

· 自动化技术 ·

基于Normal Form理论的电力系统3阶解析解

黄琦, 王州强, 张昌华

(电子科技大学自动化工程学院 成都 610054)

【摘要】在对电力系统动态方程进行泰勒级数展开的基础上,运用normal form理论推导出其3阶解析解。分别对单机无穷大系统和2区域4机系统进行了仿真,通过在时域和频域定义的两个近似度指标对比分析线性解析解,2阶解析解及3阶解析解在分析电力系统受扰后的动态特性精确性。并且应用prony算法对仿真结果进行定量分析,检测到了数值积分解中高阶复合模态的存在。从而,验证了推导的3阶解析解对受扰后系统进行分析的有效性。

关键词 非线性; 正则型; 电力系统; prony分析; 3阶解析解

中图分类号 TM712

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2009.06.013

Third Order Analytical Solution of Power System Dynamic Model Based on Normal Form

HUANG Qi, WANG Zhou-qiang, and ZHANG Chang-hua

(School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 610054)

Abstract Based on Taylor series expansion of the equations the third order analytical solutions of power system dynamical equations is derived by using normal form theory. In order to verify the theory proposed in this paper, numerical simulations are performed on a single machine infinite bus system and a four-generator two-area system. The linear, the second order, and the third order, solutions are compared, with two proximity indices defined in time domain and frequency domain, respectively. And Prony analysis is performed, testifying the existence of higher-order combination modes, which verifies the effectiveness of the third-order analytical solutions in the post-disturbance analysis of power system.

Key words nonlinear; normal form; power system; prony analysis; third-order analytical solution

近年来,我国电力系统发展十分迅速,各区域性大电网已经实现互联,电网规模日益庞大。三峡工程使得这些区域性电网实现互联紧密,随着在建的我国第二、第三大水电站溪洛渡水电站和向家坝水电站工程的推进,到投入运行时,我国电力系统的互联规模势必进一步增大,必将使得大电网之间的低频弱阻尼振荡等现象更加普遍。其次,新技术的应用也可能会引发低频振荡,如快速自动励磁装置会引入负阻尼,以及电网之间互联也会降低联络线的阻尼,导致强的非线性和高阶模态相互作用。另外,在电力市场环境,电力运行方式复杂多变、输电走廊的扩大受到限制、环保要求制约新的发电项目,要求提高稳定输电极限,导致互联电力系统的运行越来越接近其安全极限,从而增大了发生电力事故的可能性^[1-2]。

为了深入了解电力系统的内在非线性特性和动态行为,提高电力稳定运行的极限,就必须分析到系统模态之间的高阶相互作用。基于正则型的2阶解析解成为分析电力系统非线性的重要工具^[3-9],文献[10]又提出了模态级数法。它们为认识电力系统的非线性特性提供了高阶的模态空间,并为分析电力系统的强非线性动态行为提供了一种新的思路和方法。到目前为止,基于正则型的高阶解析解停留在2阶解析解。分析表明,更高阶的非线性模态相互作用对于电力系统的非线性的影响也不可忽视。文献[11]提出了基于模态级数法的3阶解析解,但是该解析解表达式比较复杂。本文在参考前面方法的基础上,推导了基于正则型的电力系统3阶解析解,该解析解表达式比较简洁。定义了时域和频域的近似度

收稿日期: 2008-06-25; 修回日期: 2008-10-10

基金项目: 教育部留学回国科研启动基金(H04010701HG05001); 国家自然科学基金(50977007)

作者简介: 黄琦(1976-),男,博士,教授,博士生导师,主要从事电力系统控制、大规模电力系统分布式并行计算和电力系统传感器网络等方面的研究。

指标, 来分析3阶解析解的精确性。通过两个算例, 证明了3阶解析解的正确性, 并且运用prony算法验证了在数值积分解中3阶复合模态确实存在。

1 电力系统3阶解析解的推导

电力系统的模型在数学上常采用微分-代数方程组, 其状态空间模型为:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = f(\mathbf{X}) \quad (1)$$

式中 $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ 是 n 维状态向量; $f(\mathbf{X}) = [f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X})]^T$, $f: R^n \rightarrow R^n$ 是一个光滑向量场。

