

# 基于空穴理论的复杂网络传染病传播控制

张昊, 陈超, 王长春

(国防科学技术大学信息系统工程重点实验室 长沙 410073)

**【摘要】**针对传染病的传播与控制问题,应用复杂网络进行建模,模型支持非指数形式的传播和康复概率函数,具有准确的预测精度,控制措施考虑边移除和节点移除对传染病发展的影响,控制参数可自由调节。文中利用空穴理论对模型进行了数学解析,得到了可以进行数值计算的解析结果,仿真实验验证了解析结果的准确性。对控制措施的实施表明加强重点人群防控对防治传染病具有重要意义。

**关键词** 复杂网络; 传染病; 免疫; 传播

中图分类号 O231.5; N945.12

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2011.04.001

## Epidemic Spread and Control on Complex Networks Using Cavity Theory

ZHANG Hao, CHEN Chao, and WANG Chang-chun

(Science and Technology on Information Systems Engineering Laboratory, National University of Defense Technology Changsha 410073)

**Abstract** The epidemic spread and control problem is studied, and a model with exact predicting precision is presented based on complex networks, in which the non-exponential spread and recover function is considered. The influence of removing edges and nodes from the network is considered in the control strategy, and the control parameters can be adjusted freely. Mathematical analysis for the model is presented through utilizing cavity theory. The analytical results are confirmed by simulation experiments. The experiments on control strategy show that it is very important for the control of epidemic for people with more social contacts.

**Key words** complex networks; epidemic; immune; spread

传染病传播与控制是一个跨学科研究课题。传染病与计算机病毒、新闻、谣言的传播规律与动力具有很大的相似性,引起了医学、计算机科学和社会学等研究者的广泛关注。对个体而言,传染病的研究侧重于染病机理、治疗手段等;然而从社会的角度,传染病在社会中传播和控制的相关研究具有重要的意义,揭示传染病的传播规律与动力,分析防控措施的效果,以及防控措施的优化,对社会防疫工作有指导和促进作用。

文献[1-4]总结了传染病传播的数学模型,把一定范围内的社会群体根据身体状态分成健康但易感染(susceptible)、感染(infected)、免疫(immune)、移除(removed)等几类。感染者康复或死亡后不再具有传染性,故移除(remove)比康复(recover)含义更准确。根据病原体的致病机理和传播性,从而可定义各类人群数量变化的微分方程。上述数学模型在一

定程度上抽象了社会中传染病的发展过程,具有形式简洁,原理清楚的特点,但存在的不足是,该模型假设人群是充分混合的,传染病对个体具有相同的感染概率。但在社会现实中,个体感染传染病的概率存在差异<sup>[5-6]</sup>,接触他人多的个体(如医务工作者、零售人员、饭店服务员等)接触病人的机会高于普通人,更容易被传染病感染。

针对以上不足,研究人员提出了基于网络的传染病模型,把社会中个体之间的接触行为抽象为网络模型。研究发现,网络结构对传染病传播有重要的影响<sup>[7-11]</sup>。基于网络的传染病模型将复杂网络模型引入传染病研究,但存在以下不足。

1) 假设处于易感染态的个体与病原载体接触时,在单位时间内以常量 $\beta$ 的比率被传染,即当易感染个体接触病原载体时,随时间被感染的概率密度函数 $s(t)$ (传播函数)满足式(1)和(2),从而可以推

导出式(3):

$$s(t) = \beta(1 - \int_0^t s(\tau) d\tau) \quad (1)$$

$$\int_0^{+\infty} s(t) dt = 1 \quad (2)$$

$$s(t) = \beta e^{-\beta t} \quad (3)$$

假设感染态个体以常量  $\gamma$  的比率转化为移除状态, 同理可得感染态个体在被感染后, 随时间转化为移除状态的概率密度函数  $r(t)$ :

$$r(t) = \gamma e^{-\gamma t} \quad (4)$$

式中,  $r(t)$  称为移除或康复函数, 模型假设  $s(t)$  和  $r(t)$  为指数形式函数, 但现实世界中,  $s(t)$  和  $r(t)$  并不一定为指数形式。若  $r(t)$  为指数形式, 表明被感染者在感染后的时间  $[t, t + dt]$  内进入移除态的概率随时间  $t$  递减, 而在现实生活中, 有些传染病的不同患者有相近的康复周期或死亡周期, 与指数形式的  $r(t)$  是矛盾的。文献[12-13]指出了  $r(t)$  仅为指数形式表示的不足。

