

复杂网络中尺度研究揭开网络同步化过程

陈娟¹, 陆君安²

(1. 武汉科技大学理学院 武汉 430081; 2. 武汉大学数学与统计学院 武汉 430072)

【摘要】复杂网络的中尺度研究是目前复杂网络研究中的一个前沿方向。本文主要介绍复杂网络的Laplacian矩阵的特征值谱的性质,指出特征值谱与度序列的强相关性。并且,在中尺度意义下,研究了不同拓扑结构的复杂网络的同步以及广义同步过程,发现同步是从度大的区域开始。进一步揭示了社团结构和同步时间尺度都与网络的特征值谱有关,社团网络的同步过程表现为部分同步—聚类同步—全局完全同步,该过程有助于网络社团结构的识别。最后介绍了与网络中尺度研究相关的一些前沿工作。

关键词 复杂网络; Laplacian谱; 中尺度; 同步过程

中图分类号 U491.1

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2012.01.002

Mesoscales Reveal Synchronization Processes in Complex Networks

CHEN Juan¹ and LU Jun-an²

(1. College of Sciences, Wuhan University of Science and Technology Wuhan 430081;

2. School of Mathematics and Statistics, Wuhan University Wuhan 430072)

Abstract Nowadays, mesoscales in complex networks has been an important topic of research in the field of complex networks. The paper presents the Laplacian spectral features of complex networks and reports the finding of a strong correlation between the laplacian spectrum and the node-degree sequence of a network. Furthermore, the synchronization and generalized synchronization of complex networks under different topological structures at the mesoscale level of description are studied. It is found that synchronization first starts from the nodes with largest degrees. It is also explored that the Laplacian spectrum shows a close relation with community structure and time scales regarding the network synchronization process. For community networks, there exists a general path towards synchronization: partial synchronization—cluster synchronization—global complete synchronization. This dynamical process helps to find the community structure of a network. Finally, some advanced researches of mesoscales in complex networks is introduced.

Key words complex networks; Laplacian spectra; mesoscale; synchronization processes

最近几年,复杂网络已经引起从物理学、数学到生物学,从工程技术、管理到社会科学^[1-9]的关注。同步是自然、社会、工程中普遍存在的现象,关于复杂动态网络的控制与同步的研究,一直受到很多研究人员的关注^[10-18]。目前,主要研究集中于网络拓扑结构如何影响网络动力学行为,特别是网络达到同步的能力如何依赖于网络结构的各种参数。文献[19]指出网络局部子图的变化会造成特征值谱和同步性质的变化,仅仅利用网络的统计量分析网络动力学性质经常会得到错误的结论,而起决定性因素的是网络耦合矩阵的特征值。刻画复杂动态网络的同步能力主要是基于Lyapunov指数的主稳定函数

方法,其次是基于Lyapunov函数稳定性的方法和基于连接图的稳定性方法^[8,20],这些方法对于判断网络同步稳定性十分重要,其中基于Lyapunov指数的主稳定函数方法指出网络同步能力可以由 λ_2 和 λ_N 所刻画。但是,事实上,决定整个同步过程的是耦合矩阵的整个特征值谱,除 λ_2 和 λ_N 外,耦合矩阵的其他特征值的分布对刻画网络拓扑的社团分层尺度和同步演化过程的时间尺度也起到了重要的作用。

另外,关于复杂网络同步的研究不能仅仅停留在判断是否可以同步和同步稳定性方面,而研究网络同步演化的过程也是非常重要的。多年来,对这些问题没有引起足够的重视。迄今为止,人们更多

收稿日期: 2011-12-15

基金项目: 国家自然科学基金(11172215, 60974081, 61004096)

作者简介: 陈娟(1983-),女,博士,主要从事复杂动力网络的同步与控制等方面的研究。

地关注于给定拓扑结构和动力学方程后判断网络能否达到同步(终态), 或者讨论典型网络模型(如小世界网络、无标度网络)实现完全同步或全局一致性的能力。这些研究从大尺度来分析网络节点的集体行为, 可以说是一种只看结果(最终是否同步)不顾过程的研究。但是, 在网络到达全局同步的过程中是否会有有趣的现象发生, 以及不同拓扑结构的网络的同步过程是否会不同, 却值得进一步研究。实际上, 同步过程很重要, 因为同步本来就是一个渐进过程, 对它的研究有利于揭示复杂系统的演化机理, 有利于理解不同复杂系统的时空差异。

网络拓扑和动力学行为演化过程跨越的尺度较大, 网络同步过程的研究与复杂网络的中尺度密不可分, 其实就是研究网络的动力学行为从小尺度过渡到大尺度时的演化过程。而仅仅利用一种尺度来刻画和分析复杂网络的动力学行为远不能充分描述系统的复杂性, 在小尺度(微观、局部)层次, 就是点和边的层次, 可以讨论节点的度、介数、聚类系数等属性, 但是要刻画节点的动力学行为不能孤立地、静态地进行分析。网络的最重要特点在于相互耦合、相互作用, 因此局部的微观尺度不能刻画复杂系统的整体特性与规律性, 不容易发现复杂系统整体的物理规律。但是, 如果仅仅从大尺度(宏观、全局)层次, 即从网络的整体分析其统计规律, 常常只能得到系统的初态和终态, 而容易掩盖物理过程, 从而很难发现宏观规律的机理和演化的过程。文献[21]指出了“通过对复杂网络中尺度层次的研究来推进对非线性科学特别是复杂系统的研究”的重要性。文章指出:“直至目前, 复杂网络已有的工作只是局限于通过统计分布得到的局部尺度结构或网络整体参数的宏观尺度, 但是这两个层次都能够通过中间的层次来理解”, 强调研究网络的中尺度问题具有重大的理论和实际意义。文献[22]指出在宏观和微观这两种尺度中间, 仍然存在一个包含各种不同尺度的很大的过渡空间, 这就是所谓的中尺度。中尺度可以理解为子结构或子图, 相对于整个网络而言, 子结构有自己的拓扑实体, 例如模体(motifs)、小圈子(cliques)、核(cores)、环(loops), 或者通常说的社团。目前对于大尺度和小尺度的属性已经研究得比较清楚, 可是对中间层次(即中尺度)的属性还比较模糊, 譬如对社团的发现问题的仍然存在争议。