运用能量级数的思想, 在一稳定平衡点 \mathbf{X}_{SEP} 附近用Taylor级数展开, 利用 \mathbf{X} 和 x_i 代替 $\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\text{SEP}}$ 和 $x_i - x_{i\text{SEP}}$ 作为新的状态向量和状态变量, 并保留至3阶项:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \frac{1}{2!}\mathbf{H}_2(\mathbf{X}) + \frac{1}{3!}\mathbf{H}_3(\mathbf{X}) \quad (2)$$

式中 系统矩阵 $\mathbf{A} = [\partial f / \partial \mathbf{X}]_{\mathbf{X}_{\text{SEP}}}$ 为Jacobian矩阵; $\mathbf{H}_i(\mathbf{X})$ 为 i 阶高次多项式, \mathbf{X} 此时属于Taylor级数收敛域。用 $\mathbf{Y} = \mathbf{V}\mathbf{X}$ 对上式进行相似变换为:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{C}(\mathbf{Y}) + \mathbf{D}(\mathbf{Y}) \quad (3)$$

则第 j 个Jordan型变量的状态方程是:

$$\begin{aligned} \frac{dy_j}{dt} &= \lambda_j y_j + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n C_{kl}^j y_k y_l + \\ &\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n D_{pqr}^j y_p y_q y_r + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $C^j = [C_{kl}^j] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_{ji} [\mathbf{U}^T \mathbf{H}_2^i \mathbf{U}]$; v_{ji} 为矩阵 \mathbf{A} 的

左特征行向量矩阵 \mathbf{V} 的第 j 行第 i 列元素; \mathbf{U} 为 \mathbf{A} 的右特征向量矩阵, 且满足 $\mathbf{V}\mathbf{U} = \mathbf{I}$;

$\mathbf{H}_2^i = [\partial^2 f_i / \partial x_k \partial x_l]_{\mathbf{X}_{\text{SEP}}}$ 为 Hessian 矩阵;

$D_{pqr}^j = \frac{1}{6} v_{ji} \sum_{P=1}^n \sum_{Q=1}^n \sum_{R=1}^n H_{3PQR}^i u_p^P u_q^Q u_r^R$; u_r^R 是右特征向量

第 r 行的第 R 个元素。根据文献[12]的normal form理论, 可以采用normal form 3阶变换式为:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z} + \mathbf{h}_2(\mathbf{Z}) + \mathbf{h}_3(\mathbf{Z}) \quad (5)$$

将上式微分, 以 $D = \partial / \partial \mathbf{Z}$ 代表微分算子:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \frac{d\mathbf{Z}}{dt} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{Z}) + D\mathbf{h}_3(\mathbf{Z}) \quad (6)$$

联立式(3)、式(5)、式(6)则可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Z}}{dt} &= [\mathbf{I} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{Z}) + D\mathbf{h}_3(\mathbf{Z})]^{-1} \{ \mathbf{A}\mathbf{Z} + [\mathbf{C}(\mathbf{Z}) + \\ &\mathbf{A}\mathbf{h}_2(\mathbf{Z})] + [\mathbf{D}(\mathbf{Z}) + \mathbf{A}\mathbf{h}_3(\mathbf{Z})] + O(4) \} \end{aligned} \quad (7)$$

只要 $|\mathbf{Z}|$ 足够小, 就能得到:

$$[\mathbf{I} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{Z}) + D\mathbf{h}_3(\mathbf{Z})]^{-1} = \mathbf{I} - D\mathbf{h}_2(\mathbf{Z}) - D\mathbf{h}_3(\mathbf{Z}) + (D\mathbf{h}_2(\mathbf{Z}))^2 + \dots \quad (8)$$

将式(8)代入式(7), 得:

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{Z}) + \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{Z}) - D\mathbf{h}_2(\mathbf{Z})\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{Z}) + O(4) \quad (9)$$

式中

$$\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{Z}) = \mathbf{C}(\mathbf{Z}) + \mathbf{A}\mathbf{h}_2(\mathbf{Z}) - D\mathbf{h}_2(\mathbf{Z})\mathbf{A}\mathbf{Z} \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{Z}) = \mathbf{D}(\mathbf{Z}) + \mathbf{A}\mathbf{h}_3(\mathbf{Z}) - D\mathbf{h}_3(\mathbf{Z})\mathbf{A}\mathbf{Z} \quad (11)$$