2) 假设易感染者与  $k$  个被感染者接触, 在  $dt$  时间内被传染的概率为  $1 - (1 - \beta dt)^k \approx k\beta dt$  当  $dt$  足够小时, 在距离初始时间很小的时间范围内, 该式是近似正确的, 但对于大时间范围数值积分, 以上数学处理并不精确, 因其仅考虑了  $1 - (1 - \beta dt)^k$  的一阶导数, 忽略了不为0的高阶导数, 从而使大时间范围数值积分产生了较大的累计误差。

文献[14]利用空穴理论<sup>[15]</sup>(cavity theory)研究分析了复杂网络的逾渗问题。在此基础上, 文献[13]基于消息传递方法对复杂网络中传染病传播进行研究, 提出了支持非指数形式的传播和康复函数的复杂网络传染病的解析方法, 取得了精确的理论预测结果。传统的传染病模型一般假设常数的状态转移比率, 文献[13]提出的方法突破了该限制, 可以自定义接触行为相应的传播与康复概率函数, 从而事实上提供了一种可行的对接触行为阵发性和记忆性的解析工具。

在以上工作的基础上, 本文重点考虑了传染病传播的控制措施建模, 控制措施包括减少节点的部分边连接和对部分节点的直接免疫, 即边移除和节点移除。文中基于复杂网络对加入控制措施的传染病传播与控制问题进行建模, 模型可以支持非指数形式的传播与康复概率函数, 且可调节各控制参数, 得到了完整的数学解析结果, 最后通过仿真实验验证了解析结果的准确性, 并简要比较了不同控制措施的效果。

## 1 传染病传播控制模型与解析

### 1.1 基于复杂网络的传染病SIR模型

#### 1.1.1 网络模型

本文用无向网络表示社会中个体之间的接触关系, 网络中的节点表示社会中的个体, 边表示节点之间的接触(为便于描述, 设边的权重均为1); 与某节点  $i$  有边直接相连的节点集合称为节点  $i$  的邻居集合, 记为  $n(i)$ ; 节点的  $i$  邻居个数记为  $\text{degree}(i)$ , 称为节点的度。从网络中随机选择一节点, 该节点度为  $k$  的概率记为  $p(k)$ ,  $\sum_k p(k) = 1$ 。

随机选择一条边, 则其指向度为  $k$  节点的概率为:

$$r(k) = kp(k) / \sum_k k' \cdot p(k') \quad (5)$$

该节点剩余度(减去随机选择的指向其的边)为  $k-1$ , 记剩余度为  $k$  的概率为:

$$q(k) = (k+1)p(k+1) / \sum_k k' \cdot p(k') \quad (6)$$

记节点的联合度分布为  $r(k_1, k_2)$ , 表示随机选择一条边, 其连接的两个节点的度为  $k_1$  和  $k_2$  的概率, 则  $r(k_1, k_2) = r(k_2, k_1)$ ,  $\sum_{k_1, k_2} r(k_1, k_2) = 1$ 。

#### 1.1.2 传染病SIR模型

个体状态分为易感染态、感染态和移除态3种。易感染态个体不具有传染性, 接触病原体时以某概率被感染, 从而进入感染态; 感染态个体具有传染性, 感染态个体以某概率康复或死亡, 不再具有传染性, 即进入移除态。

记易感染态个体接触病原载体时发生疾病传播的概率密度函数为  $s(t)$ ,  $s(t)dt$  表示易感染态个体开始持续接触病原载体后, 在时间  $[t, t + dt]$  内被疾病感染的概率; 记康复函数为  $r(t)$ ,  $r(t)dt$  表示感染态个体在被感染后的时间  $[t, t + dt]$  内康复的概率。 $s(t)$  和  $r(t)$  可以是非指数形式概率密度函数。

