

· 自动化技术 ·

时滞系统PID控制器参数稳定域的实现

方 斌

(南京理工大学自动化学院 南京 210094)

【摘要】基于广义Hermite-Biehler定理,运用时滞对象的逆Nyquist曲线,可确定PID控制器比例增益的稳定范围。在积分和微分增益平面上,针对多条边界直线,提出一种逆时针规律的判断方法,可快速确定该二维平面上参数的稳定区域,从而给出了一种确定时滞系统PID控制器参数稳定域的新算法。该算法适合软件实现,仿真实例验证了该算法的有效性。

关键词 逆时针规律; 逆Nyquist; PID控制器; 参数稳定域; 时滞系统

中图分类号 TP273

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2011.03.017

Realization of PID Controller Parameter Stable Regions for Time Delay Systems

FANG Bin

(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology Nanjing 21009)

Abstract Based on generalization of the Hermite-Biehler theorem, the stable regions of proportional gain of PID Controller can be determined by the inverse Nyquist plot of the time delay plant. In the integral and differential gain plane, an anti-clockwise rule of judgment method is proposed for more than a boundary line. It may quickly determine the parameter stable regions in this two-dimensional plane. Thus a new approach is given to determine the stable regions of PID controller parameter space for time delay systems. The given algorithm is suitable for software realization. The simulation examples demonstrate the validity of the proposed algorithm.

Key words anti-clockwise rule; inverse Nyquist; PID controller; stable regions; time delay systems

由于PID控制器算法简单、鲁棒性强,因而被广泛应用于化工、冶金、机械、热工和轻工等工业过程控制系统中。尽管工业自动化飞速发展,但是PID控制技术仍然是工业过程控制的基础^[1-2]。在近十年, PID控制器参数三维稳定空间的研究取得了一批成果。文献[1]运用广义的Hermite-Biehler理论,对三参数控制器的稳定域进行系统研究;文献[2]重点研究了PID控制器的增益稳定范围问题;文献[3]采用D-分割法对含时滞对象进行PID控制器稳定域分析;文献[4]利用频率稳定判据给出二阶时滞过程时滞常数的上限条件和控制器参数的稳定域分析方法。文献[5]为PID控制器早期的重要成果之一,它明确给出了一阶时滞系统及在PID控制下增益 K_p 和 K_d-K_i 平面上稳定的范围,通过遍历 K_p , 可确定PID控制器参数的三维稳定空间,为PID控制器的设计提供了完整的稳定域。

本文在文献[6]的基础上,运用广义Hermite-

Biehler定理,提出一种逆时针规律,给出一种基于逆Nyquist曲线,可快速确定PID控制器参数三维稳定域的方法以及算法实现的相关问题和基本步骤。该方法的基本过程是,首先确定系统比例增益稳定的范围,然后在该范围内通过遍历增益并寻找相应的 K_d-K_i 平面上的稳定区域,从而给出一种时滞系统PID控制器参数稳定域的方法。

1 问题表述

设控制对象为:

$$G(s) = G_1(s)e^{-\tau s} = \frac{P(s)}{Q(s)}e^{-\tau s} = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} e^{-\tau s} \quad (1)$$

其中, $n_1 > q$, $a_n > 0$, $G(s)$ 的逆函数为 $\bar{G}(s) = \bar{G}_1(s)e^{\tau s}$, $\bar{G}_1(s) = Q(s)/P(s)$ 。

PID控制器为:

$$C(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} \quad (2)$$

则闭环系统的特征方程为:

$$1 + C(s)G(s) = 0 \quad (3)$$

其维数 $n = n_1 + 1$, 可将式(3)改写为:

$$\bar{G}(s) = -C(s)$$

设对象的逆Nyquist特性为 $\bar{G}(j\omega)$, 负的PID频率特性为 $-C(j\omega)$ 。当增益 K_p 为定值时, 负的PID频率特性曲线 $-C(j\omega)$ 为一条纵向直线。则有:

$$\text{Re}(\bar{G}(j\omega)) + j\text{Im}(\bar{G}(j\omega)) = -K_p + j\left(\frac{K_i}{\omega} - K_d\omega\right) \quad (4)$$

根据式(4)得:

$$\text{Re}(\bar{G}(j\omega)) = -K_p \quad (5)$$

$$\omega \text{Im}(\bar{G}(j\omega)) = K_i - K_d\omega^2 \quad (6)$$

由式(5)可分析确定 K_p 的稳定范围^[6], 式(6)可获得 K_d-K_i 平面上一系列边界直线, 进而用下文所提出的逆时针规律确定 K_d-K_i 平面上的稳定区域。

2 稳定性判据

一般的时滞系统特征方程为:

$$\delta^*(s) = d(s) + e^{-sT_1}n_1(s) + e^{-sT_2}n_2(s) + \dots + e^{-sT_m}n_m(s)$$

