

马尔可夫链蒙特卡罗容积粒子滤波器

鹿传国¹, 冯新喜¹, 张迪^{2,3}, 孔云波¹

(1. 空军工程大学电讯工程学院 西安 710077; 2. 装甲兵工程学院装备指挥与管理系 北京 丰台区 10072;
3. 空军航空博物馆 北京 昌平区 102211)

【摘要】针对非线性、非高斯系统状态估计问题,提出了一种基于重要密度函数的改进粒子滤波器—马尔可夫链蒙特卡罗容积粒子滤波器。在状态转移概率的基础之上综合考虑了当前的量测信息,利用容积卡尔曼滤波对每个采样粒子进行估计,使得重要密度函数更加贴近于真实后验;同时为避免粒子贫乏,在重采样后加入马尔可夫链蒙特卡罗步骤。理论分析和实验仿真表明:马尔可夫链蒙特卡罗容积粒子滤波器的性能要优于容积粒子滤波器以及其他参照滤波器。

关键词 容积粒子滤波; 重要密度函数; 马尔可夫链蒙特卡罗; 非线性非高斯; 序贯重要性采样
中图分类号 TP131 **文献标识码** A **doi**:10.3969/j.issn.1001-0548.2012.06.008

Monte Carlo Markov Chain Cubature Particle Filter

LU Chuan-guo¹, FENG Xin-xi¹, ZHANG Di^{2,3}, and KONG Yun-bo¹

(1. School of Electronic and Communication Engineering, Air-force Engineering University Xi'an 710077;
2. Equipment Command and Control Department, Academy of Armored Force Engineering Fengtai Beijing 100072;
3. Air Force Aviation Museum Changping Beijing 102211)

Abstract A novel improved particle filter based on sequential importance sampling, Monte Carlo Markov Chain (MCMC) cubature particle filter, is proposed for the estimation of non-linear non-Gaussian system. Each particle is estimated by means of cubature Kalman filter. The importance density function gets closer to the real posterior after taking the current observation into consideration on the basis of state transition. MCMC step is added after the selection. The theoretical analysis and the simulation experiment show the cubature particle filter performs much better than the other parallel filters.

Key words cubature particle filter; importance density function; Markov chain Monte Carlo; non-linear non-Gaussian; sequential importance sampling

非线性非高斯系统状态估计在统计学、语音和图像处理、数字通信、计算机视觉、自适应估计及自动控制领域有广泛应用^[1]。扩展卡尔曼滤波(EKF)因其实施简单、计算量小的优点得到了广泛应用,但它对非线性函数仅进行简单的截断处理,使其在非线性和非高斯条件下性能严重退化。无迹卡尔曼滤波(UKF)选择代表性的粒子滤波为解决非线性非高斯状态估计问题提供了新的思路,它通过一组加权粒子的递推和演化来递推给出系统状态后验概率密度近似形式,突破了卡尔曼滤波理论框架,理论上对过程噪声和量测噪声统计特性无任何限制,是一种适用性极强的贝叶斯滤波方法。

但粒子滤波有一个不可避免的粒子退化问题。

解决方法通常包括选择好的重要密度函数和重采样。对于一般的非线性系统,其后验概率密度函数并不可知,故基于后验概率的抽样格外困难,实际应用中通常选择一个重要密度函数近似得到服从后验概率分布的样本。目前还没有一种通用的重要密度函数选择办法,一般工程应用中常利用状态的转移概率进行重要性抽样^[2],但该方法并没有考虑当前的量测信息。按照贝叶斯学派的观点,当前量测蕴含着系统状态后验的某种测度信息。在转移概率分布的基础上综合考虑当前量测信息可以对重要密度函数进行修正。文献[3-4]正是基于该思想给出了改进粒子滤波器的性能模型化技术。文献[3]利用扩展卡尔曼滤波产生重要密度函数;文献[4]采用了

收稿日期: 2011-02-21; 修回日期: 2011-11-03

基金项目: 国家自然科学基金(60805015)