在感染后的时间  $[t, t + dt]$  内, 感染者向其处于易感染态的邻居传播疾病的概率记为:

$$f(t)dt = s(t)(1 - \int_0^t r(\tau) d\tau)dt = s(t) \int_t^{+\infty} r(\tau) d\tau dt \quad (7)$$

#### 1.1.3 控制措施

本文考虑的传染病控制措施分为两种: 1) 移除节点间的部分边连接; 2) 对部分节点直接注射疫苗, 从而对某传染病永久免疫。

在网络初始时( $t=0$ ), 令  $1-z$  表示处于感染态的节点占有所有节点的百分比, 令  $s_k$  表示度为  $k$  的节点中处于移除态的个体占总数(不包括初始时染病

节点)的百分比, 则网络中初始时已处于移除态的节点占总数的百分比为  $s = \sum_k z \cdot p(k) \cdot s_k$ 。

$b_{k_1 \rightarrow k_2}$  表示度为  $k_1$  的节点到度为  $k_2$  的节点的有向边被移除的比例, 这里将一条无向边视作两条方向相反的有向边, 如图1b所示, 则网络中边被移除的百分比  $b = \sum_{k_1, k_2} r_{k_1 \rightarrow k_2} b_{k_1 \rightarrow k_2}$ , 其中  $r_{k_1 \rightarrow k_2} = r(k_1, k_2)$ 。

1.2 数学解析

对于存在度关联的随机网络, 闭路径的长度为  $O(\ln N)$ , 当节点个数  $N$  趋向于无穷时, 局部网络近似于树型网络, 故可基于cavity theory进行求解。为便于理解, 令  $i, j, l$  均表示节点,  $H_{i \rightarrow j}(t)$  表示  $t$  时刻内节点  $i$  向  $j$  没有传播疾病的概率,  $s_i$  表示节点  $i$  被移除的概率,  $b_{i \rightarrow j}$  表示节点  $i$  到  $j$  的边被移除的概率。

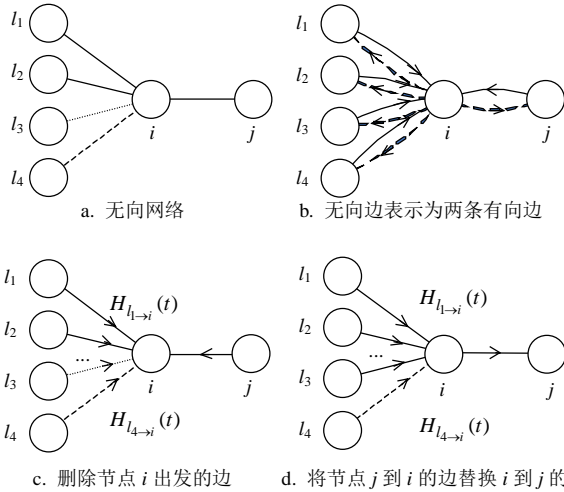


图1 网络模型与cavity theory求解示意图

在图1中, 无向网络如图1a所示, 将图1a中的无向边表示为两条有向边得图1b, 删除从节点  $i$  出发的边得图1c, 将节点  $j$  到  $i$  的边替换  $i$  到  $j$  的边得图1d。

1) 应用cavity theory, 结合图1d可知<sup>[13-14]</sup>:

$$H_{i \rightarrow j}(t) = 1 - \int_0^t f(\tau) (1 - b_{i \rightarrow j}) \cdot (1 - z + z(1 - s_i) (1 - \prod_{l \in n(i)/j} H_{l \rightarrow i}(t - \tau))) d\tau = \quad (8)$$

$$1 - \int_0^t f(\tau) \theta(z, b_{i \rightarrow j}, s_i, \prod_{l \in n(i)/j} H_{l \rightarrow i}(t - \tau)) d\tau$$