对于复杂网络同步过程的研究, 目前已获得了一些重要进展^[22-30]。有关复杂网络中尺度的研究, 文献[31]着重介绍了模块或者说社团在网络的拓扑

结构和动力学行为演化中的重要作用。本文主要介绍几种典型网络模型的特征值分布的性质, 指出特征值谱与度序列的强相关性。在中尺度层次讨论复杂网络的同步过程, 发现无标度网络的同步及广义同步过程与均匀网络完全不同, 同步是从度大的节点开始, 然后再蔓延到网络的其他节点。社团网络的同步过程是从完全不同步到部分同步, 再到聚类同步最后实现全局的完全同步。根据同步过程可以看出网络拓扑结构, 社团结构的发现依赖于尺度。

1 复杂网络的Laplacian矩阵特征值谱

1.1 几种典型网络的Laplacian矩阵的特征值分布

考虑一个具有 N 个节点及 M 条边的网络 G , 假设网络不存在自环和重边。其Laplacian矩阵定义为:

$$L(u, v) = \begin{cases} d_v & u = v \\ -1 & u \text{ 与 } v \text{ 相连} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

式中, d_v 是节点 v 的度。矩阵 L 满足耗散耦合条件 $\sum_v L(u, v) = 0$ 。邻接矩阵 $A = (a_{uv})$ 定义为: 如果节点 u 连接到节点 v , 则 $a_{uv} = 1$; 否则, $a_{uv} = 0$, 并且 $a_{uu} = 0$ 。因此, Laplacian矩阵 L 也可以写为 $L = D - A$, 其中 $D = (d_{ij})$ 表示对角元为节点度的对角矩阵。无向网络的Laplacian矩阵都是对称且半正定的, 因此对应的特征值非负, 按照从小到大的顺序排列为 $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ 。进一步, 如果矩阵 L 不可约, 则 $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ 。

$L = L(G)$ 可以看作是作用在函数空间 $R^V = \{f | f: V(G) \rightarrow R\}$ 上的线性算子, 且:

$$Lf(u) = \sum_{\substack{v \in V(G) \\ u \sim v}} (f(u) - f(v))$$

式中, $V(G)$ 表示网络节点的集合; $u \sim v$ 表示节点 u 与节点 v 相连。则 L 的Rayleigh商为:

$$\frac{\langle f, Lf \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\sum_v f(v)^2}$$

从而有:

$$\lambda_1 = \min \left\{ \sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2 \mid \|f\| = 1 \right\}$$

$$\lambda_N = \max \left\{ \sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2 \mid \|f\| = 1 \right\}$$

$$\lambda_k = \min \left\{ \sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2 \mid \|f\| = 1, f \perp f_i, 1 \leq i < k \right\}$$

其中, f_1, f_2, \dots, f_{k-1} 是分别对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$

的正交特征向量。

令 d_{\min} 和 d_{\max} 分别表示网络的最小度和最大度，有^[32]：

$$\lambda_2 \leq \frac{N}{N-1} d_{\min} \leq \frac{N}{N-1} d_{\max} \leq \lambda_{\max} \leq 2d_{\max} \quad (1)$$

式(1)是一个著名的估计式，但是比较保守，即使最小度 $d_{\min}=1$ ，也只能得到 $\lambda_2 \leq \frac{N}{N-1}$ 。

由式(1)可得：

$$\lambda_2 / \lambda_{\max} \leq d_{\min} / d_{\max} \quad (2)$$

式(2)的这个比值越近于1，网络的同步能力越好。例如，无标度网络有 $d_{\min}/d_{\max} \ll 1$ ，根据经验会发现，它的同步能力比起其他结构的网络要更差一些。然而，并不意味着更均匀的度分布的网络会有更好的同步能力。因为度分布均匀只是统计意义的性质，并不能保证最大和最小度的差很小，只要有一个节点的度很大或者很小，都会使得式(2)的右边发生很大变化。文献[19]已经证明了局部小结构的改变会造成网络整体的同步性质的很大变化，但是几乎不影响网络的统计量。并且，文献[19]和文献[33]均给出了具体的例子说明具有相同的度分布的网络却有完全不同的同步能力。事实上， λ_2 的上界可以由下面的估计式给出，即：

$$\lambda_2 \leq 2|\partial S|/|S| \quad (3)$$

式中， S 是节点集合的任一子集，满足 $0 < |S| \leq N/2$ ， $|S|$ 是集合 S 所包含的点数，而 $|\partial S|$ 表示 S 与其余集之间的边数。文献[19]利用式(3)解释了统计性质估计 λ_2 常常失效的原因。一个重要的发现就是 λ_2 的上界主要是由网络的某个子图 S 确定，特别地， S 比起整个网络来说通常是非常小的，所以 S 对网络的统计性质影响不大，因此仅仅利用网络的统计性质不能充分估计 λ_2 。

文献[34]通过数值实验研究了ER随机网络、NW小世界网络和BA无标度网络的特征值谱分布性质。

1) 随机网络的特征值谱分布跨度较小，非常均匀。并且随着连接概率 p 的增加，特征值分布的范围迅速缩小， λ_2 和 λ_N 增加。主要原因是增加 p ，孤立块个数减少，最大度 d_{\max} 增加，从而可知 λ_N 增加。另外， λ_2 的增长速度要快于 λ_N ，导致 λ_2/λ_N 也随之增加，因此，从统计的角度来看，同步能力是随着连接概率 p 的增加而逐渐提高的。2) 小世界网络的特征值谱分布跨度较小，比较均匀。当 p 逐渐增加时，特征值谱是由2K环状网络向全连接网络转变的，分布的范围随之缩小，最小非零特征值 λ_2 与最大特征值 λ_N 同时增大。

然而， λ_2 增加的速度要远远超过 λ_N ，导致特征值比 λ_2/λ_N 上升。这说明不断加入新边，小世界网络的同步能力不断增强。3) 无标度网络的特征值分布跨度大，大多数较小的特征值比较集中，并且有一些很大的特征值存在，谱密度很不均匀。 λ_2 与 λ_N 相差很大，说明无标度网络特征值分布的范围很广，完全不同于随机和小世界网络。特别地，对于随机网络和小世界网络，可发现它们的最小非零特征值 λ_2 都与概率 p 近似线性相关。