作者简介: 鹿传国(1986-),男,博士生,主要从事信息融合、目标被动跟踪等方面的研究。

无迹卡尔曼滤波。受EKF模型线性化的限制,基于EKF的粒子滤波性能改进有限。基于UKF的粒子滤波虽可显著改观,但UKF中需预先设定比例因子等参数,且对滤波精度影响极大,目前针对UKF滤波参数选择并没有明确的理论基础。文献[5]提出了利用粒子群智能方法来训练优化UKF滤波参数,该方法计算量大,推广应用受限,寻找一种简单高效的滤波具有重要意义。文献[6]提出了容积粒子滤波(CKF),主要思想在于选择确定性高斯点直接计算后验概率,其实施简单,精度较高。CKF优良性能已受到国内外学者广泛关注^[7-8]。文献[9]指出CKF是目前对贝叶斯后验的最佳近似。

重采样是解决粒子退化问题的又一方法,但重采样之后,粒子相关性增强,大权值的粒子被复制,权值较小的粒子逐渐消失,使得样本集不能充分描述后验。重采样后引入马尔可夫链蒙特卡罗移动步骤(MCMC)可有效遏制该现象^[10],可引导粒子自适应移动,增加粒子多样性。

本文为解决粒子退化问题,本文首先从重要密度函数优选的角度出发,综合利用最新量测信息来产生好的重要分布;同时在重采样之后引入MCMC步骤,进一步避免由于重采样而引起的粒子相关性,最终得到一种新型粒子滤波器—马尔可夫链蒙特卡罗粒子容积滤波器(MCMCCPF)。

1 基本粒子滤波

1.1 基本思想

考虑一般的系统方程:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, w_k) \quad (1)$$

$$z_k = h_k(x_k, v_k) \quad (2)$$

式中, $k \in \mathbb{N}$ 为时间索引; $x_k \in \mathbb{R}^n$ 为 k 时刻系统状态向量; f_k 为状态转移方程; w_k 为独立同分布的过程噪声; h_k 为量测方程; v_k 为独立同分布的量测噪声。贝叶斯估计的目的是利用 k 时刻的量测集合 Z^k 递推地给出系统状态 x_k 的条件期望,为此必须构造后验概率密度 $p(x_k | Z^k)$ 。

假设由后验概率密度 $p(x_k | Z^k)$ 采样得到 N 个样本,则后验可近似表达为:

$$p(x_k | Z^k) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x_k - x_k^{(i)}) \quad (3)$$

函数 $f(x_k)$ 的条件期望可近似为:

$$\hat{E}[f(x_k)] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_k) \delta(x_k - x_k^{(i)}) \quad (4)$$

依据科尔莫戈洛夫强大数定理,当 $N \rightarrow \infty$ 时,

近似期望收敛于真实期望。

1.2 序贯重要性采样

理想情况下可以直接从 $p(x_k)$ 抽取样本,但一般情况下无法得到,通常是从一个与 $p(x_k)$ 相近的、易于采样的分布(重要密度函数) $q(x_k | Z^k)$ 采样得到粒子集和对应权重:

$$w_k^i = p(x_k^{(i)}) / q(x_k^{(i)}) \quad (5)$$

则后验概率密度为:

$$q(x_k | Z^k) = \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(x_k - x_k^{(i)}) \quad (6)$$

1.3 重要性采样缺点

重要性采样虽然简单易行,但Doucet指出粒子经过若干次迭代,基于状态转移似然所计算的权值方差会逐渐增加,导致粒子退化^[11]。解决该问题的方法是对重要密度函数进行优选或者进行重采样。

文献[1]对重要密度选择准则进行了总结。然而目前并没有一种通用方法,最常用的仍是Gordon提出的利用状态转移概率的Bootstrap方法^[2],该方法简单易行,没有考虑最新量测,如量测精度较高则可能引起滤波发散。此外常用的方法是高斯近似,结合最新量测将重要密度函数近似高斯形式,本文所提算法正是基于这一思想。

此外常用方法是重采样,常用方法包括简单随机抽样、残差重抽样和分层抽样^[12]等。但该方法使得粒子多样性丧失,MCMC移动步骤是解决该问题的有效途径之一。它通过在目标状态空间中模拟一条马尔可夫链,使得该链的极限分布即为目标分布。

2 马尔可夫链蒙特卡罗容积粒子滤波

利用高斯滤波产生重要密度的具体办法是对每个粒子结合最新量测信息进行滤波,即将得到的高斯分布作为真实后验的近似^[13]。

2.1 容积卡尔曼滤波

容积卡尔曼滤波器是一种基于容积数值积分准则的递推型贝叶斯滤波器^[6]。该方法既无需计算雅可比矩阵,又不必预先设定参量,只要选择相应的容积点即可提高系统状态估计精度。该滤波算法中容积点数目是维数的二倍,且在低一维子空间中对称出现,对应权值大小相同,无论从样本数目还是选择方式上较UKF都有一定程度的简化。