其中:

$$H_{k_1 \rightarrow k_2}(t) = 1 - \int_0^t f(\tau) \cdot \theta(z, b_{k_1 \rightarrow k_2}, s_{k_1}, (\sum_m r(m | k_1) \cdot H_{m \rightarrow k_1}(t - \tau))^{k_1 - 1}) d\tau \quad (16)$$

初始  $t = 0$  时, 疾病没有发生传播, 因此对于所有的  $k_1$  和  $k_2$ ,  $H_{k_1 \rightarrow k_2}(0) = 1$  成立, 从而式(16)可以数值求解, 根据节点的度对式(9)作转换:

$$\theta(z, b_{i \rightarrow j}, s_i, \prod_{l \in n(i)/j} H_{l \rightarrow i}(t - \tau)) = (1 - b_{i \rightarrow j}) \cdot (1 - z + z(1 - s_i) (1 - \prod_{l \in n(i)/j} H_{l \rightarrow i}(t - \tau)))$$

2) 令  $P(S_i(t) = 1)$  表示节点  $i$  在  $t$  时刻处于易感染态的概率, 记为  $P(S_i)$ , 观图1c可得:

$$P(S_i) = z(1 - s_i) \cdot \prod_{l \in n(i)} H_{l \rightarrow i}(t) \quad (9)$$

3) 令  $P(I_i(t) = 1)$  表示节点  $i$  在  $t$  时刻处于感染态的概率, 记  $P(I_i(t) = 1)$  为  $P(I_i)$ , 则:

$$\frac{dP(I_i)}{dt} = -\frac{dP(S_i)}{dt} - (1 - z)r(t) + \int_0^t r(t - \tau) \frac{dP(S_i)}{d\tau} d\tau \quad (10)$$

4) 令  $P(R_i(t) = 1)$  表示节点  $i$  在  $t$  时刻处于移除态的概率, 记  $P(R_i(t) = 1)$  为  $P(R_i)$ , 则:

$$P(R_i) = 1 - P(S_i) - P(I_i) \quad (11)$$

由公式可知, 如果求得所有节点间的  $H_{i \rightarrow j}(t)$ , 则可以求出网络中任一节点在时刻  $t$  时处于3种状态的概率, 从而可以求出网络中节点处于3种状态的平均期望, 分别记为  $P(S)$ ,  $P(I)$  和  $P(R)$ , 即:

$$P(S) = \frac{1}{N} \sum P(S_i) \quad (12)$$

$$P(I) = \frac{1}{N} \sum P(I_i) \quad (13)$$

$$P(R) = \frac{1}{N} \sum P(R_i) \quad (14)$$

对于存在度关联的随机网络<sup>[16]</sup>, 可以假设度相同的节点的功能是相同的, 从而可以把以上各种针对节点的函数按节点对应的度进行分类。令  $k_1$  和  $k_2$  分别表示节点  $i$  和  $j$  的度, 则:

$$\prod_{l \in n(i)/j} H_{l \rightarrow i}(t) = \sum_i \frac{(k_1 - 1)!}{l_1! l_2! \dots} (r(1 | k_1) H_{1 \rightarrow k_1}(t))^{l_1} (r(2 | k_1) H_{2 \rightarrow k_1}(t))^{l_2} \dots = (\sum_m r(m | k_1) \cdot H_{m \rightarrow k_1}(t))^{k_1 - 1} \quad (15)$$

式中,  $r(m | k_1)$  表示从度为  $k_1$  的节点随机选择一条边, 其连接的另一节点度为  $m$  的概率;  $\sum_l$  表示对  $l_1, l_2, \dots$  分别取非负整数, 且其和为  $k_1 - 1$  的所有组合求和。从而式(8)简化为:

$$P(S_k) = z(1 - s_k) \cdot (\sum_m r(m | k) \cdot H_{m \rightarrow k}(t))^k \quad (17)$$