根据社团网络的特征值谱可发现：1) 零特征值的个数等于孤立社团的个数；2) 特征值谱的跳跃表明社团结构的出现；3) 对于一个由 k 个明显的社团构成的网络，其Laplacian矩阵在零附近还有 $k-1$ 个比零稍大一点的特征值， λ_k 与 λ_{k+1} 之间存在明显的跳跃，其间距要远远大于其他两个连续的特征值之间的间距。随着社团之间连边的增加，前 $k-1$ 个非零特征值增加， λ_k 与 λ_{k+1} 之间的差距减小，社团结构削弱，同步能力加强；4) 对于一个由 k 个明显的社团构成的网络，其Laplacian矩阵的第二特征向量中，各节点相应的元素会属于 k 个不同的区域。

1.2 特征值分布与度序列的相关性

实际网络的规模通常非常大，因此要计算它们的特征值非常困难，并且要耗费大量时间。然而，可以很容易得到一个网络的度序列。因此，如果度序列与特征值谱存在一定的关系，就可以利用度序列估计网络的特征值谱。所以，问题是这两者之间是否有容易描述的、可以计算的关系式。

文献[35]给出了下面两个定理说明特征值分布与度序列之间的关系。

定理 1^[35] 假设 G 为 N 个节点构成的网络， L 为 G 对应的Laplacian矩阵，并且节点度序列向量 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_N)^T$ 与特征值向量 $\boldsymbol{\lambda}(L) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)^T$ 里的元素都是按照升序排列的，则：

$$\delta = \frac{\|\boldsymbol{\lambda}(L) - \mathbf{d}\|_2}{\|\mathbf{d}\|_2} \leq \sqrt{\frac{\|\mathbf{d}\|_1}{\|\mathbf{d}\|_2^2}} \leq \sqrt{\frac{N}{\|\mathbf{d}\|_1}}$$

定理 2^[35] λ_j 是 N 个节点构成的复杂网络的Laplacian矩阵的特征值， d_i 为第 i 个节点的度， $i=1, 2, \dots, N$ 。在每个区间 $[(d_i - \sqrt{d_i}), (d_i + \sqrt{d_i})]$ ，至少存在矩阵 L 的某一个特征值 $\lambda^* \in \{\lambda_j \mid j=1, 2, \dots, N\}$ ，即：

$$(d_i - \sqrt{d_i}) \leq \lambda^* \leq (d_i + \sqrt{d_i}) \quad i=1, 2, \dots, N$$

为了使特征值分布与度序列之间的关系可视化，文献[34]和文献[35]做了大量的数值仿真。文献

[34]定义相对谱和相对度分别为:

$$R_e(i) = (\lambda_i - \lambda_2) / (\lambda_N - \lambda_2) \quad i = 2, 3, \dots, N$$

$$R_d(i) = (d_i - d_2) / (d_{\max} - d_2) \quad i = 2, 3, \dots, N$$

大量数值结果表明, 无标度网络的谱与度序列之间的相关性最强, 其次是随机网络, 再次是小世界网络。因此, 在相对谱和相对度的相关性基础上, 建立特征值谱的局部预估校正算法能有效地根据 λ_i 计算 λ_{i+1} 的近似值:

1) 利用度序列、 λ_2 和 λ_N 计算 $\bar{\lambda}_i$ 有:

$$\bar{\lambda}_i = \frac{d_i - d_2}{d_N - d_2} (\lambda_N - \lambda_2) + \lambda_2 \quad i = 2, 3, \dots, N-1$$

2) 根据已知的 λ_i 计算 λ_{i+1}^* 有:

$$\lambda_{i+1}^* = \lambda_i + (\bar{\lambda}_{i+1} - \bar{\lambda}_i) \quad i = 2, 3, \dots, N-1$$

文献[34]对照估计值 λ_i^* 和精确值 λ_i , 并计算 λ_i^* 和 λ_i 之间的相对误差, 其中 $i=2, 3, \dots, N$ 。明显地发现, 估计值很准确, 相对误差较小, 平均为0.326 3%, 证明根据 λ_i 估计 λ_{i+1} 的局部算法是有效的。但该局部算法的不足之处也很明显, 就是已知 λ_i 只能估计 λ_{i+1} , 再继续估计后面的特征值准确度就低了。

2 网络同步化过程

复杂网络在不同的层次可以用不同的尺度描述。文献[24,28]在中尺度意义下讨论复杂网络的同步过程以及广义同步过程, 着重于同步块, 不同于小尺度层次只关心单个节点, 也不同于大尺度层次只考察网络的整体性质。

2.1 随机网络和无标度网络的同步过程

文献[24]讨论了如下Kuramoto振子模型:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

式中, θ_i 和 ω_i 分别表示第 i 个振子的相位和固有频率; λ 是耦合强度。 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是网络的邻接矩阵。如果节点 i 和节点 j 之间有连接, 则 $a_{ij} = a_{ji} = 1$, 否则 $a_{ij} = a_{ji} = 0$, 并且 $a_{ii} = 0$ 。

文献[24]用全局序参量 r 刻画网络同步的全局一致性, 局部序参量 r_{link} 衡量同步行为的局部信息, 进而揭示如何达到全局同步。全局序参量 r 衡量网络中节点的相位同步的程度:

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}$$

式中, ψ 表示网络的平均相位。参数 $0 \leq r \leq 1$ 在一定程度上描述了网络中所形成的同步簇中节点的数目占整个网络中节点数的比例。 $r=0$ 表示网络中各个振子运动状态不一致, $r=1$ 表示网络所有节点形

成一个同步簇, 达到完全相位同步。局部序参量 r_{link} 刻画网络中同步边所占的比例:

$$r_{\text{link}} = \frac{1}{2N_l} \sum_i \sum_{j \in \Gamma_i} \left| \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \int_{t_r}^{t_r + \Delta t} e^{i[\theta_i(t) - \theta_j(t)]} dt \right|$$