其中, $d(s)$ 、 $n_i(s)$ 是具有实参数的多项式, $i=1, 2, \dots, m$ 。

假设 1) $\deg[d(s)] = n$ 和 $\deg[n_i(s)] < n$, $i=1, 2, \dots, m$; 2) $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \dots < T_m$, $d(s)$ 和 $n_i(s)$ 对于所有的 $i=1, 2, \dots, m$ 是互质的多项式。

考虑下面的多项式:

$$\delta(s) = e^{sT_m}\delta^*(s) = e^{sT_m}d(s) + e^{s(T_m-T_1)}n_1(s) + e^{s(T_m-T_2)}n_2(s) + \dots + n_m(s)$$

因为 e^{sT_m} 没有有限的零点, $\delta^*(s)$ 的零点就等于 $\delta(s)$ 的零点。因而, 特征方程 $\delta^*(s)$ 的稳定条件是 $\delta(s)$ 的零点位于左半平面。下面给出文献[7]关于 $\delta(s)$ 稳定的充分必要条件(广义Hermite-Biehler定理)。

引理 1^[7] 将 $s = j\omega$ 代入 $\delta(s)$, 有:

$$\delta(j\omega) = \delta_r(\omega) + j\delta_i(\omega)$$

式中, $\delta_r(\omega)$ 和 $\delta_i(\omega)$ 分别表示 $\delta(j\omega)$ 的实部和虚部。在假设1条件下, $\delta(s)$ 稳定当且仅当满足以下两个条件: 1) $\delta_r(\omega)$ 和 $\delta_i(\omega)$ 只有实根, 且它们的实根是交错的; 2) 存在 ω_0 在 $(-\infty, \infty)$ 区间使 $\delta_i'(\omega_0)\delta_r(\omega_0) - \delta_i(\omega_0)\delta_r'(\omega_0) > 0$, 其中, $\delta_i'(\omega_0)$ 和 $\delta_r'(\omega_0)$ 分别是 $\delta_i(\omega)$ 和 $\delta_r(\omega)$ 的一次导数。

引理 2^[7] 设 M 和 N 分别为 $\delta(s)$ 中 s 和 e^s 的最高指数。若存在一常数 η , 使得当 $\omega = \eta$ 时, $\delta_r(\omega)$ 和 $\delta_i(\omega)$ 的最高次系数在 $\omega = \eta$ 时不为 0, 那么 $\delta_r(\omega) = 0$ 或 $\delta_i(\omega) = 0$ 仅有单实根的充分必要条件是: 存在足够大的 L , 对于 $\omega \in [-2L\pi + \eta, 2L\pi + \eta]$, 使 $\delta_r(\omega)$ 和 $\delta_i(\omega)$ 恰好有 $4LN + M$ 个实根。

3 增益 K_p 的稳定范围

确定 PID 控制器的三维稳定空间, 首先需要确定比例增益的范围, 以便能有效地遍历增益 K_p 。

3.1 PID控制下时滞系统稳定的必要条件

PID控制下时滞系统的特征方程为:

$$\delta(s) = sQ(s)e^{\tau s} + (K_i + K_d s^2 + K_p s)P(s) \quad (7)$$

由文献[8-9]可知, 时滞系统在 PID 控制下稳定的必要条件是 $\delta(s)$ 的 $q+3$ 阶导数不包含右半平面零点。

因 $\frac{d^{q+3}}{ds^{q+3}}\delta(s) = \frac{d^{q+3}}{ds^{q+3}}[sQ(s)e^{\tau s}] = U(s)e^{\tau s}$, 所以必要条件就是多项式 $U(s)$ 不包含右半平面零点。

3.2 基于逆Nyquist图确定 K_p 稳定域

设 $P(s)$ 在左半平面和右半平面的零点个数分别为 l_1 、 r_1 。在 $[0, \omega_0]$ 频率范围内, 逆Nyquist曲线 $\bar{G}(j\omega)$ 横坐标为极值的点共有 M_p 个, 其相应的横坐标为 $-K_{p_i}$, $i=1, 2, \dots, M_p$; 各点所对应的PID增益为 K_{p_i} , 且从小到大排列。其中 $\omega_0 = (2L\pi + \eta)/\tau$, L 为足够大的正整数, η 一般取为 $\pi/4$ 。 K_{p_i} 将PID比例增益分成若干区间, 每个区间内曲线 $\bar{G}(j\omega)$ 与纵向直线的交点数是不变的。

根据文献[6]有下面结论。

引理 3^[6] 时滞系统在PID控制下, 任取一个 K_p 且 $K_{p_i} < K_p < K_{p_{(i+1)}}$ 。在逆Nyquist曲线 $\bar{G}(j\omega)$ 上, K_p 所对应的 $-C(j\omega)$ 直线与 $[0, \omega_0]$ 段逆Nyquist曲线 $\bar{G}(j\omega)$ 至少有 m_1 个交点, 则 K_p 在 $(K_{p_i}, K_{p_{(i+1)}})$ 区间时系统是稳定的; 否则在该区间系统一定不稳定。满足引理3, 是系统在PID控制下稳定的必要条件。