同理, 对式(10)~(14)作相应转换, 则可求出任

意时刻的传染病传播情况。

若令  $b_{k_1 \otimes k_2} = b_{k_1}$ ,  $r(m|k) = r(m)$ , 即认为对边的移除仅与边出发的节点度数相关, 且随机网络不存在度关联(配置模型网络<sup>[17]</sup>), 则式(16)简化为:

$$H_{k_1 \rightarrow}(t) = 1 - \int_0^t f(\tau) \cdot \theta(z, b_{k_1}, s_{k_1}, (\sum_m r(m) \cdot H_{m \rightarrow}(t-\tau))^{k_1-1}) d\tau \quad (18)$$

式中,  $H_{k_1 \otimes}(t)$  表示从度为  $k_1$  的节点出发的边在  $t$  时刻内没有传播疾病的概率。

令  $H(t) = \sum_m r(m) \cdot H_{m \rightarrow}(t)$ , 则:

$$H(t) = \sum_m r(m) \cdot H_{m \rightarrow}(t) = \sum_m r(m) \cdot (1 - \int_0^t f(\tau) \cdot \theta(z, b_m, s_m, H(t-\tau)^{m-1}) d\tau) = 1 - \int_0^t f(\tau) \cdot (\sum_m r(m) \cdot \theta(z, b_m, s_m, H(t-\tau)^{m-1})) d\tau \quad (19)$$

这样, 由初始值  $H(0) = 1$  可以对  $H(t)$  进行数值求解。在满足式(18)和(19)的前提条件下, 式(17)可简化为:

$$P(S_k) = z(1 - s_k) \mathfrak{A}H(t)^k \quad (20)$$

式(10)~(14)也可作相应转换, 即可得任意时刻各节点处于3种状态的概率。

### 1.3 与相关研究结果比较

对于式(19), 如果不存在边移除和节点移除, 即令  $b_m = s_m = 0$  对于所有节点成立, 得到:

$$H(t) = 1 - \int_0^t f(\tau) \cdot (\sum_m r(m) \cdot \theta(z, 0, 0, H(t-\tau)^{m-1})) d\tau = 1 - \int_0^t f(\tau) \sum_m (r(m)(1 - z(H(t-\tau))^{m-1})) d\tau \quad (21)$$

式(21)与文献[13]的式(26)的结果一致, 可表示无控制措施情况下的传染病传播问题。

对于式(19), 如果令  $z = 1$  且  $\int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau = 1$ , 即传播必然会从染病节点向邻居节点传播, 当  $t = +\infty$  时, 则式(19)可转化为:

$$H(\infty) = 1 - \int_0^{+\infty} f(\tau) (\sum_m r(m) \cdot \theta(1, b_m, s_m, H(t-\tau)^{m-1})) d\tau = 1 - \sum_m (r(m)(1 - b_m)(1 - s_m) \cdot (1 - (H(\infty))^{m-1})) \int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau = 1 - \sum_m (r(m)(1 - b_m)(1 - s_m) \cdot (1 - (H(\infty))^{m-1})) \quad (22)$$

令  $U = 1 - H(\infty)$ , 则上式转化为:

$$U = \sum_m (r(m)(1 - b_m)(1 - s_m) \cdot (1 - (1 - U)^{m-1})) \quad (23)$$

与文献[14]的式(14)相同, 可表示复杂网络边和节点移除的逾渗问题。

## 2 实例解析与仿真实验

实例解析与仿真实验目的: 1) 验证第2节解析结果是否符合仿真实验; 2) 简要考察不同控制措施的效果。

考虑节点度分布服从泊松分布的无度关联的随机网络,  $p(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$ ,  $\langle k \rangle$  表示节点平均度, 取  $\langle k \rangle = 3$ 。传染病相关概率函数为  $s(t) = be^{-bt}$  和  $r(t) = ge^{-gt}$ , 则  $f(t) = \beta e^{-(\beta+\gamma)t}$ , 分别取  $b = 0.889$ ,  $r = 0.222$ ,  $1-z$  表示初始时处于感染态的节点占所有节点百分比,  $z = 0.999$ , 并分别结合以下控制措施进行数学分析求解和仿真实验: 1) 以1/2的概率随机移除网络中的边, 不移除节点。2) 从度最大的节点开始, 以0.55的概率移除该节点的边, 直到移除边的总数达到1/2, 不移除节点。3) 从度最大的节点开始, 以0.6的概率移除该节点的边, 直到移除边的总数达到1/2, 不移除节点。4) 以1/2的概率随机移除网络中的节点, 不移除边。5) 从度最大的节点开始, 以0.55的概率移除该节点, 直到移除节点的总数达到1/2, 不移除边。6) 从度最大的节点开始, 以0.6的概率移除该节点, 直到移除节点的总数达到1/2, 不移除边。

