1193-1234.

编辑 熊思亮