根据正则型理论, 要消掉式(9)的2阶、3阶高次项, 必须满足同调方程(homological equation):

$$\mathbf{C}(\mathbf{Z}) = D\mathbf{h}_2(\mathbf{Z})\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{A}\mathbf{h}_2(\mathbf{Z}) \quad (12)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{Z}) = D\mathbf{h}_3(\mathbf{Z})\mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{A}\mathbf{h}_3(\mathbf{Z}) \quad (13)$$

于是非共振条件下满足同调方程的式(9)的解为:

$$h_{kl}^{2j} = \frac{C_{kl}^j}{\lambda_k + \lambda_l - \lambda_j}, \quad h_{pqr}^{3j} = \frac{D_{pqr}^j}{\lambda_p + \lambda_q + \lambda_r - \lambda_j} \quad (14)$$

$j, k, l, p, q, r = 1, 2, \dots, n$

所以, 式(9)中的2阶、3阶高次项被消去, 4阶及以上的解的项由 $O(4)$ 的解表达, 这样就得到一系列线性微分方程:

$$\frac{dz_j}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{Z}; \quad \frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

从而得近似解析解为:

$$z_j(t) = z_{j0} e^{\lambda_j t} \quad (16)$$

将上式代入式(5), 得到:

$$\begin{aligned} y_j &= z_{j0} e^{\lambda_j t} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n h_{kl}^{2j} z_{k0} z_{l0} e^{(\lambda_k + \lambda_l)t} + \\ &\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n h_{pqr}^{3j} z_{p0} z_{q0} z_{r0} e^{(\lambda_p + \lambda_q + \lambda_r)t} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

最后用 $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{Y}$ 相似变换得到:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{j=1}^n u_{ij} z_{j0} e^{\lambda_j t} + \sum_{j=1}^n u_{ij} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n h_{kl}^{2j} z_{k0} z_{l0} e^{(\lambda_k + \lambda_l)t} \right] + \\ &\sum_{j=1}^n u_{ij} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n h_{pqr}^{3j} z_{p0} z_{q0} z_{r0} e^{(\lambda_p + \lambda_q + \lambda_r)t} \end{aligned} \quad (18)$$

式中 初始值 \mathbf{Z}_0 可以通过类似文献[3]提出的简单方法, 通过求解方程组 $\mathbf{Z}_0 - \mathbf{Y}_0 + \mathbf{h}_2(\mathbf{Z}_0) + \mathbf{h}_3(\mathbf{Z}_0) = 0$ 获得。

2 近似度指标

设 $x_{iN}(t)$ 、 $x_{iL}(t)$ 、 $x_{iNF2}(t)$ 、 $x_{iNF3}(t)$ 分别是数值积分法、线性模态法、NF2阶模态法和NF3阶模态法的时域响应值, $x_{iN}(f)$ 、 $x_{iL}(f)$ 、 $x_{iNF2}(f)$ 、 $x_{iNF3}(f)$ 则为与之对应的频域响应值, 定义:

$$e_{tr} = \frac{\int_0^{+\infty} |x_{i\text{other}}(t) - x_{iN}(t)| dt}{\int_0^{+\infty} |x_{iN}(t)| dt} \times 100 \quad (19)$$

$$e_{fr} = \frac{\int_0^{+\infty} |x_{i\text{other}}(f) - x_{iN}(f)| df}{\int_0^{+\infty} |x_{iN}(f)| df} \times 100 \quad (20)$$