当 $q+2 < n$ 时:

$$m_1 = \begin{cases} 2LN + \frac{M + (r_1 - l_1) + 0}{2} & M+q \text{ 为偶数} \\ 2LN + \frac{M + (r_1 - l_1) + 1}{2} & M+q \text{ 为奇数} \end{cases}$$

当 $q+2 = n$ 时:

$$m_1 = 2LN + \frac{M + (r_1 - l_1) + \Delta}{2}$$

当 $M + (r_1 - l_1) > 2$ 时, $\Delta = 0$; 否则 $\Delta = 2$ 。其中,

$M = n, N = 1$ 。

3.3 逆Nyquist曲线频率范围选取

实现 K_p 可能存在的稳定范围, 首先需要确定决定系统稳定性的频率 ω_0 。对于时滞对象的线性部分, 一定存在足够大的 $\bar{\omega}$, 当 $\omega > \bar{\omega}$ 时, 时滞对象的线性部分 $|\bar{G}_1(j\omega)|$ 为单调增加的, 所以逆Nyquist曲线 $\bar{G}_1(j\omega)$ 与坐标轴的位置有4种关系, 如图1所示。因此只需找到曲线 $\bar{G}_1(j\omega)$ 与坐标轴最后一个交点所对应的频率 ω , 然后考虑适当的裕量就能得到 $\bar{\omega}$ 。

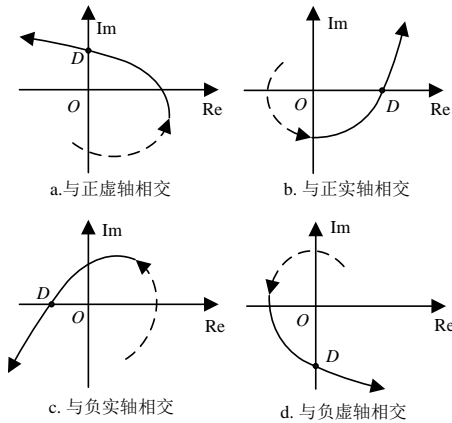


图1 逆Nyquist图与坐标轴交点

令:

$$\bar{G}_1(j\omega) = \frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)} = \frac{Q(j\omega)P(-j\omega)}{|P(j\omega)|^2} = 0 \quad (8)$$

$$Q(j\omega) = Q_r(\omega) + jQ_i(\omega)$$

$$P(j\omega) = P_r(\omega) + jP_i(\omega)$$

则:

$$Q(j\omega)P(-j\omega) = (P_rQ_r + P_iQ_i) + j(P_rQ_i - Q_rP_i)$$

式(8)等价于:

$$P_rQ_r + P_iQ_i = 0 \quad (9)$$

$$P_rQ_i - Q_rP_i = 0 \quad (10)$$

令式(9)和式(10)的解分别为 $\omega_{A_1}, \omega_{A_2}, \omega_{A_3}, \dots$ 和 $\omega_{B_1}, \omega_{B_2}, \omega_{B_3}, \dots$, 找到这些解中最大的 ω_{\max} , 考虑适当的裕量, 取 $\bar{\omega} = 1.5\omega_{\max}$ 。

当 $2(k-1)\pi < \bar{\omega} \leq 2k\pi$ 时, $k = 1, 2, 3, \dots$, 则取

$$L = k, \quad \omega_0 = \left(2L\pi + \frac{\pi}{4}\right) / \tau$$

当 $\angle \bar{G}(j\omega)|_{\omega=\omega_0} = \angle \bar{G}_1(j\omega)e^{j\tau\omega}|_{\omega=\omega_0}$ 在一、三象限

时, 可取 $\omega_0 = \left(2L\pi + \frac{3\pi}{4}\right) / \tau$ 。

4 给定 K_p 下 K_d-K_i 平面的稳定域

当时滞系统式(7)稳定时, 根据引理2, $\delta_r(\omega)$ 在

$0 \leq \omega \leq \omega_0$ 区间恰好有 M_0 个实根, $\delta_r(\omega)$ 在 $0 < \omega \leq \omega_0$ 区间恰有 M_1 个实根^[6], 其中,

$$M_0 = \begin{cases} (2LN + 1) + \frac{M}{2} & M \text{ 为偶数} \\ (2LN + 1) + \frac{M-1}{2} & M \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$M_1 = \begin{cases} 2LN + \frac{M}{2} & M \text{ 为偶数} \\ 2LN + \frac{M+1}{2} & M \text{ 为奇数} \end{cases}$$