式中, Γ_i 是节点 i 的所有邻居的集合; N_l 是总的边数。

文献研究了ER随机网络 and BA无标度网络在耦合强度增加时全局序参量 r 和局部序参量 r_{link} 这两个参数的变化, 发现开始时耦合强度较小, 全局序参量 r 近似为0, 局部序参量 r_{link} 已经增加, 说明虽然全局不同步, 但是局部同步已经开始; 耦合强度增加时, 无标度网络的全局序参量 r 和局部序参量 r_{link} 都迅速增加; 耦合强度继续增加时, 随机网络的全局序参量 r 和局部序参量 r_{link} 都急剧增加且超过了无标度网络, 说明随机网络的同步在较短的时间内发生, 不像无标度网络同步所需要的时间那么长。

文献[24]还引入了两个很有意思的参数GC(最大同步块所包含的节点数目)和Nc(同步块的数目), 发现开始时耦合强度很小, 全局序参量 r 近似为0, 随机网络和无标度网络都产生了一个最大同步块, 包含了网络50%的节点数。在此期间, 无标度网络的GC大于随机网络的GC, 而随机网络的Nc远大于无标度网络的Nc。当耦合强度继续增加时, 无标度网络的全局序参量 r 和局部序参量 r_{link} 大于随机网络的全局序参量 r 和局部序参量 r_{link} , 随机网络的GC值急剧增加而超过了无标度网络的GC值, 而随机网络的Nc值急剧下降而低于无标度网络的Nc值。这说明尽管此时无标度网络的一致性高于随机网络, 但是无标度网络的同步的中尺度演化要慢于随机网络。文献[24]认为不同网络同步的局部行为的差异来源于GC增长方式的不同。随机网络由于节点度较均匀, 其同步是以许多小聚类块分别同步开始, 然后在比较短的时间内这些小块合并形成一个几乎与整个网络差不多大小的巨大的同步块。无标度网络则不同, 由于存在hub节点, 其同步是以hub为中心凝聚方式趋于全局同步。无标度网络节点度分布不均匀, 大多数节点的度值较小, 这些度很小的节点达到同步所需要的时间更长, 所以造成无标度网络完全同步所需时间大于随机网络。可以看出度分布的不同造成网络形成最大同步块的方式不同, 进而导致网络的同步过程和同步方式的差异。

文献[24]还计算了无标度网络中不同度的节点属于最大同步块的概率, 发现度大的节点即使在耦合强度较小时属于最大同步块的概率仍然很大, 而度小的节点即使在耦合强度较大时属于最大同步块

的概率仍然很小。从而可以说明同步是从度大的区域开始的,对于无标度网络尤其明显。实际网络大多是无标度网络,因此,可以得出现实的复杂系统的集群行为是从密集处开始。

文献[34]以主稳定函数方法分析图1的现象。

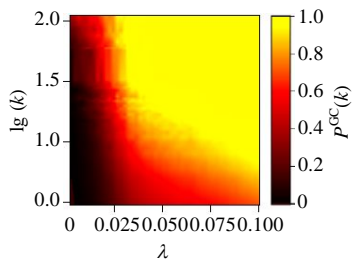


图1 无标度网络中对于不同的耦合强度 λ ,度为 k 的节点属于最大同步块的概率^[24]

给出模型的动力学方程,假设由 N 个节点耦合形成的动力学网络描述如下为:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) - \varepsilon \sum_{j=1}^N L_{ij} \Gamma x_j \quad i=1,2,\dots,N \quad (5)$$

式中, x_i 是节点 i 的状态变量; $\dot{x}_i(t) = f(x_i(t))$ 是孤立节点 i 的动力学方程; Γ 是内连耦合矩阵。 $L = (L_{ij})$ 是对应网络拓扑结构的Laplacian矩阵,如果节点 i 与节点 j 之间有连接,则 $L_{ij} = -1$,否则为0; $L_{ii} = -\sum_{i \neq j} L_{ij}$ 。假设式(5)的完全同步状态是 $\{x_i(t) = s(t), \forall i | \dot{s}(t) = f(s(t))\}$,该同步解的局部稳定性可以由主稳定函数方法来判别。考虑同步解 $s(t)$ 附近的一个微小扰动,由以下线性化变分方程描述为:

$$\delta \dot{x}_i = Df(s) \delta x_i - \varepsilon \sum_{j=1}^N L_{ij} \Gamma \delta x_j \quad i=1,2,\dots,N \quad (6)$$

式中, $Df(s)$ 是 $f(x)$ 在 s 的Jacobi矩阵。式(6)可以对角化成如下形式:

$$\dot{\eta}_i = (Df(s) - \varepsilon \lambda_i \Gamma) \eta_i \quad i=1,2,\dots,N \quad (7)$$

式中, λ_i 是矩阵 L 的特征根。 $\lambda_1 = 0$ 对应不变流形,对应的 η_1 与同步流形平行;其余的 $N-1$ 个特征值对应的 η_i 与同步流形正交。从式(7)中可以看到,当孤立节点的动力学函数 $f(\cdot)$ 和内连耦合矩阵给定,节点 i 收敛到同步流形的速度主要由 λ_i 决定。由于节点度序列与Laplacian特征值谱存在很强的相关性,因此可以得出同步是从度大的节点开始的。

2.2 无标度网络和小世界网络的广义同步过程

文献[28]研究了NW小世界网络和BA无标度网络的广义同步过程,采用如下的自适应耦合策略:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) - c_i(t) \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma (x_i(t) - x_j(t))$$

$$i=1,2,\dots,N \quad (8)$$

式中, x_i 是节点 i 的状态变量; $f_i(\cdot)$ 是连续向量函数; $c_i(t) > 0$ 是一个时变的耦合权重,其将根据节点 i 的邻居节点信息自适应调节; Γ 是内连耦合矩阵; $A = (a_{ij})$ 是网络的邻接矩阵。

考虑一个复杂动力学网络,对该网络中的任意节点,将其邻居节点的耦合信号都看成是对辅助系统中该节点的驱动信号,得到原网络(8)的辅助网络为:

$$\dot{x}'_i(t) = f_i(x'_i(t)) - c_i(t) \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma (x'_i(t) - x_j(t)) \quad i=1,2,\dots,N \quad (9)$$