分别从时域和频域比较解析解和数值积分解的近似程度。

3 算例分析

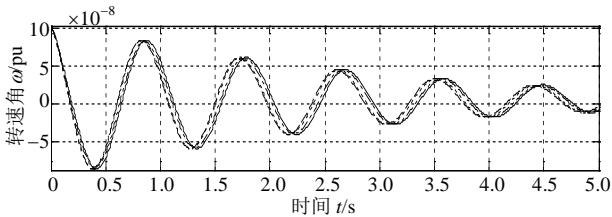
3.1 单机无穷大(SMIB)系统

以单机无穷大系统(SMIB)作为算例, 该系统的参数参考文献[13], 发电机采用3阶模型(ω, δ, E'_q),

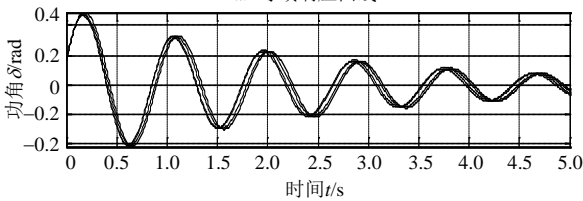
励磁系统采用1阶模型。0.1 s时在输电线2距变压器高压侧20%处产生三相短路, 0.2 s时扰动结束。分别按近似度指标计算1阶、2阶、3阶解析解与数值积分解的差异 e_{tr} 和 e_{fr} , 计算结果如表1所示。从表1中可以看出, 无论是在时域还是在频域, 正则型的3阶解析解都要比2阶和线性解析解更接近数值积分解。这也就说明在表达电力系统随时间变化的动态特性时, 基于正则型的3阶解析解比1阶及2阶解析解更准确。

表1 单机无穷大系统近似程度指标

NF#	e_{tr}			e_{fr}		
	1	2	3	1	2	3
ω	30.3	35.16	11.58	21.13	22.00	8.37
δ	28.25	32.79	10.86	16.13	17.29	6.49
E'_q	59.64	15.34	6.30	48.85	19.80	8.64
E_{fd}	33.96	21.52	11.17	8.08	6.32	3.42



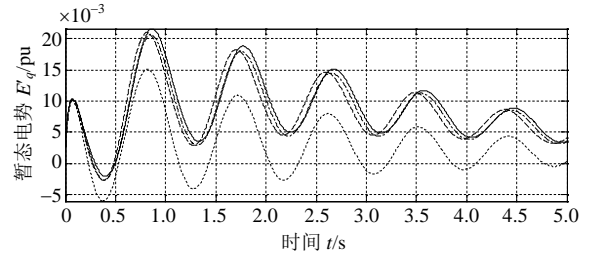
a. 时域响应曲线



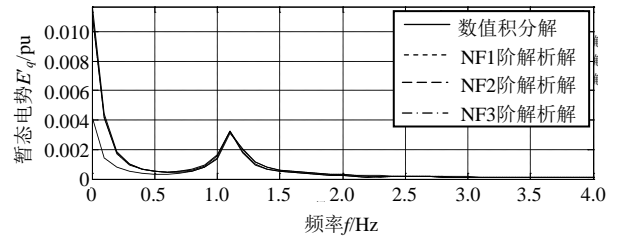
b. DFT频谱曲线

图1 SMIB系统 ω 、 δ 时域响应曲线和 δ 频谱曲线

图1~图3分别为 ω 、 δ 、 E'_q 和 E_{fd} 的时域振荡曲线和对应的DFT频谱图。在时域, 3阶解析解的时域响应曲线比2阶和1阶的更接近数值积分解, 而 E'_q 和 E_{fd} 的3阶响应尤为突出。同时也表明在模态振荡频率0~2 Hz范围内, 对应于 δ 、 E'_q 和 E_{fd} 的3阶解析解时域响应曲线的DFT频谱曲线, 也比2阶和1阶的更接近数值解, 更能准确地反映电力系统的低频振荡特性。

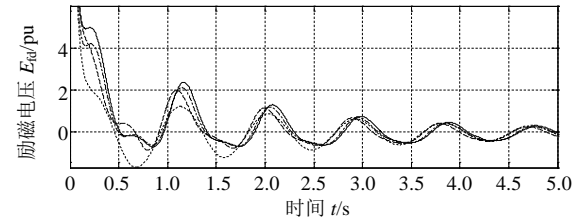


a. 时域响应曲线

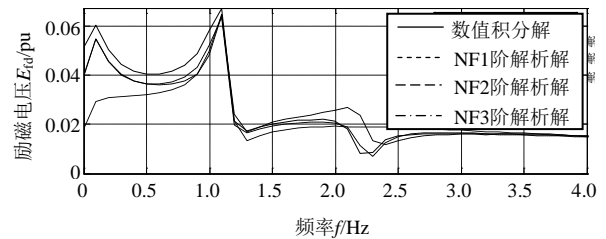


b. DFT频谱曲线

图2 SMIB系统 E'_q 时域响应曲线和频谱曲线



a. 时域响应曲线



b. DFT频谱曲线

图3 SMIB系统 E_{fd} 时域响应曲线和频谱曲线

表2是单机无穷大系统 E_{fd} 曲线的prony分析部分结果(0~10 s)。从结果中不难看出, 除模式8和模式9对应于线性化分析的基本模式 $\lambda_{2(3)} = -0.3816 \pm 6.9870i$ (1.1120 Hz)外, 还有大量是线性化方法未能分析到的, 如模式12和模式13就应该是由 $\lambda_{2(3)}$ 3阶复合而成的。

