

混合有限元与矩量法模拟散射问题的预处理技术

任志刚^{1,2}, 黄廷祝¹, 李良¹

(1. 电子科技大学数学科学学院 成都 611731 2. 中国西南电子技术研究所 成都 610036)

【摘要】混合矩量法与有限元法模拟散射问题可以归结为一个复线性系统的求解, 该复线性系统的迭代求解十分困难, 预条件技术恰恰可以提高复线性系统迭代求解的收敛速率。针对混合矩量法与有限元法模拟散射问题得到的复线性系统, 给出了几种预条件子, 数值例子表明给出的预条件子提高了此复线性系统迭代法求解时的收敛速率。

关键词 有限元; 迭代法; 矩量法; 预处理; 散射

中图分类号 O242; O441

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2011.06.014

Preconditioning Techniques for Modeling the Scattering Problem by Hybrid FEM-MoM Method

REN Zhi-gang^{1,2}, HUANG Ting-zhu¹, and LI Liang¹

(1. School of Mathematical Science, University of Electronic Science Technology of China Chengdu 611731

2. Southwest China Institute of Electronic Technology Chengdu 610036)

Abstract Complex linear systems will be generated when scattering problems are simulated by hybrid FEM-MoM methods, such complex linear systems are difficult to solve with iterative methods alone, so preconditioning technique is usually applied to accelerate the convergence rate of iterative methods. For such complex linear systems, several preconditioners are proposed in this paper. Numerical results show the effectiveness of the proposed preconditioning technique.

Key words fem; iterative methods; mom; preconditioning; scattering

有限元方法^[1]常用于电磁学问题的模拟及分析, 在模拟电磁问题时, 四面体元及三角形元的使用, 使它可以模拟各种各样的复杂几何结构。尤其在边元有限元方法出现之后, 它更是被广泛地应用于高频电磁仿真中, 如波导不连续性、天线及散射问题^[2-3]等等。应用有限元模拟电磁问题(如电磁辐射和散射)时, 需要利用辐射边界条件截断求解区域。文献[4]提出完美匹配层方法截断求解区域, 该方法最初应用于利用时域有限差分方法模拟电磁问题, 后被融合到其他方法中^[5-7]。索墨菲辐射边界条件是另外一种截断求解区域的方法, 由于不能像完美匹配层一样最小化求解区域, 该方法常会导致求解一个相对较大的复线性系统。与完美匹配层方法相比, 索墨菲辐射边界条件截断求解区域方法得到的复线性系统虽然维数较大, 但却有相对较好的条件数。

相对于常用于求解麦克斯韦方程微分形式的有限元方法, 矩量法用于求解麦克斯韦方程积分形式。

该方法尤其擅长求解如长导线及外表面为金属的模型, 但是要求模型的几何形状规则, 否则用矩量法模拟会很复杂。

由于有限元与矩量法各有所长, 一些学者致力于结合有限元法与矩量法共同模拟电磁问题, 混合方法^[8](又称合元极技术)应运而生。混合方法利用有限元模拟几何形状复杂、物质构成多样的虚拟边界的内部, 而用矩量法截断求解区域, 不但充分利用了有限元方法及矩量法各自的长处, 而且由于用矩量法截断求解区域相当于求解边界是精确的, 所以其模拟精度大大提高。但是, 用该方法离散得到的复线性系统用迭代法求解收敛很慢, 因此预处理技术不得不用加速迭代法的收敛速率。基于用混合方法离散得到的复矩阵的结构, 本文提出了几种可行的预条件子, 讨论预条件子的构造, 并介绍混合法及离散得到的复线性系统。

收稿日期: 2010-04-13; 修回日期: 2011-01-18

基金项目: 国家自然科学基金(60973015); 四川省科技研究项目(2009SPT-1)

作者简介: 任志刚(1981-), 男, 博士, 主要从事科学工程计算及应用等方面的研究。

1 混合方法及矩阵方程

本文先简单介绍用于模拟电磁问题的混合方法。要求解的问题由导体部分、介质层部分及外部自由空间组成, 如图1所示。图中, J^{int} 与 M^{int} 分别是初始电流与初始磁流, E^{inc} 与 H^{inc} 分别为入射电场与入射磁场, E^s 与 H^s 分别为散射电场与磁场, S_2 与 S_C 分别为绝缘体与导体的外表面。