令 $M^* = M_0 + M_1 - (l_1 - r_1) - 1$, 有 $M^* = 4LN + M - (l_1 - r_1)$, 因此, 当 $M+q$ 为偶数时, M^* 为偶数; 当 $M+q$ 为奇数时, M^* 为奇数。令:

$$v(s) = s\bar{G}(s) + (K_p s + K_d s^2 + K_i)$$

$$p(\omega, K_i, K_d) = (K_i - K_d \omega^2) - \omega \operatorname{Im}(\bar{G}(j\omega))$$

$$q(\omega, K_p) = \omega[\operatorname{Re}(\bar{G}(j\omega)) + K_p]$$

将 $s = j\omega$ 代入 $v(s)$, 得:

$$v(j\omega) = v_e(-\omega^2) + j\omega v_o(-\omega^2) = p(\omega, K_i, K_d) + jq(\omega, K_p)$$

设 $q(\omega, K_p)$ 的非负、相异实零点为 $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_l (< \omega_0)$, 且令 $i_j = \operatorname{sgn}[p(\omega_j)]$, $j = 0, 1, 2, \dots, l$; 对于 K_p 稳定的区间, l 必大于或等于 m_1 , 有 $l = m_1 + 2N^* - 1$, N^* 为非负整数^[10-11]。

文献[1,3,12]表明当 K_p 给定时, K_d-K_i 平面稳定区域是由一系列直线相交而成的凸多边形; 结合式(6)得出这些边界线为:

$$\begin{cases} K_i = 0 \\ (K_i - K_d \omega_j^2) - \omega_j \operatorname{Im}(\bar{G}(j\omega_j)) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, l \end{cases} \quad (11)$$

其中, ω_j 即为式(5)的解, 也就是固定 K_p 时, 负的PID频率特性曲线 $-C(j\omega)$ 和逆Nyquist曲线 $\bar{G}(j\omega)$ 交点所对应的频率。

4.1 K_d-K_i 平面稳定范围的确定

由广义Hermite-Biehler定理^[7], 结合文献[10]有引理4。

引理 4^[10] 为保证拟多项式(7)是稳定的, 序列 I 必须满足:

$$M^* = \begin{cases} \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1} 2i_{l-1} + (-1)^l i_l\} \times \\ (-1)^{l-1} \operatorname{sgn}[q(\omega_{l-1}^+)] & M^* \text{ 为偶数} \\ \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^l 2i_l\} \times \\ (-1)^l \operatorname{sgn}[q(\omega_l^+)] & M^* \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (12)$$

由引理4可以得到满足式(12)的序列 I , 序列 I 由 $l+1$ 个元素 i_j 构成, 形式为 $I = \{i_0, i_1, \dots, i_l\}$ 。

根据序列 I 可以确定一组线性不等式为:

$$\begin{cases} (K_i - K_d \omega_j^2) - \omega_j \operatorname{Im}(\overline{G}(j\omega)) > 0 & i_j = 1 \\ (K_i - K_d \omega_j^2) - \omega_j \operatorname{Im}(\overline{G}(j\omega)) < 0 & i_j = -1 \end{cases} \quad (13)$$

式中, $j=0,1,2,\dots,l$, $i_j=1$ 表示边界直线 $(K_i - K_d \omega_j^2) - \omega_j \operatorname{Im}(\overline{G}(j\omega))=0$ 上方为稳定区间,反之,下方为稳定区间。由满足式(12)的序列 $I = \{i_0, i_1, \dots, i_l\}$ 即可确定 K_d-K_i 平面的稳定区域。

4.2 特殊情况的处理

4.2.1 $\omega=0$

将 $s=j\omega$ 代入式(7), 有:

$$\begin{aligned} \delta(j\omega) &= \delta_r(\omega) + j\delta_i(\omega) \\ \delta_r(\omega) &= -Q_1\omega \cos(\tau\omega) - Q_r\omega \sin(\tau\omega) + \\ &\quad (K_i - K_d\omega^2)P_r - K_p\omega P_i \\ \delta_i(\omega) &= Q_1\omega \cos(\tau\omega) - Q_r\omega \sin(\tau\omega) + \\ &\quad (K_i - K_d\omega^2)P_i + K_p\omega P_r \end{aligned}$$

可得:

$$\begin{aligned} \delta_r(0) &= K_i b_0, \quad \delta_r'(0) = 0 \\ \delta_i(0) &= 0, \quad \delta_i'(0) = a_0 + K_p b_0 \end{aligned}$$

由引理1可知, 系统稳定时必有:

$$\delta_i'(0)\delta_r(0) - \delta_i(0)\delta_r'(0) > 0$$

得:

$$K_i b_0 (a_0 + K_p b_0) > 0$$

有如下结论: 当 $\omega=0$, 若 $b_0 \neq 0$, 存在边界线 $K_i=0$ 。

1) 当 $b_0(a_0 + K_p b_0) > 0$, 若系统稳定, 必有 $K_i > 0$, 则 $i_0 = 1$;

2) 当 $b_0(a_0 + K_p b_0) < 0$, 若系统稳定, 必有 $K_i < 0$, 则 $i_0 = -1$ 。

4.2.2 $\omega=\infty$

根据文献[3,8], 可知:

1) 当 $n_i = q+1$ 时, 因 $n+q$ 为偶数, 存在边界线 $K_d = \pm \frac{b_{n_i}}{a_q}$ 。显然, 稳定区域只可能存在于这两条边界线之间。

2) 当 $n_i > q+1$ 时, 不存在稳定的边界线。

4.3 确定 K_d-K_i 平面稳定域的“逆时针”规律

当序列 I 中元素数量 $l+1$ 较大时, 存在多个可能的序列 I 使式(12)成立; 此时需要对每个满足式(12)的序列 I 运用式(13), 寻找可能存在的稳定区域。有的 I 所形成的稳定区域可能为空集, 即使某 I 所形成的空间存在稳定区域, 确定该稳定区域也显得比较繁琐和困难, 本节将给出一种快速便利的确定

方法。

在以 K_d 为横坐标、 K_i 为纵坐标的 K_d-K_i 平面上, 令序列 I 中元素 $i=1$ 表示边界直线的方向为正, 箭头向上; $i=-1$ 表示边界直线的方向为负, 箭头向下。显然, 对于一个稳定闭区域, 若对每个边界直线按上述规律表示, 那么稳定区域必在其边界的左侧, 同时封闭的稳定区域边界形成的方向具有“逆时针”规律, 如图2所示。

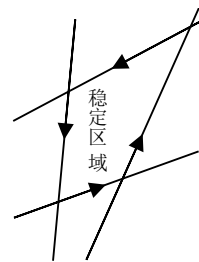


图2 逆时针规律

下面仅讨论 M^* 为奇数时的情况, M^* 为偶数时, 分析方法和结论均相同于奇数情况。

令 $\rho = (-1)^l \operatorname{sgn}[q(\omega_l^+)]$, $\lambda_0 = i_0 \rho$, $\lambda_1 = -2i_1 \rho$, $\lambda_2 = 2i_2 \rho$, \dots , $\lambda_{l-1} = (-1)^{l-1} 2i_{l-1} \rho$, $\lambda_l = (-1)^l 2i_l \rho$ 。
 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_l$ 构成序列 $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_l\}$

当 M^* 为奇数时, 式(12)右侧为:

$$y_0 = \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1} 2i_{l-1} + (-1)^l 2i_l\} \times$$

$$(-1)^l \operatorname{sgn}[q(\omega_l^+)] = \sum_{i=0}^l \lambda_i$$

当 l 大小一定时, 对于不同的序列 I , y_0 可等于 $0 \sim 2 \times l + 1$ 之间的奇数, y_0 最大为 $2 \times l + 1$ 。

定义 1 令 $I^* = \{i_0^*, i_1^*, i_2^*, \dots, i_l^*\}$, $i_j^* = (-1)^j i_0^*$, $j=1,2,\dots,l$, 称序列 I^* 具有“交错”特性。

已知某序列 $I^- = \{i_0^-, i_1^-, i_2^-, \dots, i_l^-\}$ 共对应 $l+1$ 个边界。若序列 I^- 满足式(12)且存在有效的稳定区域; 稳定区域的边界共有 M_3 条, 其相应的元素为 $i_{r_m}^-$, 下标 $r_m (m=1,2,\dots,M_3)$ 表示该元素在序列 I^- 中位置。稳定边界所对应的元素 $i_{r_m}^-$ 构成一个子序列 $IA^- = \{i_{r_1}^-, \dots, i_{r_m}^-, \dots, i_{r_{M_3}}^-\}$, 其他边界所对应元素构成的子序列为 $IB^- = \{i_{b_1}^-, \dots, i_{b_j}^-, \dots, i_{b_{M_4}}^-\}$, $j=1,2,\dots,M_4$, $M_4 = l - M_3 + 1$ 。有:

$$I^- = IA^- \cup IB^-$$

$$y_0 = \sum_{i=0}^l \lambda_i^- = \sum_{r_m \in IA^-} \lambda_{r_m}^- + \sum_{b_j \in IB^-} \lambda_{b_j}^- = \alpha + \beta$$

若 $i_{r_m}^- = i_m^*$, $m=1,2,\dots,M_3$, 那么有:

$$\left| \sum_{m=1}^{M_3} \lambda_{r_m}^- \right| = \sum_{m=1}^{M_3} |\lambda_{r_m}^-|$$

首先按定义1确定交错序列 I^* 。

定理 1 已知序列 $I^- = \{i_0^-, i_1^-, i_2^-, \dots, i_l^-\}$ 对应有 $l+1$ 个边界线, 这些边界线将 K_d-K_i 平面分割成若干区域; 若某区域共有 M_3 ($M_3 \leq l$) 个边界, 其所对应的元素有 $i_{r_m}^- = i_{r_m}^*$, $m=1, 2, \dots, M_3$, 且该 M_3 条边界方向符合逆时针规律, 那么该区域为有效的稳定区域。