2.1.1 容积积分准则

对于一般的积分问题:

$$I(f) = \int_{\sigma^n} f(x) \exp(-x^T x) dx \quad (9)$$

令 $\mathbf{x} = r\mathbf{y}$ ($r \in [0, +\infty)$), $\mathbf{y}\mathbf{y}^T = \mathbf{1}$, 得 $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = r^2$, 则式(7)转化为径向与超球面的二重积分:

$$I(f) = \int_0^\infty \int_{U_n} f(r\mathbf{y}) r^{n-1} \exp(-r^2) d(\sigma\mathbf{y}) dr \quad (10)$$

式中, U_n 表示单位超球面; $\sigma(\bullet)$ 为积分微元。

进一步化简, 得:

$$I(f) = \int_0^\infty S(r) r^{n-1} \exp(-r^2) dr \quad (11)$$

其中:

$$S(r) = \int_{U_n} f(r\mathbf{y}) d(\sigma\mathbf{y}) \quad (12)$$

对式(8)和式(9)分别采用 Gauss-Hermite 准则和 Spherical 准则, 最终得:

$$I(f) \approx \sum_{j=1}^{m_s} \sum_{i=1}^{m_r} a_i b_j f(r_i y_j) \quad (13)$$

一般令 $m_r = 1$, $m_s = 2n$ (n 为系统状态维数), 即可满足精度要求^[14]。

2.1.2 容积卡尔曼滤波

容积卡尔曼滤波和其他高斯滤波结构类似, 由时间更新和量测更新构成闭环, 如图1所示。

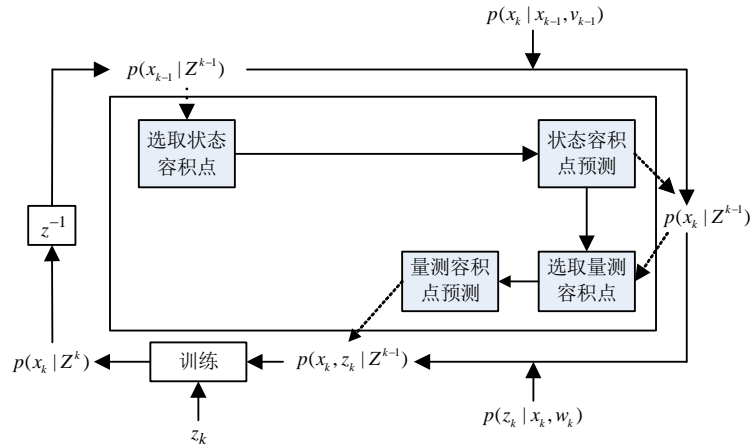


图1 容积卡尔曼滤波结构图

图中实线框给出了容积卡尔曼滤波结构, 内侧虚线框指示了容积点运算情况。可以看出CKF在滤波结构上与UKF类似, 概率密度函数都是由确定性样本点计算得出, 具体的算法流程参见文献[6]。

2.2 马尔可夫链蒙特卡罗容积粒子滤波器

CKF得到高斯分布的均值和协方差与EKF和UKF相比更加精确, 且该分布具有更长的拖尾, 与真实后验有更大的重叠区, 故可用来产生重要的密度函数。马尔可夫链蒙特卡罗容积粒子滤波的算法步骤为:

1) 初始化: $k = 0$ 。

由先验概率 $p(x_0)$ 采样得到粒子集合 $\{x_0^{(i)}\}_{i=1}^N$, N 为粒子个数, 权值设定为 $w_0^i = 1/N$; 每个粒子对应的协方差均设为 P_0 。

2) 循环迭代: $k = 1, 2, 3 \dots$ 。

① 滤波估计。对 $(k-1)$ 时刻的每个粒子 $x_{k-1}^{(i)}$ 结合 k 时刻量测 z_k 进行容积卡尔曼滤波, 得到每一个粒子对应的状态估计 $\hat{x}_{k|k}^{(i)}$ 和协方差 $\hat{P}_{k|k}^{(i)}$, 则重要密度函数近似为:

$$q(x_k^{(i)} | x_{k-1}^{(i)}, Z^{k-1}) = N(\hat{x}_{k|k}^{(i)}, \hat{P}_{k|k}^{(i)}) \quad (14)$$