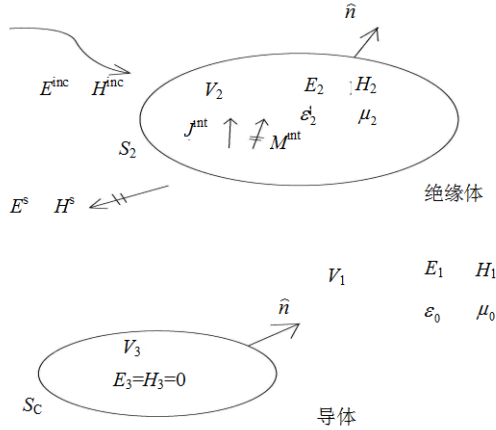


图1 由(E,H)或(M,J)激发的电磁散射示意图

用混合法模拟该类电磁问题时, 以电场强度 E 为自变量的矢量Helmholtz方程用于模拟虚拟边界内部^[9]:

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times E(\mathbf{r})}{j\omega\mu_0\mu_r} \right) + ju\epsilon_0\epsilon_r E(\mathbf{r}) = -J^{int}(\mathbf{r}) - \left(\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_r} \right) \nabla \times M^{int}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

式中, $\nabla \times$ 是旋度算子; j 是复单位; ϵ_r 与 μ_r 分别为介质体中介电常数与磁导率; ϵ_0 与 μ_0 分别为自由空间中介电常数与磁导率; \mathbf{r} 为场点位置矢量。

由于边元有限元方法可以消除伪解, 故常用于离散矢量Helmholtz方程。应用边元有限元方法离散时, 首先将式(1)两边同乘权重函数 $\omega(\mathbf{r})$, 得到其弱形式。对整个有限元作用域积分, 可以得到矩阵方程组为:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{ii} & \mathbf{A}_{id} \\ \mathbf{A}_{di} & \mathbf{A}_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_i \\ \mathbf{E}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{dh} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{J}_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{g}_i^{int} \\ \mathbf{g}_d^{int} \end{pmatrix} \quad (2)$$

式(2)是一个稀疏对称的复线性系统, 其中不同的下标表示其元素对应于不同的求解区域, 下标 i 表示其元素对应于绝缘体的内部, 而下标 d 表示其元素对应于绝缘体的外表面, 而下标 h 表示其元素对应于绝缘体的外表面除去绝缘体外表面与导体外表面相交部分之后所余外表面部分。 \mathbf{A}_{ii} 、 \mathbf{A}_{id} 、 \mathbf{A}_{di} 、 \mathbf{A}_{dd} 和 \mathbf{B}_{dh} 为相应的稀疏系数矩阵, \mathbf{E}_i 、 \mathbf{E}_d 分别为相应的绝缘体内部的电场未知量与绝缘体外表面的电场未知

量, \mathbf{J}_h 为相应的电流密度未知量, \mathbf{g}_i^{int} 与 \mathbf{g}_d^{int} 为相应的源项。除非 \mathbf{J}_h 已知, 矩阵方程组(2)不能求解。

为了求解 \mathbf{J}_h , 考虑用电场积分方程(EFIE)^[10]描述虚拟边界:

$$E^{inc}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} E(\mathbf{r}) + \oint_S \{ M(\mathbf{r}') \times \nabla' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + jk_0 \eta_0 J(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - j \frac{\eta_0}{k_0} \nabla' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \} dS' \quad (3)$$

式中, η_0 与 k_0 分别为真空的固有阻抗和波数; G_0 为真空中的格林函数; \mathbf{r}' 为源点位置矢量; ∇' 为梯度; 式中的积分为除去奇异部分的主值积分。选择权重函数为 $f_n(\mathbf{r})$, $n=1, 2, \dots, N_s$ 。将式(3)两边同乘权重函数, 利用MOM离散可以得到:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{hh} & \mathbf{C}_{hc} \\ \mathbf{C}_{ch} & \mathbf{C}_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_h \\ \mathbf{J}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{hd} & 0 \\ \mathbf{D}_{cd} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_d \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}_h^i \\ \mathbf{F}_c^i \end{pmatrix} \quad (4)$$