根据auxiliary-system方法,称动力学网络式(8)达到广义同步,对任意的初始条件 $x_i(0) \neq x'_i(0)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x'_i(t)\| = 0, \quad i=1,2,\dots,N。$$

定义 $e_i(t) = x'_i(t) - x_i(t)$,并且采用如下自适应控制器:

$$\dot{c}_i(t) = \gamma_i \sum_{j=1}^N a_{ij} e_i^T(t) \Gamma e_i(t) \quad i=1,2,\dots,N$$

式中, γ_i 是正常数。

事实上,文献[28]发现网络中的所有节点并不是在同一时刻达到广义同步的。显然,非广义同步和全局广义同步之间有一个渐变的过程。事实上,广义同步是从度大的节点开始,再逐步蔓延到网络中的其他节点,这可以利用式(8)和式(9)近似分析,得到理论上的验证。将式(9)减去式(8)并且线性化,得到:

$$\dot{e}_i = (Df_i(x_i) - c_i(t) \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma) e_i$$

式中, $Df_i(x_i)$ 记做函数 $f_i(x)$ 在 x_i 处的Jacobi矩阵;

$\sum_{j=1}^N a_{ij}$ 是节点 i 的度。因此,节点的度越大,同步误差收敛到0的速度就越快。

与复杂网络的完全同步过程类似,在演化的初始阶段,无标度网络更容易出现部分节点的广义同步,但在演化的后续阶段,更难达到全局的广义同步。因为小世界网络具有相对比较平均的度分布,而无标度网络中只有极少部分节点具有比较大的节点度。事实上,这些具有相对比较大的度的节点在初始阶段就加快了网络的广义同步速度。但是,在后续的演化阶段,达到广义同步取决于那些度最小的节点。对于无标度网络来说,hub节点达到广义同步比较迅速,但边缘节点达到广义同步就比较慢。

因此, 对整个网络来说, 在相同的总节点数和总边数的前提下, 小世界网络达到全局的广义同步要比无标度网络来得容易。

3 社团网络的同步

随着对网络性质的物理意义和数学特性的深入研究, 人们发现许多实际网络都具有社团结构, 即整个网络是由若干个“群(group)”或“团(cluster)”构成的。文献[22-34]讨论了具有社团结构的网络的同步过程, 发现同步过程可以识别拓扑尺度, 即不同时间尺度下的社团结构。该文献还发现, 同步动力学与反映网络拓扑结构的Laplacian特征值谱有密切的相关性。

3.1 同步过程揭示复杂网络的拓扑尺度

文献[22-23]考虑了 N 个相同的Kuramoto振子构成的网络, 即动力学方程满足式(4)的网络, 其中 $\omega_i = \omega$, 对任意的 i , 只要耦合强度足够, 网络是可以达到完全同步的, 因为振子的动力学方程只有唯一一个吸引子。

文献[9]已经发现, 对于实际非均匀网络, 首先在高连接的节点形成局部的块同步, 接着越来越扩大, 最后达到相同的相位。文献[22-23]发现, 如果存在明显的社团结构, 则该过程发生在不同的时间尺度。因此, 网络趋近于整体吸引子的动力学过程将呈现出不同层次的拓扑结构, 呈现出的拓扑结构可以看作是社团。因此, 整个动力学过程揭示了从开始阶段的微观尺度层次到时间演化结束的宏观尺度层次的所有尺度上的拓扑结构。

为了研究该现象, 文献[22-23]定义振子对之间的相关性的平均值参数为:

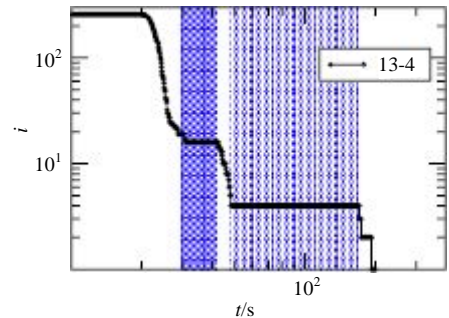
$$\rho_{ij}(t) = \langle \cos[\theta_i(t) - \theta_j(t)] \rangle$$

式中, $\langle \cdot \rangle$ 表示对随机初始相位的平均, 该种表示方法的好处在于可以跟踪振子对的时间演化, 从而可以识别紧密的聚类团结构, 即社团结构。根据该参数, 文献[22-23]又定义了动力学连接矩阵, 而该矩阵的演化可以揭示节点形成群或社团的过程。定义该过程依赖于网络的拓扑结构和节点动力学函数:

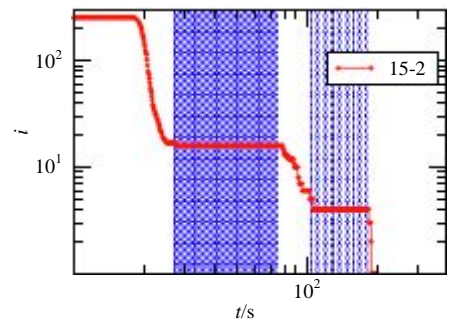
$$\mathbf{D}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } r_{ij}(t) > T \\ 0 & \text{if } r_{ij}(t) < T \end{cases}$$

即该动力学连接矩阵是在固定阈值情况下随时间演化的, 因此可以得到不同时间尺度的动力学连接矩阵结构的变化信息。这些时间尺度信息揭示了不同的拓扑尺度上的连接矩阵的拓扑结构。

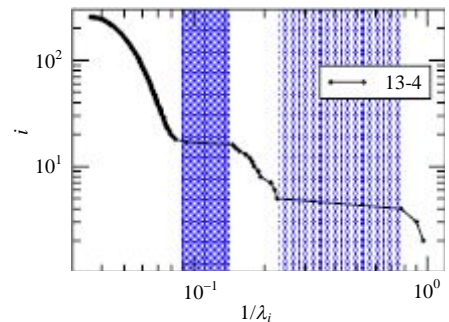
矩阵 $\mathbf{D}_T(t)$ 的零特征值的个数可以确定互不连通的社团个数。在短时间内, 所有节点都不相关, 网络中 N 个节点都不连通; 随着时间的演化, 节点按照它们的拓扑结构开始同步聚成块。当给定阈值 T 为0.99时, 网络结构分别为13-4和15-2的动力学演化和特征值谱之间的关系如图2所示。图中, 阴影区域代表稳定的社团结构, 深色代表网络分成16个社团, 浅色代表网络分成4个社团。