表2 单机无穷大系统 E_{fd} 的prony分析结果

序号	幅值	频率/Hz	衰减因子
1	0.700 8	0.000 0	-1.982 5
2、3	0.143 4	4.935 2	-2.355 2
4	0.279 1	0.000 0	-1.184 1
5	0.035 3	0.000 0	-0.507 6
6、7	0.073 1	5.331 4	-1.526 5
8、9	0.105 8	1.113 4	-0.379 2
10、11	0.077 3	2.220 9	-0.775 2
12、13	0.318 8	3.099 4	-4.629 9
14、15	0.016 4	3.556 2	-0.475 4
16、17	0.005 3	4.373 9	-0.205 1
18、19	0.004 3	6.116 2	-0.209 1
20、21	0.032 6	6.664 3	-1.165 8
22、23	0.020 6	7.216 2	-0.819 7
24、25	0.193 0	7.776 3	-4.514 9

3.2 2区域4机系统

另一个算例采用2区域4机系统，如图4所示，其参数参考文献[13]。发电机仅采用2阶模型 (ω, δ) ，选4号发电机为参考机，系统共7阶。0.1 s时在母线9上产生三相短路，0.4 s时扰动结束。经线性分析，系统存在3对共轭复根，如表3所示。

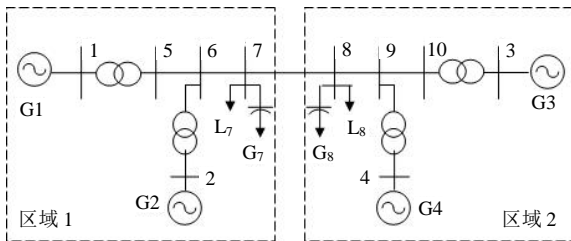


图4 2区域4机系统

表3 2域4机系统模式特征根

模式	特征根	频率/Hz	阻尼比/(%)
1	-0.705 6	0	100
2,3	$-0.357 7 \pm 2.593 3i$	0.412 7	13.663 9
4,5	$-0.347 5 \pm 6.408 4i$	1.019 9	5.414 8
6,7	$-0.363 0 \pm 6.588 0i$	1.048 5	5.502 1

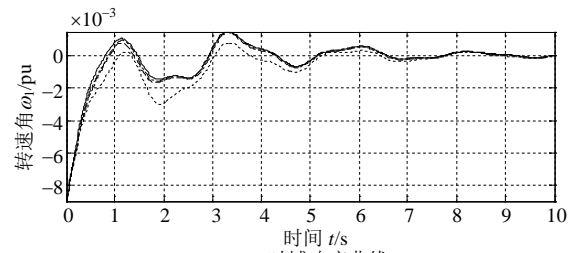
分别接近似度指标计算1阶、2阶、3阶解析解与数值积分解的差异 e_{tr} 和 e_{fr} ，结果如表4所示。从表4中可以看出，无论是在时域还是在频域，正则型的3阶解析解都要比2阶和线性解析解更接近数值积分解。这也就说明在表现电力系统随时间变化的动态特性时，基于正则型的3阶解析解比1阶及2阶解析解更准确。

图5~图7分别为 ω_1 、 δ_{34} 、和 ω_4 的时域振荡曲线和对应的DFT频谱图。在时域，3阶解析解的相应曲线比2阶和1阶的更接近数值积分解。同时也表明在模态振荡频率0~2 Hz范围内，对应于 ω_1 、 δ_{34} 、和 ω_4 的3阶解析解时域响应曲线的DFT频谱曲线，也比2阶和1阶的更接近数值解，更能准确反映电力系统的