针对实验方案, 式(19)转化为:

$$H(t) = 1 - \int_0^t f(\tau) (\sum_m r(m) \cdot \theta(z, b_m, s_m, H(t-\tau)^{m-1})) d\tau = 1 - \int_0^t f(t-\tau) (\sum_m r(m) \cdot \theta(z, b_m, s_m, H(\tau)^{m-1})) d\tau = 1 - \beta e^{-(\beta+\gamma)t} \int_0^t e^{(\beta+\gamma)\tau} (\sum_m r(m) \cdot \theta(z, b_m, s_m, H(\tau)^{m-1})) d\tau \quad (24)$$

根据式(24)对时间  $t$  求微分得:

$$\frac{dH(t)}{dt} = (\beta + \gamma)(1 - H(t)) - \beta \sum_m r(m) \cdot \theta(z, b_m, s_m, H(t)^{m-1}) \quad (25)$$

$$t = \int_1^u \frac{du}{(\beta + \gamma)(1 - u) - \beta \sum_m r(m) \cdot \theta(z, b_m, s_m, u^{m-1})} \quad (26)$$

图2中, 曲线代表6种实验基于公式(10)~(14)、(17)及(24)~(26)的数值计算结果, 圆形和棱形代表6种实验分别在100次相同条件下仿真得到的实验的

平均结果; 感染者比例和移除者比例分别使用左右纵轴作为坐标轴。由于仿真实验需要使用随机数, 故基于图2的结果可以认为数值计算与仿真实验准确匹配, 实证了本文数学解析的精确性。移除者比例对时间的微分和感染者比例成线性关系, 与指数形式的康复函数  $r(t) = ge^{-gt}$  的数学含义相吻合。

图2a、2b和2c的移除边总数相同, 移除策略不同, 说明在相同的移除边总数的情况下, 对高度节点的边移除概率越高, 对传染病传播的抑制效果越好。在时间80 s时, 图2a、2b和2c中的移除者(即曾感染的个体)比例分别为0.32、0.185和0.067。