② 重要性采样。基于式(14)进行重要性采样,

获得新的粒子集 $\{x_k^{(i)}\}_{i=1}^N$, 依式(7)计算权值 w_k^i , 并作归一化处理:

$$w_k^i = w_k^i / \sum_{i=1}^N w_k^i \quad (15)$$

③ 重采样。由于重采样计算量极大, 为降低计算开销, 通常引入有效粒子数 N_{eff} ^[15] 这一参量来判断是否需要重采样。因该参量解析形式无法给出, 工程中常对其作如下近似:

$$N_{\text{eff}} = 1 / \sum_{i=1}^N (w_k^i)^2 \quad (16)$$

若 $N_{\text{eff}} < N_{\text{th}}$, 则进行重采样, N_{th} 为门限。

④ MCMC 步骤。常用方法是进行 Metropolis-Hastings 采样。确定门限 u , $u \in U[0, 1]$; 依照状态转移概率 $p(x_k | x_{k-1}^{(i)})$ 采样得到粒子 $x_k^{*(i)}$; 如 $u < \min\left\{1, \frac{p(z_k | x_k^{*(i)})}{p(z_k | x_k^{(i)})}\right\}$, 则接受 $x_k^{*(i)}$; 否则保留重采样的粒子 $x_k^{(i)}$ 。

⑤ 系统状态估计。如上得到估计后验的样本粒子, 则系统后验期望为:

$$\hat{x}_{k|k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_k^{(i)} \quad (17)$$

3 实验仿真

3.1 实验设置

利用本文所提滤波器对下述一维非线性、非高斯时间序列分析问题求解。

状态方程为：

$$x(t+1) = 1 + \sin(\omega\pi t) + \phi_1 x(t) + v_t$$

量测方程为：

$$y(t) = \begin{cases} \phi_2 x(t)^2 + n_t, & t \leq 30 \\ \phi_3 x(t) - 2 + n_t, & t > 30 \end{cases}$$

其中， $\omega = 0.04$ ， $\phi_1 = 0.5$ ， $\phi_2 = 0.2$ ， $\phi_3 = 0.5$ ；过程噪声 $v(t) \sim \text{Gamma}(3, 2)$ ；采用量测不同次幂的观测方程，量测噪声 $n(t) \sim N(0, 0.000\ 01)$ 。图2给出了某一次实验的观测和真实状态曲线。

持续观测时间 $K = 60$ ，观测周期 $T = 1$ ；粒子滤波选取的粒子数 $N = 200$ ，采用残差重采样；选择 EKF、UKF、PF、EPF、UPF、MCMCPF、MCMCEPF、MCMCUPF 作为参照，其中 UKF 参数分别设定为 $\alpha = 1$ ， $\beta = 0$ ， $\kappa = 2$ ；Monte Carlo 实验次数为 100。

仿真硬件为奔腾 E5300 双核处理器、主频 2.59

GHz、内存 2 G 的电脑。

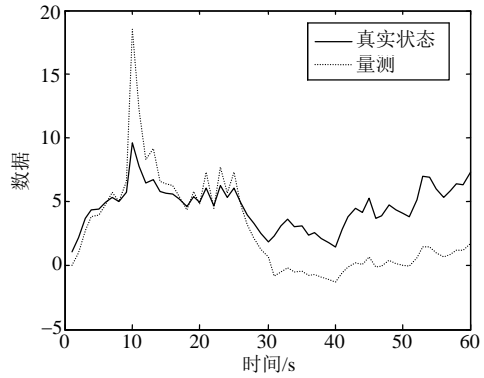


图2 系统演变及量测图

3.2 实验结果及分析

依据各滤波参与运算的粒子滤波的统计特性得出某次实验各粒子滤波对应的量测似然和后验概率密度函数如图3所示。

图4为100次Monte Carlo实验得到的均方误差曲线；表1给出了各滤波器在均方误差和运算时间的统计参数，其中，滤波时间单位为秒，是指完成一次持续估计实验的时间。