式中, 下标 h 与 d 与式(2)中的含义一致, 下标 c 表示其元素对应于导体外表面; \mathbf{F}_h^i 与 \mathbf{F}_c^i 为相应的源项; \mathbf{C}_{hh} 、 \mathbf{C}_{hc} 、 \mathbf{C}_{ch} 、 \mathbf{C}_{cc} 、 \mathbf{D}_{hd} 和 \mathbf{D}_{cd} 为相应的复系数矩阵; \mathbf{J}_c 为相应的导体外表面的电流密度未知量。利用式(3)和(4)可以得到以电场为变量的 2×2 块矩阵方程组:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{ii} & \mathbf{A}_{id} \\ \mathbf{A}_{di} & \mathbf{A}_{dd} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{B}_{dh} \mathbf{C}_{hh}^{-1} \mathbf{D}'_{hd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_i \\ \mathbf{E}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_i^{int} \\ \mathbf{g}_d^{int} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_{dh} \mathbf{C}_{hh}^{-1} \mathbf{K} \end{pmatrix} \quad (5)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'_{hh} &= \mathbf{C}_{hh} - \mathbf{C}_{hc} \mathbf{C}_{cc}^{-1} \mathbf{C}_{ch} \\ \mathbf{D}'_{hd} &= \mathbf{D}_{hd} - \mathbf{C}_{hc} \mathbf{C}_{cc}^{-1} \mathbf{D}_{ch} \\ \mathbf{K} &= \mathbf{C}_{hc} \mathbf{C}_{cc}^{-1} \mathbf{F}_c^i - \mathbf{F}_h^i \end{aligned}$$

除矩阵方程式(5)外, 可给出另一个可以替代的矩阵方程组:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{ii} & \mathbf{A}_{id} \\ \mathbf{A}_{di} & \mathbf{A}_{dd} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{B}_{dh} \mathbf{C}'_{hh} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_i \\ \mathbf{E}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_i^{int} \\ \mathbf{g}_d^{int} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{K} \end{pmatrix} \quad (6)$$

矩阵方程式(5)由于求解矩阵逆而导致计算量偏大; 矩阵方程式(6)相比于矩阵方程式(5)不必计算 $\mathbf{B}_{dh} \mathbf{C}'_{hh}^{-1} \mathbf{D}'_{hd}$, 但因其规模相对较大, 较之于矩阵方程式(5)则需要更多的存储空间。

2 预条件技术

预条件技术将线性系统变换为另外一个更适合迭代求解的线性系统, 预条件矩阵 \mathbf{M} 用于完成该变换。一般而言, 预条件过程就是试图改变系数矩阵的谱性质, 使得变换后的系数矩阵有更小的谱范数

或者其特征值分布更加趋近于 $1^{[11]}$ 。例如 M 是系数矩阵 A 的一个近似,那么线性系统 $M^{-1}Ax = M^{-1}b$ 与原线性系统同解。 M 就是预条件子。

针对矩阵方程组式(5),预条件矩阵 M 的一个很好的选择就是有限元矩阵 A 。有限元矩阵 A 具有很好的稀疏性,且利用Krylov子空间迭代方法求解简单,适合作为预条件子。

针对方程组式(6),仍希望找出一个其系数矩阵的近似。基于此,给出预条件子:

$$Pdb = \begin{pmatrix} A_{ii} & A_{id} & \\ A_{di} & A_{dd} & -\text{diag}(B_{dh}) \\ & -\text{diag}(D'_{hd}) & \text{diag}(C'_{hh}) \end{pmatrix} \quad (7)$$

式中, $\text{diag}(A)$ 表示取矩阵 A 的对角元。该 Pdb 有很好的稀疏性及与原稀疏矩阵的相似性。考虑到 $\text{diag}(A)$ 可能会奇异,将用一个很小的数来代替对角线上的零元。通过数值试验实例,可以看出预条件子 Pdb 的效果虽然不错,但是还不够好。本文选择预条件子的出发点就是找到原系数矩阵的一个近似,预条件子 Pdb 效果不好的原因在于只取对角矩阵的近似度不够好。为了更好地近似原系数矩阵,于是提出第2个预条件子:

$$Pb = \begin{pmatrix} A_{ii} & A_{id} & \\ A_{di} & A_{dd} & -\text{bigger}(B_{dh}) \\ & -\text{bigger}(D'_{hd}) & \text{bigger}(C'_{hh}) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$\text{bigger}(A)$ 的实现有两种方法:1)保留 A 中大于给定的一个阈值的元素,将其他位置的元素赋值为0;2)保留每一行中元素值较大的一些元。相对于 Pdb ,预条件子 Pb 与系数矩阵的近似度更高。但是由于非零元更多,求解比 Pdb 复杂。于是本文提出另一个预条件子:

$$Pub = \begin{pmatrix} A_{ii} & A_{id} & \\ A_{di} & A_{dd} & -\text{bigger}(B_{dh}) \\ & 0 & \text{bigger}(C'_{hh}) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Pub 较之于 Pb 其非零元更少,求解更简单。较之于 Pdb 其对系数矩阵的近似度更高,作为预条件子的效率更好。由式(9)不难想到另外一种预条件子:

$$Plb = \begin{pmatrix} A_{ii} & A_{id} & \\ A_{di} & A_{dd} & 0 \\ & -\text{bigger}(D'_{hd}) & \text{bigger}(C'_{hh}) \end{pmatrix} \quad (10)$$

预条件子 Plb 的效果与 Pub 类似。

3 数值实例

本文以数值实例说明提出的预处理技术的有效性。该数值实例为有一边长为 0.2λ 的介质立方体(λ

是自由空间波长),被由沿 $+z$ 轴方向的平面波激发的散射现象,如图2所示。图中,设立方体的相对电容率为 $1-j1000$ 。入射波的频率为600 MHz,由此可以计算出立方体的边长为10 cm。用混合法求解时,立方体被剖分为320个四面体,离散得到相应的矩阵方程组式(5)或者式(6)。

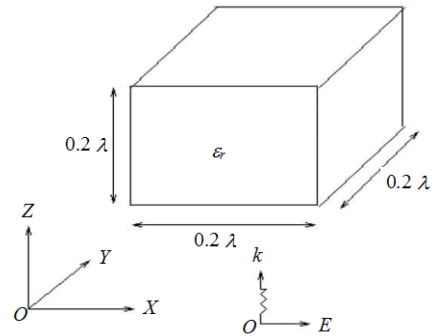


图2 平面波激发的介质立方体的散射

矩阵方程的求解应用matlab7.0给出。预条件的BICGSTAB用于求解不同的矩阵方程组, 1×10^{-6} 为Krylov子空间方法迭代求解时的终止精度。

针对矩阵方程组式(5),利用FEM矩阵 A 为其预条件子,其数值结果如图3所示。没有预条件时,如图中 np 曲线所示,Krylov子空间方法迭代收敛很慢。有预条件的Krylov子空间方法,则只需要9次就达到所需收敛精度。如图中 p 曲线所示。但是与矩阵方程组式(6)相比,它需要多次求解矩阵逆。

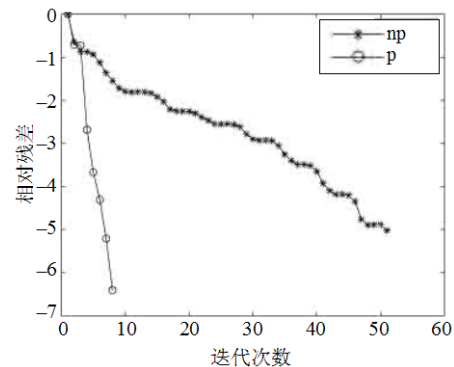


图3 求解矩阵方程组式(5)的迭代数

针对矩阵方程组式(6),利用提出的预条件子求解,结果如图4所示。可以看出,没有预条件的Krylov子空间方法几乎不收敛;预条件子 Pdb 虽然一定程度上提高了Krylov子空间方法的收敛速率,但收敛速度仍然很慢;预条件子 Pb 效果最好,只需迭代11次。预条件子 Plb 与 Pub 虽然效果不如 Pb ,但是其本身更容易求解。预条件求解后的介质散射体的归一化远场值如图5所示。与文献[8]计算的远场值及文献[12]计算的远场值(如图6所示)相比,可以看出求解结果很好吻合。