证明 从边界线方向的定义可知, K_d-K_i 平面上稳定区域方向必须符合逆时针规律。下面证明 $i_{r_m}^- = i_{r_m}^*$ 条件可使序列 I^- 满足式(12)。不妨假设 $\rho=1$, 则有:

$$I^* = \{i_0^*, i_1^*, i_2^*, \dots, i_l^*\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$$

$$\lambda^* = \{\lambda_0^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_l^*\} = \{1, 2, 2, \dots, 2, 2\}$$

将满足 $i_{r_m}^- = i_{r_m}^*$ 的 M_3 个元素构成子序列 IA^- , 其他元素构成子序列 IB^- 。有 $I^- = IA^- \cup IB^-$, $y_0 = \alpha + \beta$ 。同样将序列 I^* 作相应的分解, 表示为 $I^* = IA^* \cup IB^*$

已知有 $l = m_1 + 2N^* - 1$, N^* 为非负整数。根据 IA^- 是否包含元素 i_0^- , 分两种情况讨论:

1) IA^- 不包含元素 i_0^- 即 $r_1 \neq 0$ 时, 因 $r_1 \neq 0$ 且

$$i_{r_m}^- = i_{r_m}^*, m=1, 2, \dots, M_3, \text{ 那么有 } \alpha = \sum_{m=1}^{M_3} \lambda_{r_m}^- = 2M_3, \beta$$

$$\text{最大取值为 } \beta_{\max} = \sum_{bj \in IB^-} \lambda_{bj}^- = 2(M_4 - 1) + 1.$$

当 M^* 为奇数时, $M+q$ 为奇数, 有:

$$m_1 = 2LN + \frac{M + (r_1 - l_1) + 1}{2}$$

$$\text{则 } \beta_{\max} = 4LN + M + (r_1 - l_1) + 2 \times 2N^* - 2M_3 - 1.$$

可按下述方法确定子序列 IB^- 中元素的符号。首先令 $IB^- = IB^*$, 然后将子序列 IB^- 中 N^* 个元素(不含 $b1$ 项元素 i_0^-) 符号取反, 其他元素符号保持不变, 则子序列 IB^- 所对应的 λ_{bj}^- 由 1 个 1、 N^* 个 -2 和 $(M_4 - N^* - 1)$ 个 2 构成, 可使:

$$\beta = \sum_{bj \in IB^-} \lambda_{bj}^- = 1 \times 1 + N^* \times (-2) + (M_4 - N^* - 1) \times 2 =$$

$$2m_1 - 2M_3 - 1$$

则有, $\alpha + \beta = 2m_1 - 1 = 4LN + M - (l_1 - r_1)$, 即序列 I^- 满足式(12), 则该 M_3 条边界所确定的有效区域为稳定区域。

2) IA^- 包含元素 i_0^- 即 $r_1 = 0$ 时, 因 $r_1 = 0$ 且 $i_{r_m}^- = i_{r_m}^*$, $m=1, 2, \dots, M_3$, 那么有:

$$\alpha = \sum_{m=1}^{M_3} \lambda_{r_m}^- = 2M_3 - 1$$

β 最大取值为:

$$\beta_{\max} = \sum_{bj \in IB^-} \lambda_{bj}^- = 2M_4 = 2m_1 + 2 \times 2N^* - 2M_3$$

同理按下述方法确定子序列 IB^- 中元素的符号。首先令 $IB^- = IB^*$, 然后将子序列 IB^- 中 N^* 个元素符号取反, 其他元素符号保持不变, 则子序列 IB^- 所对应的 λ_{bj}^- 由 N^* 个 -2 和 $(M_4 - N^*)$ 个 2 构成, 可使

$$\beta = \sum_{bj \in IB^-} \lambda_{bj}^- = N^* \times (-2) + (M_4 - N^*) \times 2 = 2m_1 - 2M_3$$

则有 $\alpha + \beta = 2m_1 - 1 = 4LN + M - (l_1 - r_1)$, 即序列 I^- 满足式(12), 则这 M_3 条边界所确定的有效区域为稳定区域。证毕

定理1说明, 不必先找出满足(12)式的所有序列 I , 再对每个序列 I 分析寻找可能存在的稳定区域。

5 实现步骤

由4.2.1节可确定元素 i_0 的符号。根据定理1, 当 $i_0 = 1$ 时, 令 $I = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$; 当 $i_0 = -1$ 时, 令 $I = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$; 可以快速确定 K_1-K_d 平面的稳定范围。总结如下:

1) 利用稳定的必要条件(见3.1节), 剔除PID控制下不稳定的时滞对象;

2) 用4.3节方法确定频率 ω_0 , 以及利用引理3确定 K_p 的稳定范围;

3) 在 K_p 的稳定范围, 取某 $K_p = K_p^*$ 。在复平面上作纵向直线, 其横坐标为 $-K_p^*$, 求出该直线与逆Nyquist曲线 $\overline{G}(j\omega)$ 交点 $A_j = (-K_p^*, \text{Im}(\overline{G}(j\omega_j)))$, $j=1, 2, \dots, l$, 这些点对应的频率按从小到大顺序排列分别为 $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$; $\omega_0 = 0$;