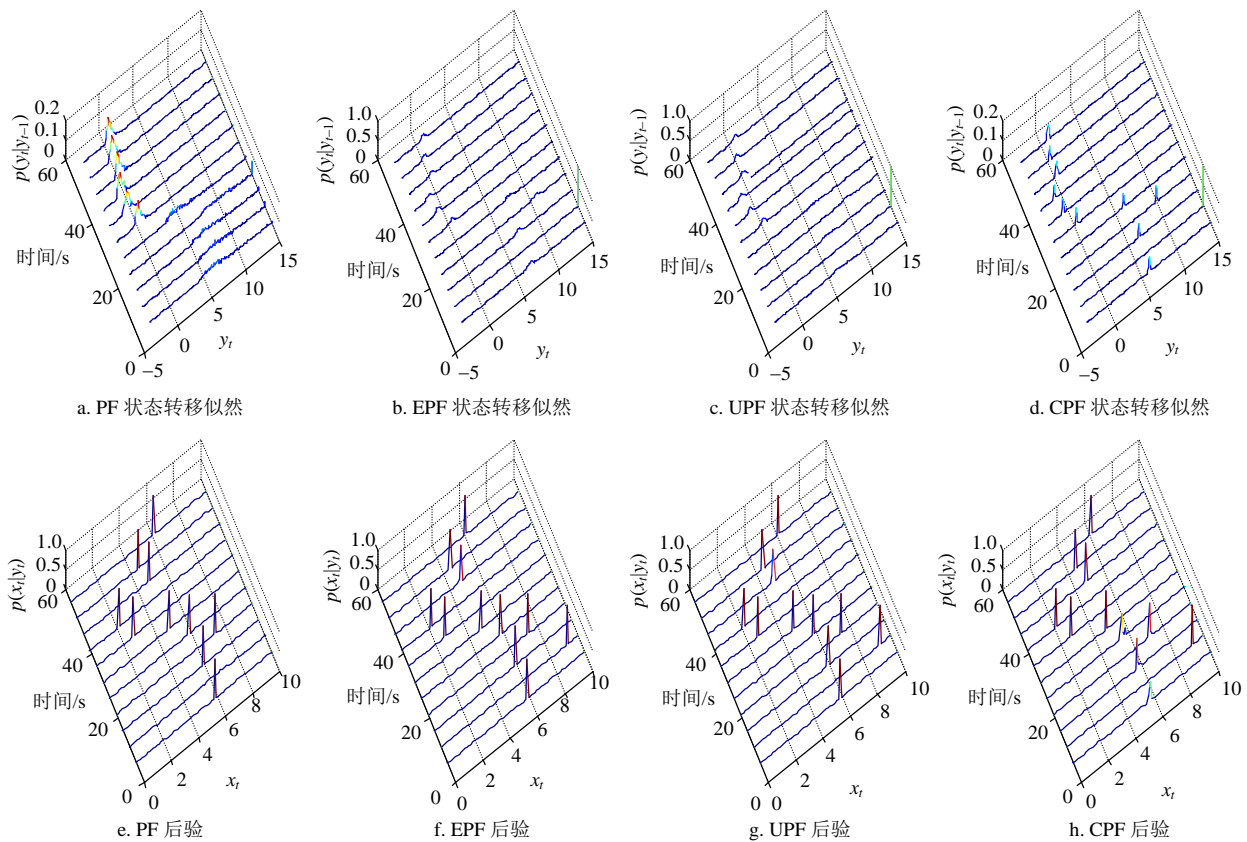


图3 粒子滤波概率密度

由图4a和表1滤波精度一栏可以看出，CKF均方误差曲线在EKF和UKF的均方误差曲线之下，滤波

精度比UKF和EKF均有不同程度的提高；而PF的估计结果有较大偏离，主要是因为本实验设定的量测

模型精度较高, 故量测似然与转移概率相比过于集中, 只有极个别的粒子具有较大权值, 出现了严重的粒子退化。

从图4b不难发现, 基于EKF、UKF和CKF的粒子滤波的均方误差明显低于PF, 能较好地吻合真实状态; 其中CPF滤波效果最好, 这取决于CKF所具有的良好特性, 使得重要密度函数更加贴近于真实后验。

比较图4c和图4b和表1中对应栏目可以发现, 引入MCMC策略的各粒子滤波器与原滤波器相比, 滤波精度均有所改善, 是因MCMC策略增加了粒子多样性, 使得重采样后的粒子能更好地代表真实后验分布。对比MCMCCPF、MCMCPF、MCMCEPF和MCMCUPF的均方误差曲线可以看出, MCMCCPF的滤波精度最为理想, 同样是由CKF的高滤波精度决定的。