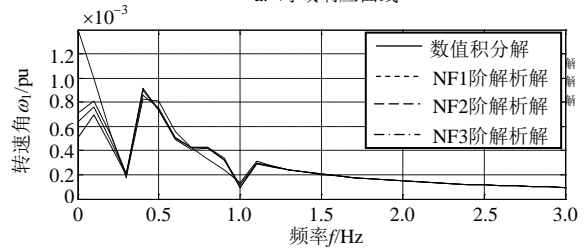
低频振荡特性。

表4 2区域4机系统近似度指标

NF#	e_{tr}			e_{fr}		
	1	2	3	1	2	3
ω_1	57.69	12.95	8.07	12.57	4.48	2.82
δ_{14}	12.52	5.65	2.90	9.33	3.19	1.83
ω_2	64.63	13.98	8.84	12.91	5.25	3.07
δ_{24}	15.89	6.12	3.18	10.09	3.12	1.99
ω_3	36.25	9.98	5.51	18.74	9.34	4.05
δ_{34}	14.45	11.02	3.32	8.43	5.14	1.71
ω_4	36.67	9.19	5.24	18.81	8.45	4.02

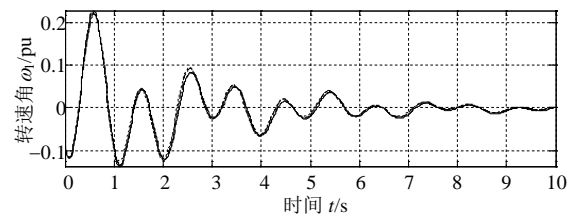


a. 时域响应曲线

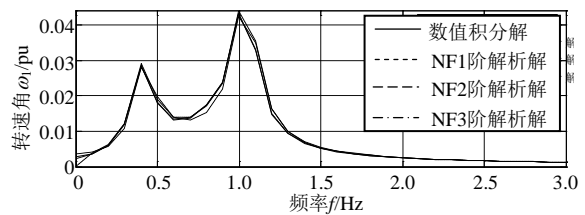


b. DFT频域曲线

图5 2区域4机系统 ω_1 时域响应曲线和频谱曲线

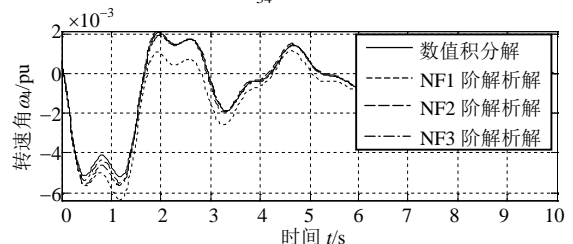


a. 时域响应曲线



b. DFT频域曲线

图6 2区域4机系统 δ_{34} 时域响应曲线和频谱曲线



a. 时域响应曲线

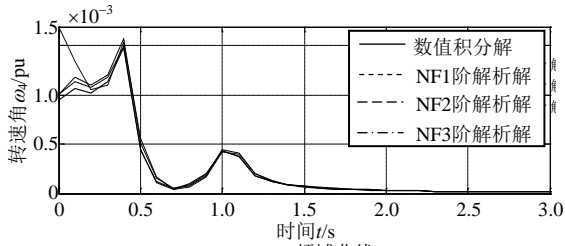


图7 2区域4机系统 ω_4 时域响应曲线和频谱曲线

表5是2区域4机系统功角 δ_{34} 曲线的prony分析的部分结果(0~10 s)。从结果中不难看出,除模式7~10分别对应于线性化分析的基本模式 $\lambda_{2(3)}$ 、 $\lambda_{6(7)}$ 外,还有大量是线性化方法未能分析到,如模式13~16就可由 $\lambda_{2(3)}$ 3阶复合而成,模式23~26可由 $\lambda_{2(3)}$ 、 $\lambda_{6(7)}$ 3阶复合而成。

表5 2域4机系统 δ_{34} 的prony分析结果

序号	幅值	频率/Hz	衰减因子
1、2	0.036 2	0.989 8	-0.090 97
3、4	0.010 7	0.843 3	-0.678 60
5、6	0.017 2	0.409 0	-0.957 00
7、8	0.052 7	0.412 8	-0.357 90
9、10	0.082 9	1.045 8	-0.362 90
11	0.005 8	0.000 0	-0.650 20
12	0.002 0	0.000 0	-0.004 30
13、14	0.003 8	1.330 9	-1.053 10
15、16	0.000 0	1.194 8	-1.364 10
17、18	0.000 5	1.557 7	-0.618 00
19、20	0.000 0	1.823 4	-0.301 10
21、22	0.000 4	2.142 1	-0.716 60
23、24	0.002 1	2.232 0	-1.850 20
25、26	0.000 1	2.677 4	-0.549 80
27、28	0.000 0	3.012 6	-0.132 70