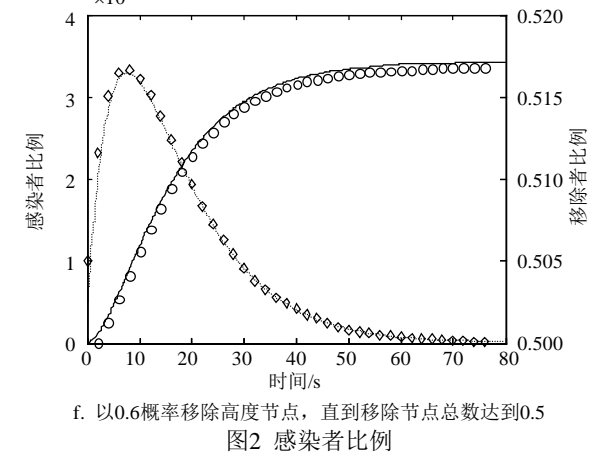
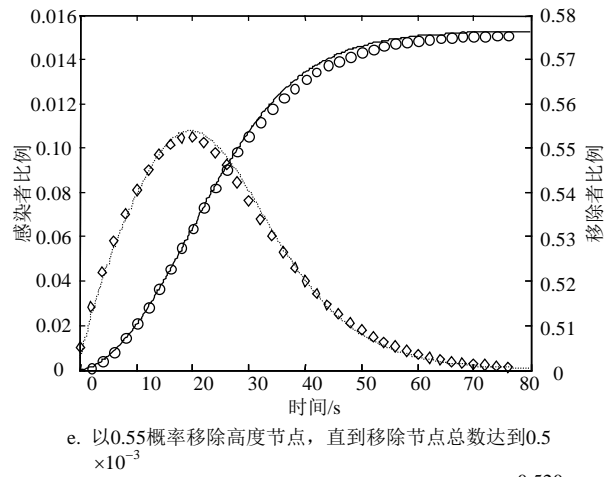
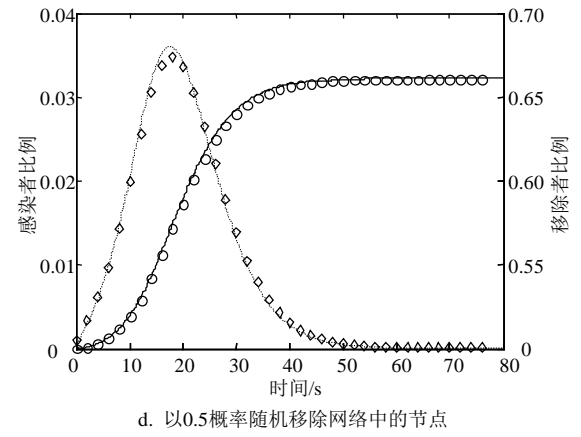
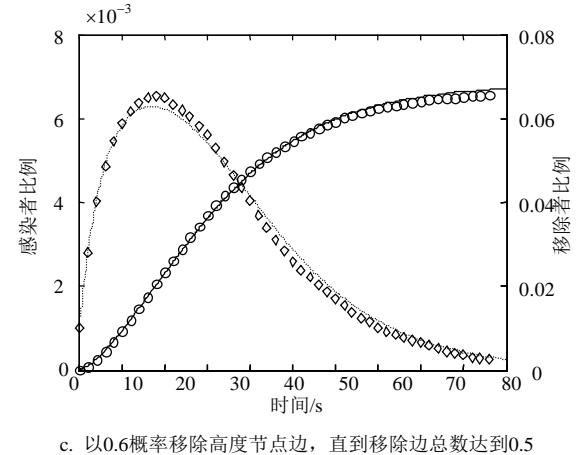
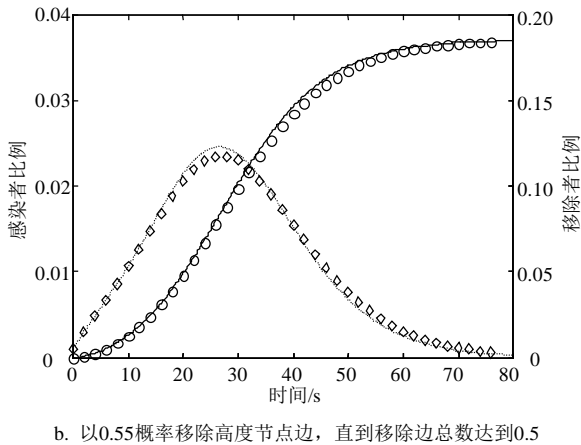
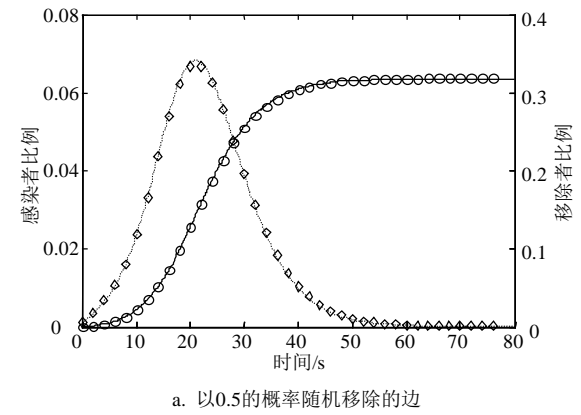