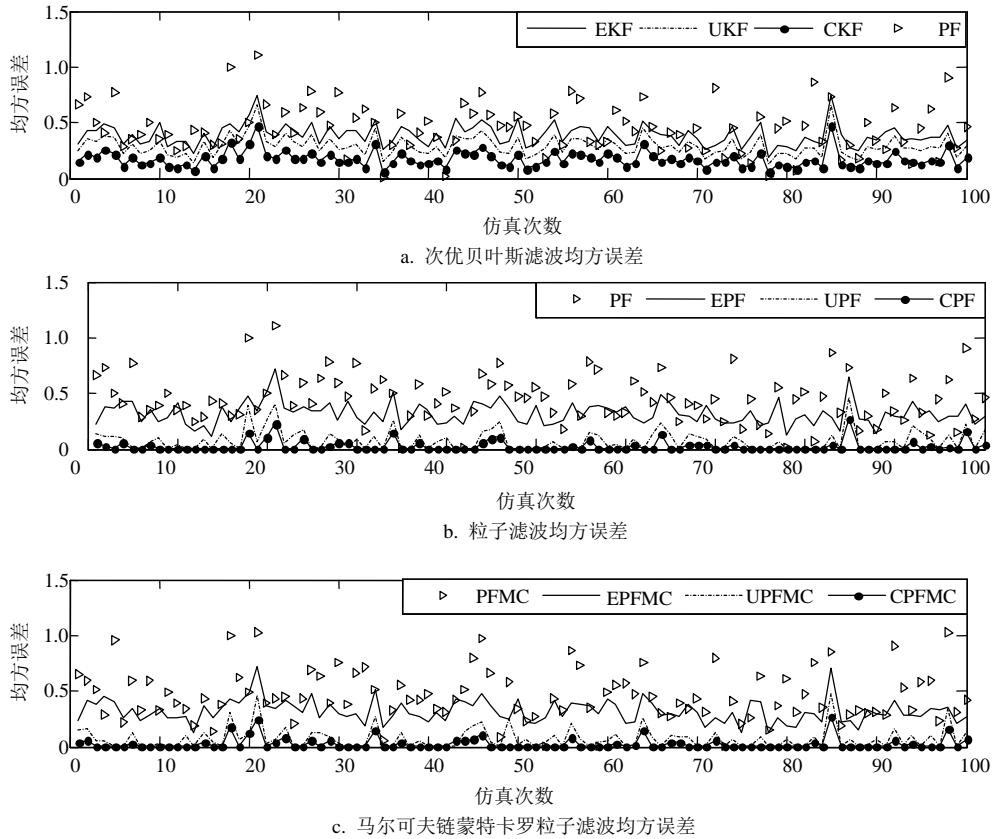


图4 均方误差曲线

表1 滤波器性能

算法	滤波精度		滤波时间	
	均方误差均值	均方误差方差	平均运行时间/s	相对计算强度
EKF	0.388 18	0.009 552 5	0.004 00	1.00
UKF	0.293 05	0.008 546 4	0.024 00	6.00
CKF	0.176 63	0.005 261 2	0.009 50	2.38
PF	0.450 51	0.045 982 0	0.997 38	249.35
EPF	0.321 44	0.010 656 0	3.335 60	833.90
UPF	0.078 10	0.008 565 2	7.060 80	1 765.20
CPF	0.030 30	0.002 501 4	4.425 30	1 106.30
MCMCCPF	0.460 09	0.051 635	2.305 2	576.30
MCMCEPF	0.320 06	0.010 728	7.018 9	1 754.70
MCMCUPF	0.074 37	0.008 848 9	14.628 7	3 675.20
MCMCCPF	0.030 27	0.002 608 9	9.337 4	2 334.40

从表1滤波时间一栏对比发现, PF与EKF、UKF和CKF相比运算量大大增加; 而EPF、UPF和CPF又

在PF的基础上引入了重要密度函数近似步骤, 付出了额外计算量。本文所提CPF算法与EPF相比, 仅以增加约33%的计算代价将滤波精度提高了约10 dB; 与UPF相比, 不仅计算量降低37%, 滤波精度也提高了约4.2 dB, 可见该滤波的有效性。计算量减少的主要原因在于CKF参与运算的样点数目比UKF少, CKF运算中直接对滤波协方差阵进行分解, 而UKF所分解的是扩维后的协方差矩阵, 且目标状态也要用噪声项进行扩维, 维数的增加增大了计算量。引入MCMC策略使得滤波运算时间增加了一倍多, 可见MCMC移动步骤计算量是巨大的。MCMCCPF比MCMCUPF的精度提高了近4.3 dB, 运算时间显著减少。对比CPF和UPF、MCMCUPF发现, CPF的滤波精度比MCMCUPF高出近4 dB, 可见CPF算法的有效性。