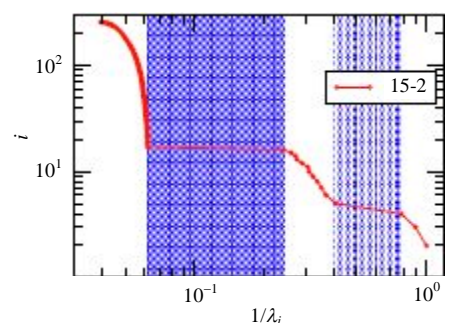
a. 网络的不连通的同步块的个数随时间的演化图



b. 网络的不连通的同步块的个数随时间的演化图



c. Laplacian 矩阵的所有特征值的倒数的分布情况



d. Laplacian 矩阵的所有特征值的倒数的分布情况

图2 网络结构分别为13-4和15-2的动力学演化 ($T=0.99$)和特征值谱之间的关系^[23]

从图2a和图2b可以看到,在给定阈值 T 下,不连通块的数目是时间的函数,还可看到,两个网络的两种社团划分的相对稳定性正好对应着网络的两个层次。对于13-4网络,4个连通块(每块64个节点)的各自同步比16个连通块(每块16个节点)的同步更稳定,也就是第2个层次的社团结构更明显,而对于网络15-2,会得到相反的结论。

另外,文献[22-23]发现网络的动力学演化的时间尺度与Laplacian矩阵的整个特征值谱之间存在有趣的联系,相邻特征值之间的差异可表明时间尺度的相对差别。图2c和图2d对应13-4和15-2结构的Laplacian矩阵特征值。整个特征值谱被分为3块,每次跳跃能够把256节点分为16个社团或4个社团。但应注意,对于13-4结构的网络,16个社团的水平线比4个社团的短,表明13-4结构的网络分成4个社团比分成16个社团更稳定。而对于15-2结构的网络正好相反,分成16个社团比分成4个社团更稳定。

3.2 社团网络的同步过程

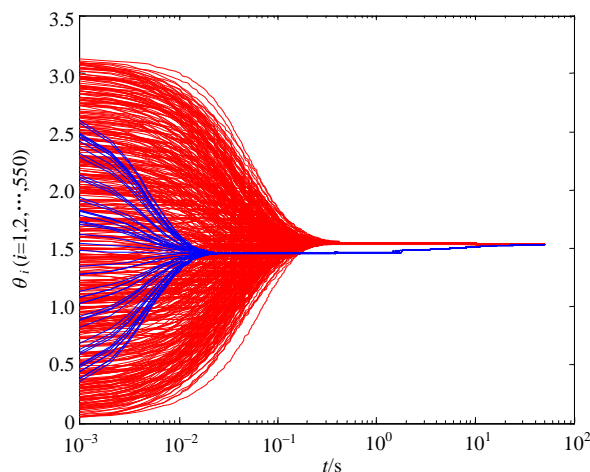
社团网络的同步过程为:部分同步→聚类同步→全局完全同步。

文献[34]考虑一个由两个社团构成的网络,其中一个大社团 H 是由500个节点(连接概率 $p=0.01$)构成的NW小世界网络,另一个小社团 S 是由50个个构成的全连接网络,并且社团 H 与社团 S 之间只有一条边相连。网络的动力学方程与3.1节的节点动力学方程相同。通过数值实验,动力学演化的时间尺度和整个Laplacian特征值谱之间的关系如图3所示。图3a中,浅色表示在 H 中的节点,深色表示在 S 中的节点。图3c中,深色代表0,浅色代表1。

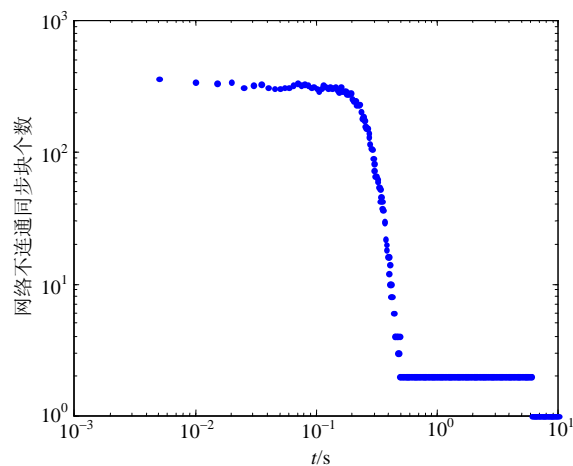
文献[34]发现社团网络从不同步到实现全局同步有一个渐变的过程。初始时刻整个网络处于杂乱无章的状态,没有一个节点达到了完全同步,即处于完全“不同步”状态。随着时间的演化,小社团 S 率先开始同步,而大社团 H 还没有开始同步,该阶段称为“部分同步”。随着时间的推移,大社团 H 也实现了同步(但是 H 的同步态不同于 S),整个网络处于所谓的“聚类同步”状态。很明显,该社团网络在实现完全同步的过程中会有一个特殊的过渡。因此,可以利用聚类同步的阶段识别网络的社团结构。时间足够长时,网络的所有振子都达到“全局完全同步”状态。

文献[34]发现网络连通同步块的个数的演化过程中存在两个相对稳定的状态,意味着在给定的时间尺度下,动力学行为的相对稳定性。类似于文献[22-23],上述区域的相对稳定性与Laplacian特征