4) 在 K_d-K_i 平面, 确定稳定范围的边界直线 $K_i - \omega_j^2 K_d - \omega_j \text{Im}(\overline{G}(j\omega_j)) = 0$ 和 $K_i = 0$;

5) 确定 i_0 符号, 在此基础上确定序列 $I = \{i_0, i_1, \dots, i_l\}$;

6) 根据序列 $I = \{i_0, i_1, \dots, i_l\}$, 确定各边界的方向; 利用引理4和“逆时针规律”, 确定 K_d-K_i 平面的稳定域;

7) 在 K_p 的稳定范围遍历 K_p , 重复步骤3)~步骤6)过程, 可获得时滞系统PID控制器参数稳定域的三维空间。

6 实例

例 1 被控对象为:

$$G(s) = \frac{-s^4 - 7s^3 - 2s + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(s^2 + s + 1)} e^{-0.05s}$$

由 $G(s)$ 可得 $M=7$, $q=4$, $l_1=3$, $r_1=1$, $m_1=5$, $L=1$; 根据引理3, 可得 K_p 的稳定范围为 $(-24 \ 6.069)^{[6]}$. 当 $K_p=-3$ 时, $\omega_0=0$, $\omega_1=0.33$, $\omega_2=0.67$, $\omega_3=0.77$, $\omega_4=3.58$, $\omega_5=33.77$, $\omega_6=95.1$, $l=6$, $M^*=9$. 每个 ω 对应一条边界直线, 在 K_d-K_i 平面依次标记为直线 $L_0, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$, 如图3所示. 因 $i_0=1$, 令 $I=\{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1\}$, 并在图3上标明边界直线方向. 根据“逆时针规律”, 则 P_1 和 P_2 区域是稳定的区域.

该例共有5个序列 I 满足式(12), 表示如下:

- $I_1 = \{1, -1, -1, -1, 1, -1, 1\}$
- $I_2 = \{1, -1, 1, 1, 1, -1, 1\}$
- $I_3 = \{1, -1, 1, -1, -1, -1, 1\}$
- $I_4 = \{1, -1, 1, -1, 1, 1, 1\}$
- $I_5 = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, -1\}$

其中, 序列 I_3, I_4, I_5 不存在稳定区域, 序列 I_1, I_2 所对应的稳定区域分别为 P_1, P_2 区域.

通过遍历 K_p 的稳定范围, 可确定PID控制器参数的三维稳定空间, 如图4所示.

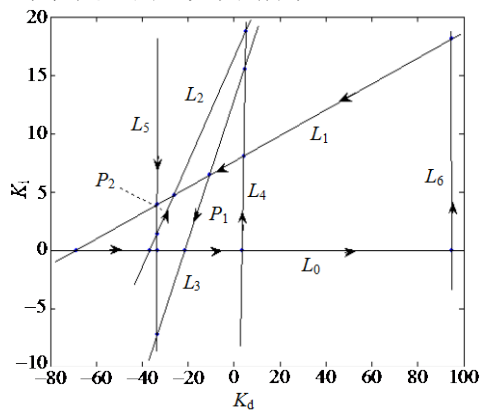


图3 K_d-K_i 平面稳定域

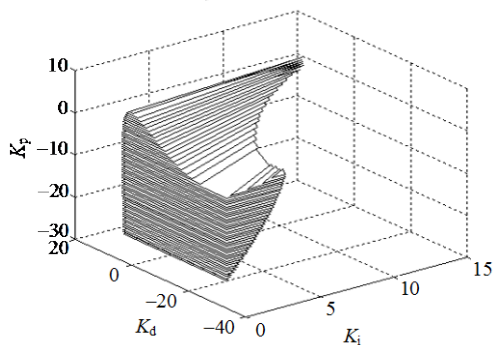


图4 PID控制参数稳定域

$K_p = -20$ 时, K_d-K_i 平面上稳定区域如图5中四

边形所示. 在图5中四边形内任选5点A、B、C、D和E, 其中C点位于稳定区域中心附近, 其他4点分别靠近4条边线; 它们的坐标依次为:

- $(K_d, K_i) = (-32, 0.5)$
- $(K_d, K_i) = (-15, 1)$
- $(K_d, K_i) = (-15, 0.6)$
- $(K_d, K_i) = (2.1, 0.7)$
- $(K_d, K_i) = (-15, 0.05)$

以这些参数所设计的PID控制器, 闭环系统都是稳定的; 所对应的单位阶跃响应如图6所示. A、C、和D这3点所对应的单位阶跃响应曲线较为接近且综合性能较好, 而积分增益较小的E点所对应的单位阶跃响应负超调过大, 积分增益较大的B点所对应的单位阶跃响应相对稳定性较差. 可见, 若在稳定区域中心附近设计PID控制器参数, 不仅能使系统具有较好的动态特性, 而且能使PID控制器本身具有一定的非脆弱性.