综合滤波精度和运算时间, 本文的CPF在解决非线性非高斯系统状态估计问题上性能优良, 是一种较为理想的粒子滤波器; MCMCCPF比CPF更进一步提高了滤波精度。针对具体问题可根据实时性要求判定是否需要加入MCMC步骤。

4 结 论

马尔可夫链蒙特卡罗容积粒子滤波器为解决非线性非高斯系统状态估计和模型辨识问题提供了一个新的方法, 特别是在量测精度较高的情况下。该滤波器基于CKF产生重要密度函数, 避免了由于粒子退化而引起的滤波偏差或发散, 性能优于标准粒子滤波器; 基于CKF的良好特性, 使得该滤波器与基于EKF、UKF的粒子滤波相比, 性能也更好一些。同时在重采样之后引入了MCMC移动步骤, 进一步保证了粒子多样性。在对估计精度和实时性要求较高的场合, 该滤波是一种理想的选择。

参 考 文 献

- [1] 朱志宇. 粒子滤波算法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
ZHU Zhi-yu. Particle filter algorithm and its application[M]. Beijing: Science Publish House, 2010.
- [2] GORDON N J, SALMOND D J, SMITH A F M. A novel approach to nonlinear and non-Gaussian Bayesian state estimation[C]//IEEE Proceedings. UK: IEEE, 1993.
- [3] de FREITAS J F G. Bayesian methods for neural networks [D]. Cambridge, UK: Department of Engineering, Cambridge University, 1999.
- [4] van der MERWE R, DOUCET A, de FREITAS N, et al. The Unscented Particle Filter Technical Report CUED/F-INFENG/TR 380[R]. Cambridge, UK: Engineering Department, Cambridge University, 2000.
- [5] JATOTH R K, KUMAR T K. Swarm intelligence based tuning of unscented Kalman filter for bearing-only tracking [J]. International Journal of Recent Trends in Engineering, 2009, 2(5): 177-181.
- [6] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2008, 54(6): 1254-1269.
- [7] 王品, 谢伟信, 刘宗香, 等. 几种非线性滤波器的性能评估[C]//第二届全国信息融合学术年会. 杭州: 杭州电子科技大学, 2010.
WANG Pin, XIE Wei-xin, LIU Zhong-xiang, et al. Performance evaluation of several nonlinear filters[C]//The 2nd Chinese Information Fusion Conference. Hangzhou: Hangzhou University of Electronic Science and Technology, 2010.
- [8] HUANG G Q, ROUMELIOTIS S. Bearing-only tracking using bank of MAP estimators[R]. Minnesota, The United States: Multiple Autonomus Robotic Systems Laboratory, 2010.
- [9] HAYKIN S. Cubature Kalman filters[EB/OL]. [2011-02-03]. <http://soma.mamaster.ca>.
- [10] AUSTIN J W, LEONDES C T. Statistically estimation of reentry trajectories[J]. IEEE Trans AES, 1981, 17(1): 4-61.
- [11] RISTIC B, ARULAMPALAM S, GORDON N. Beyond the Kalman filter[M]. New York: Artech House, 2004.
- [12] DOUCET A, GODSILL S, ANDRIEU C. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering[J]. Statistics and Computing, 2000, 10(3): 197-208.
- [13] 薛锋, 刘忠, 石章松. Unscented粒子滤波器及其在纯方位跟踪中的应用[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(7): 1722-1725.
XUE Feng, LIU Zhong, SHI Zhang-song. Unscented Particle Filter for Bearings-only Tracking[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2007, 29(7): 1722-1725.
- [14] ARASARATNAM I. Cubature Kalman filters: theory & application[D]. Hamilton Canada: Department of Electrical and Computer Engineering, McMaster University, 2009.
- [15] GEWEKE J. Bayesian inference in econometrics model using Monte Carlo integration[J]. Econometrics, 1989(57): 1317-1339.

编辑 税红