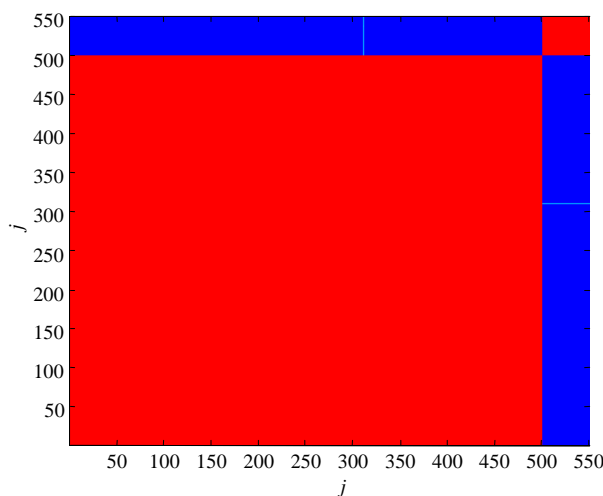
值谱相关联。特征值谱之间的跳跃预示着存在一个相对稳定的社团结构。从图3b中可以看到,整个特征值谱被分成3块,每个大的跳跃把550个节点分成320个社团或2个社团。反映动力学行为的同步块演化的时间尺度和反映网络的拓扑结构的Laplacian特征值谱之间有着令人惊讶的相似性。



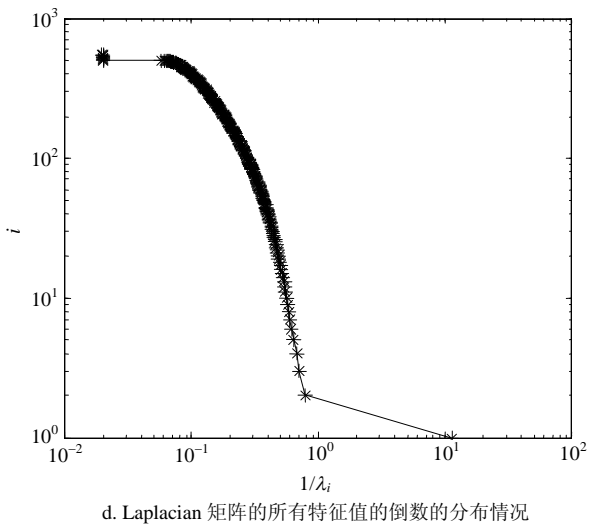
a. 网络振子的时间演化图



b. 网络不连通的同步块个数随时间的演化图



c. 振子之间的平均相关性



d. Laplacian 矩阵的所有特征值的倒数的分布情况
图3 动力学演化的时间尺度和整个Laplacian特征值谱之间的关系^[34]

4 复杂网络的中尺度研究的其他进展

文献[24]已经证明了不同网络同步的局部行为的差异来源于GC增长方式的不同。最近, 文献[29]提供了更多数值上的结果证明该结论。该文献研究耦合强度改变时, 最大同步块规模的分布的变化情况, 发现随机网络的最大同步块规模的概率分布在耦合强度增加到某个值时会有一个明显的跳跃, 而无标度网络则无明显跳跃的逐渐转变。该文献还做了大量实验, 从不同角度证明了无标度网络和随机网络基于节点动力学行为的模块增长的机制是不同的。该增长机制能够描述中尺度形成的实际的演化过程, 研究该过程对于研究中尺度的发展和形成问题是非常必要的。

人们更多关注的是从不同步到同步的同步化过程, 而忽略从同步到不同步的反同步过程, 认为这两个过程是完全可逆的, 实际上, 有研究发现对于无标度网络来讲, 这两个过程是不可逆的。文献[30]研究了ER随机网络和BA无标度网络的同步和反同步过程, 采用的节点动力学见式(4)。对于每个振子 i , 假设其固有频率与节点度相等, 即 $\omega_i = d_i$, 分别采用向前延拓(forward continuation)和向后延拓(backward continuation)方式改变耦合强度, 研究全局序参量的演化过程。研究发现, 对于随机网络, 同步过程和反同步过程是完全可逆的, 都是典型的二级相变。但是对于无标度网络, 同步过程和反同步过程是不可逆的, 出现了很明显的磁滞现象, 并且表现为一级相变。

文献[30]发现, 无标度网络同步过程和反同步过

程中之所以出现一级相变, 是因为振子的固有频率和节点的度相等, 即网络局部动力学函数和拓扑结构一定程度上正相关造成的。事实上, 如果振子的固有频率和节点的度不相等, 仅仅是固有频率与节点度的概率分布相同, 无标度网络同步过程和反同步过程是不会出现一级相变的, 仅仅会出现二级相变。

文献[31]在中间层次下研究复杂网络, 以便深入理解网络的模块化, 以及在动力学或者结构上的影响。文献[36]揭示了社会和生物网络存在模块网络结构, 自然界很多时候表现为社团结构。直到最近, 人们才公认模块组织在复杂系统研究中起到关键作用。例如, 在新陈代谢网中, 一个社团就涉及那些在细胞新陈代谢过程中表现为特定功能的化学成分; 在社会网络中, 社团反映其社会结构, 会影响观点动力学行为的演化过程以及谣言传播过程。此外, 还有一些学者分别从各种角度研究例如社团定义、社团识别算法、社团重叠点问题(overlapping)、模块网络动力学、各种尺度间的相互作用及其在生物社会技术领域的应用, 可以使得对中尺度有更全面的了解。关于复杂网络的中尺度, 还有很多问题待研究, 例如: 1) 关于社团的定义、识别和分类的方法。以前有很多定义社团的方法, 但是, 直到目前, 并不知道哪种定义方法更好。因此, 建立模块化通用的清晰的数学定义就很有必要。另外, 社团探测在图论中是个NP难点问题。因此, 即使社团的定义清楚了, 但是识别社团的有效算法仍有待解决。2) 中尺度协调涉及的社团之间的结构和功能上的重叠点。社团定义和社团探测是将网络分成几个完全不相交的集合, 即每个节点属于且只属于一个社团。这样做的一个直接后果就是大多数社团探测算法没有考虑社团重叠的可能性, 不可避免地忽略了社团相互交流的信息, 例在新陈代谢网络中代谢物有多种功能, 在社会网络中成员可以属于多个社团, 因此引进合适的框架找到社团之间的重叠点非常有挑战意义。3) 模块网络动力学涉及的中尺度和重叠中尺度在产生集群动力学行为上发挥的作用。社团在执行任务时与下面两个现象密切相关, 一是建立网络的集群子任务, 即图的分离; 二是在全局尺度下子任务的协调, 即综合。复杂系统运转时的分层属性还没有被完全阐明清楚, 在中尺度层次下研究结构和动力学的分层很有意义。4) 关于不同尺度间的相互作用以及分层组织, 已有的大部分工作都是研究单个节点在社团中的地位, 如局部的Hub节点,