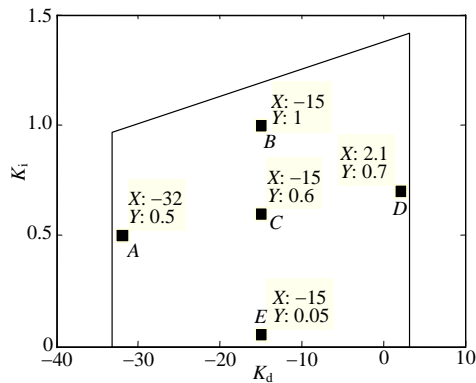


图5 $K_p = -20$ 时, K_d-K_i 平面上稳定域

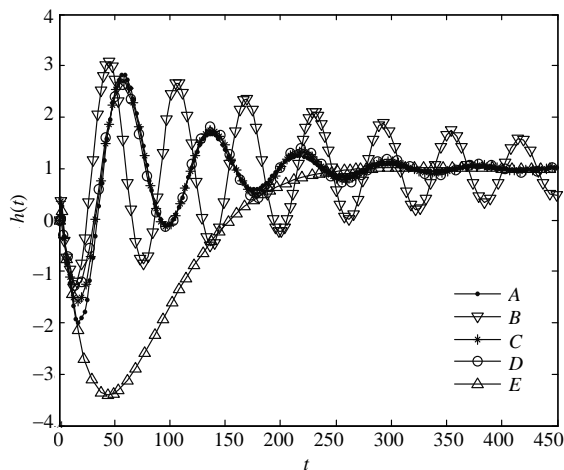


图6 $K_p = -20$ 时, 不同 (K_d, K_i) 的单位阶跃响应

7 总结

本文所研究的算法首先根据对象的频率特性, 确定用于稳定性分析所需的频率范围 $(0, \omega_0)$; 其次

借助广义Hermite-Biehler定理,在时滞对象的逆Nyquist特性上,运用引理3确定比例增益 K_p 的稳定范围。当 K_p 一定时,在 K_d - K_i 平面上,针对多条边界直线,运用一种逆时针规律快速确定该二维平面上参数的稳定区域,从而给出了一种时滞系统PID控制器参数稳定域的方法,该方法可直接用于编程实现,本文论述了实现过程中所需解决的关键问题。另外,该方法基于时滞对象的频率特性,因而在对象数学模型未知时,只要能获取其频率特性,也可运用该方法和步骤,得出PID控制器参数稳定域的三维空间。

参 考 文 献

- [1] KEEL L H, BHATTACHARYYA S P. Controller synthesis free of analytical models: Three term controllers[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(6): 1353-1369.
- [2] HOHENBICHLER N, ABEL D. Calculating all K_p admitting stability of a PID control loop[C]//Proceedings of the 17th World Congress. Seoul, Korea: The International Federation of Automatic Control, 2008, 7: 6-11.
- [3] BAJCINCA N. Design of robust PID controllers using decoupling at singular frequencies[J]. Automatica, 2006, 42(11): 1943-1949.
- [4] XIANG C, WANG Q G. Stabilization of second-order unstable delay processes by simple controllers[J]. Journal of Process Control, 2007, 17: 675-682.
- [5] SILVA G J, DATTA A, BHATTACHARYYA S P. New results on the synthesis of PID controllers[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(2): 241-252.
- [6] 方斌. 时滞系统PID控制器增益的稳定范围研究[J]. 信息与控制, 2009, 38(5): 546-551.
FANG Bin. Researches to gain stabilizing regions of PID controller for time delay systems[J]. Chinese Journal of Information and Control, 2009, 38(5): 546-551.
- [7] ELLMAN R, COOKE K L. Differential-difference Equations[M]. London: Academic Press Inc, 1963.
- [8] 欧林林, 顾诞英, 张卫东. 线性时滞系统的PID控制器参数稳定算法[J]. 上海交通大学学报, 2006, 40(7): 1117-1121.
OU Lin-lin, GU Dan-ying, ZHANG Wei-don. The computation of stabilizing sets of PID controllers for linear processes with time delay[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2006, 40(7): 1117-1121.
- [9] KHARITONOV V L, NICULESCU S L, MORENO J. Static output feedback stabilization: Necessary conditions for multiple delay controllers[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(1): 82-86.
- [10] OLIVEIRA V A, TEIXEIRA M C M, COSSI L. Stabilizing a class of time delay systems using the Hermite-Biehler theorem[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2003, 369(1): 203-216.
- [11] HO M T, DATTA A, BHATTACHARYYA S P. Generalizations of the Hermite-Biehler theorem: the complex case[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2000, 320(1-3): 23-26.
- [12] HO M T, SILVA G J, DATTA A, et al. Real and complex stabilization: stability and performance[C]//Proceedings of the 2004 American Control Conference. Boston, USA: IEEE, 2004, 6: 4126-4138.

编辑 漆蓉