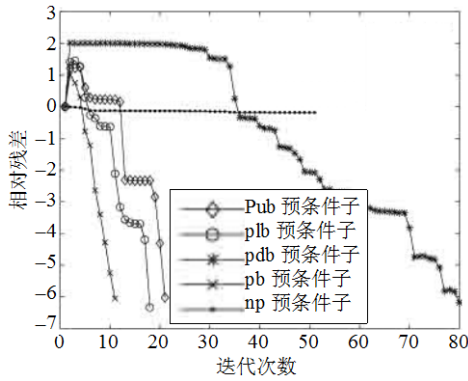


图4 求解矩阵方程组式(6)的迭代数

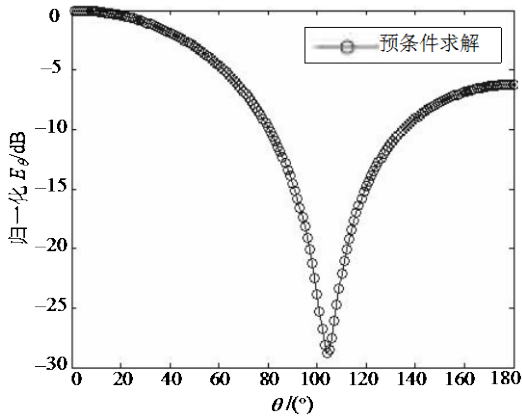


图5 预条件求解的介质散射体远场 E_θ

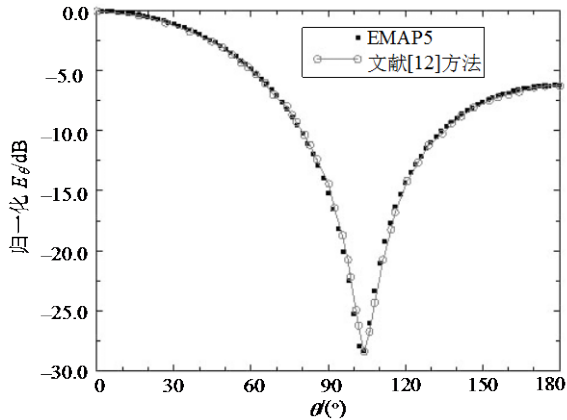


图6 其他方法计算的介质散射体远场 E_θ

4 结论

本文研究了用混合方法模拟电磁问题时产生的

矩阵方程组的预条件解法。通过近似系数矩阵提出了不同的预条件子, 运用提出的预条件子, 可大大提高Krylov子空间方法求解此类线性系统时的收敛速率。

参 考 文 献

[1] NÉDÉLEC J C. Mixed finite elements in R3[J]. Numer Math, 1980, 35: 315-341.

[2] JIN J M. The finite element method in electromagnetics[M]. New York: John Wiley & Sons, 1993.

[3] VOLAKIS J L, CHATTERJEE A, KEMPEL L C. Finite element method for electromagnetics: Antennas, microwave circuits and scattering applications[M]. New York: IEEE Press, 1998.

[4] BERENGER J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. J Comp, 1994, 114: 185-200.

[5] SACKS Z S, KINGSLAND D M, LEE R, et al. A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition[J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 1995, 43: 1460-1463.

[6] KUZUOGLU M, MITTRA R. Mesh truncation by perfectly matched anisotropic absorbers in the finite element method[J]. Microwave Opt Tech Lett, 1996, 12: 136-140.

[7] KUZUOGLU M, MITTRA R. Frequency dependence of the constitutive parameters of causal perfectly matched anisotropic absorbers[J]. IEEE Microwave and Guided Wave Lett, 1996, 6: 447-779.

[8] JI Y, HUBING T. EMAP5: A 3D hybrid FEM/MOM code[J]. ACES Journal, 2000, 15: 1-12.

[9] PETERSON A F, RAY S L, MITTRA R. Computational methods for electromagnetics[M]. New York: IEEE Press and Oxford University Press, 1997.

[10] WANG J J. Generalized moment of methods in electromagnetics[M]. New York: John Wiley & Sons, 1990.

[11] BENZI M. Preconditioning techniques for large linear system: a survey[J]. Journal of Computational Physics, 2002, 182: 418-477.

[12] SARKAR T K, ARVAE S, PONNAPALLI S. Electromagnetic scattering from dielectric bodies[J]. IEEE Trans Antenna Propagat, 1984, 32: 77-85.

编辑 漆 蓉