社团的边界点等等。然而,除了揭示网络不同尺度之间的相关性以外,某些节点是如何影响社团之间的演化或者交互作用都有待解决。5) 在生物、技术、社会网络中的应用。理解复杂网络的模块结构可能为研究神经网络、合成生物学、导航、推荐网络等之类的热点问题提供强有力的分析工具。

参 考 文 献

- [1] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of 'small world' networks[J]. *Nature*, 1998, 393: 440-442.
- [2] BARABÁSI A-L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Science*, 1999, 286: 509-512.
- [3] BARABÁSI A-L. *Linked: the new science of networks*[M]. Massachusetts: Perus Publishing, 2002.
- [4] WATTS D J. The 'new' science of networks[J]. *Annual Review of Sociology*, 2004, 30: 243-270.
- [5] ALBERT R, BARABÁSI A-L. Statistical mechanics of complex networks[J]. *Review of Modern Physics*, 2002, 74 (1): 47-97.
- [6] STROGATZ S H. Exploring complex networks[J]. *Nature*, 2001, 410: 268-276.
- [7] WANG X, CHEN G. Complex networks: Small-world, scale-free and beyond[J]. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 2003, 3(1): 6-20.
- [8] PECORA L M, CARROLL T L. Master stability functions for synchronized coupled systems[J]. *Phys Rev Lett*, 1998, 80: 2109.
- [9] BLEKHMANN I I. *Synchronization in science and technology*[M]. ASME Press, 1988.
- [10] WU C W, CHUA L O. Application of graph theory to the synchronization in an array of coupled nonlinear oscillators[J]. *IEEE Trans. Circuits & Systems-I*, 1995, 42: 494-497.
- [11] ARENAS A, DÍAZ-GUILERA A, KURTHS J, et al. Synchronization in complex networks[J]. *Phys Rep*, 2008, 469: 93-153.
- [12] WU C W. *Synchronization in coupled chaotic circuits and systems*[M]. Singapore: World Scientific, 2002.
- [13] JOST J, JOY M P. Spectral properties and synchronization in coupled map lattices[J]. *Phys Rev E*, 2002, 65: 016201.
- [14] WANG X, CHEN G. Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility[J]. *IEEE Trans Circuits Syst-I*, 2002, 49(1):54-62.
- [15] LI X. Synchronization in complex dynamical networks: Stability, evolution, control, and application[J]. *Int J Computational Cognition*, 2005, 3(4): 16-26.
- [16] BELYKH I V, LANGE E, HASLER M. Synchronization of bursting neurons: what matters in the network topology[J]. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 188101..
- [17] ZHOU J, CHEN T. Synchronization in general complex delayed dynamical networks[J]. *IEEE Trans Circuits Syst-I*, 2006, 53(3): 733-744.
- [18] NISHIKAWA T, MOTTER A E. Maximum performance at minimum cost in network synchronization[J]. *Physica D*, 2006, 224: 77-89.
- [19] ATAY F M, BIYIKOGLU T, JOST J. Network synchronization: spectral versus statistical properties[J]. *Physica D*, 2006, 224: 35-41.
- [20] BELYKH V N, BELYKH I V, HASLER M. Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems[J]. *Physica D*, 2004, 195: 159-187.
- [21] ALMENDRAL J A, CRIADO R, LEYVA I, et al. Announcement: focus issue on "mesoscales in complex networks"[J]. *Chaos*, 2010, 20: 010202.
- [22] ARENAS A, DÍAZ-GUILERA A, PÉREZ-VICENTE C J. Synchronization processes in complex networks[J]. *Physica D*, 2006, 224: 27-34.
- [23] ARENAS A, DÍAZ-GUILERA A, PÉREZ-VICENTE C J. Synchronization reveals topological scales in complex network[J]. *Phys Rev Lett*, 2006, 96(11): 114102.
- [24] GÓMEZ-GARDEÑES J, MORENO Y, ARENAS A. Paths to synchronization on complex networks[J]. *Phys Rev Lett*, 2007, 98: 034101.
- [25] HUNG Y C, HUANG Y T, HO M C, et al. Paths to globally generalized synchronization in scale-free networks[J]. *Phys Rev E*, 2008, 77: 016202.
- [26] GUAN S G, WANG X G, GONG X F, et al. The development of generalized synchronization on complex networks[J]. *Chaos*, 2009, 19: 013130.
- [27] CHEN J, LU J, WU X, et al. Generalized synchronization of complex dynamical networks via impulsive control[J]. *Chaos*, 2009, 19(4): 043119.
- [28] LIU H, CHEN J, LU J, et al. Generalized synchronization in complex dynamical networks via adaptive couplings[J]. *Physica A*, 2010, 389: 1759-1770.
- [29] GÓMEZ-GARDEÑES J, MORENO Y, ARENAS A. Evolution of microscopic and mesoscopic synchronized patterns in complex networks[J]. *Chaos*, 2011, 21: 016105.
- [30] GÓMEZ-GARDEÑES J, GÓMEZ S, ARENAS A, et al. Explosive synchronization transitions in scale-free networks[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106: 12870.
- [31] ALMENDRAL J A, CRIADO R, LEYVA I, et al. Introduction to focus issue: Mesoscale in complex networks[J]. *Chaos*, 2011, 21: 016101.
- [32] MOHAR B. Graph laplacians. in: *topics in algebraic graph theory*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [33] CHEN G, DUAN Z. Network synchronizability analysis: a graph-theoretic approach[J]. *Chaos*, 2008, 18: 037102.
- [34] CHEN J, LU J, ZHAN C, et al. Laplacian spectra and synchronization processes on complex networks[M]//THAI M T, PARDALOS P M. *Hand book of optimization in complex networks*. Florida: Springer Press, 2012.
- [35] ZHAN C, CHEN G, YEUNG L F. On the distributions of laplacian eigenvalues versus node degrees in complex networks[J]. *Physica A*, 2010, 389: 1779-1788.
- [36] GIRVAN M, NEWMAN M E J. Community structure in social and biological networks[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2002, 99: 7821-7826.