4 结 论

本文利用能量级数的思想,结合Normal form理论推导出表示描述电力系统动态行为方程组的3阶解析解,其解析解表达式简洁,使用方便。

通过算例从时域和频域两个方面,在prony算法的辅助下检测到3阶复合模式的存在,验证了本文推导出的3阶解析解比2阶解更精确,向非线性的实质迈进了更深层次的一步。

参 考 文 献

[1] 陈向宜, 陈允平. 构建大电网安全防御体系—欧洲大停电事故的分析及思考[J]. 电力系统自动化, 2007, 1(1): 4-8.
CHEN Xiang-yi, CHEN Yun-ping. Constructing wide-area security defensive system in bulk power grid—a pondering over the large-scale blackout in the european power grid on november 4[J]. Automation of Electric Power Systems, 2007, 31(1): 4-8.

[2] 刘 隽, 李兴源, 邹全平, 等. 互联电网低频振荡的相关问题及研究[J]. 继电器, 2005, 33(16): 70-77, 84.

LIU Jun, LI Xing-yuan, ZOU Quan-ping, et al. Research and problems of low frequency oscillation in interconnected power networks[J]. Relay, 2005, 33(16): 70-77, 84.

[3] SANCHEZ-GASCA J J, VITTAL V, GIBBARD M J, et al. Inclusion of higher order terms for small-signal (modal) Analysis: committee report-task force on assessing the need to include higher order terms for small-signal (modal) analysis[J]. IEEE Trans Power Syst, 2005, 20(4): 1886-1904.

[4] NI Y, VITTAL V, KLIEMANN W. Analysis of structural properties responsible for nonlinear modal behavior of a stressed power system using the normal form technique[C]// IEEE 39th Midwest symposium Circuits and Systems. [S.l.]: IEEE Press, 1996, 3: 1029-1033.

[5] SAHA S, FOUAD A A, KLIEMANN W, et al. Stability boundary approximation of a power system using the real normal form of vector fields[J]. IEEE Trans Power Syst, 1997, 12(2): 797-802.

[6] BETANCOURT R J, BAROCIO E, ARROYO J, et al. A real normal form approach to the study of resonant power systems[J]. IEEE Trans Power Syst, 2006, 21(1): 431-432.

[7] 邓集祥, 陈武晖, 纪 静. 基于正则形理论的电力系统2阶模态谐振的研究[J]. 中国电机工程学报, 2006, 26(24): 5-11.
DENG Ji-xiang, CHEN Wu-hui, JI Jing. Study on power system second order modal resonance on the basis of normal forms theory[J]. Proceedings of the CSEE, 2006, 26(24): 5-11.

[8] JANG G, VITTAL V, KLIEMANN W. Effect of nonlinear modal interaction on control performance_use of normal forms technique in control design. Part I: General theory and procedure[J]. IEEE Trans Power Syst, 1998, 13(2): 401-407.

[9] JANG G, VITTAL V, KLIEMANN W. Effect of nonlinear modal interaction on control performance_ use of normal forms technique in control design. Part II: Case study[J]. IEEE Trans Power Syst, 1998, 13(2): 408-413.

[10] SHANECHI H M, PARIZ N, VAAHEDI E. General nonlinear modal representation of large scale power systems[J]. IEEE Trans Power Syst, 2003, 18(3): 1103-1109.

[11] 邓集祥, 陈武晖, 涂 进. 电力系统3阶解析解的推导及验证[J]. 中国电机工程学报, 2007, 27(28): 12-18.
DENG Ji-xiang, CHEN Wu-hui, TU Jin. Deducing and Validating the Third-order Analytical Solutions of Power Systems[J]. Proceedings of the CSEE, 2007, 27(28): 12-18.

[12] ARNOLD V I. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations[M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2004: 180-221.

[13] KUNDUR P. Power system stability and control[M]. New York: McGraw-Hill, 1994: 732-813.

编辑 漆 蓉