图2 感染者比例

图2d、2e和2f的移除节点总数相同, 移除策略不同, 说明在相同的移除节点总数的情况下, 对高度节点的移除概率越高, 对传染病传播的抑制效果越好, 在时间80 s时, 图2d、2e和2f中的移除者比例分别为0.661、0.576和0.517, 减去初始时已移除的0.5后, 则分别为0.161、0.076和0.017。

数学分析结果和实验相吻合, 对控制措施的研究表明, 在传染病的防控工作中, 应对社会中重点人群(与他人社会接触多的人群)作重点防控, 包括对其注射疫苗和使其减少社会接触, 就能有效抑制的传染病传播速度和最终感染率。

### 3 结 论

本文研究了基于复杂网络的传染病传播与控制问题,给出了采取控制措施时,存在度关联的随机网络中传染病传播过程的数学解析结果,并进行了仿真实验,且实验结果与数学解析相一致。本文的研究工作对SI模型和SEIR模型同样适用,如何发现最优的控制策略是下一步研究重点。

本文提出的控制措施与时间无关,即可在整个时间范围内移除节点和边,因此,可以考虑控制措施与时间有关时的传染病传播问题。

感谢Brian Karrer提供文献[13]的传染病传播仿真实验源代码和指导。

#### 参 考 文 献

- [1] BARRAT A, BARTHELEMY M, VESPIGNANI A. Dynamic processes on complex networks[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2008: 180-215.
- [2] JACKSON M O. Social and economic networks[M]. Princeton: Princeton University Press, 2008: 239-267.
- [3] DALEY D J, GANI J. Epidemic modelling: an introduction[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [4] 王亚奇, 蒋国平. 复杂网络中考虑不完全免疫的病毒传播研究[J]. 物理学报, 2010, 59(10): 6734-6743.  
WANG Ya-qi, JIANG Guo-ping. Virus spreading on complex networks with imperfect immunization[J]. Acta Phys Sin, 2010, 59(10): 6734-6743.
- [5] ALBERT R, BARABASI A L. Statistical mechanics of complex networks[J]. Rev Mod Phys, 2002, 74(1): 47-97.
- [6] PARK J, NEWMAN M E J. Statistical mechanics of networks[J]. Phys Rev E, 2004, 70: 066117.
- [7] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic spreading in scale-free networks[J]. Phys Rev Lett, 2001, 86(14): 3200.
- [8] NEWMAN M E J. Spread of epidemic disease on networks[J]. Phys Rev E, 2002, 66: 016128.
- [9] VOLZ E. SIR dynamics in random networks with heterogeneous connectivity[J]. Journal of Mathematical Biology, 2008, 56(3): 293-310.
- [10] YANG R, WANG B H, REN J, et al. Epidemic spreading on heterogeneous networks with identical infectivity[J]. Phys Lett A, 2007, 364: 189-193.
- [11] 周涛, 傅忠谦, 牛永伟, 等. 复杂网络上传播动力学研究综述[J]. 自然科学进展, 2005, 15(5): 513-518.  
ZHOU Tao, FU Zhong-Qian, NIU Yong-wei, et al. Progress in natural science, 2005, 15(5): 513-518.
- [12] VAZQUEZ A, RACZ B, LUKACS A, BARABASI A-L. Impact of non-poissonian activity patterns on spreading processes[J]. Phys Rev Lett, 2007, 98: 158702.
- [13] KARRER B, NEWMAN M E J. Message passing approach for general epidemic models[J]. Phys Rev E, 2010, 82: 016101.
- [14] SHIRAKI Y, KABASHIMA Y. Cavity analysis on the robustness of random networks against targeted attacks: Influences of degree-degree correlations[J]. Phys Rev E, 2010, 82: 036101.
- [15] MEZARD M, PARISI G. The bethe lattice spin glass revisited[J]. Eur Phys J B, 2001, 20(2): 217-233.
- [16] NEWMAN M E J. Mixing patterns in networks[J]. Phys Rev E, 2003, 67: 026126.
- [17] NEWMAN M E J, STROGATZ S H, WATTS D J. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications[J]. Phys Rev E, 2001, 64: 026118.

编辑 蒋 晓