

基于混合变量的可靠性稳健设计方法

张小玲, 黄洪钟, 许焕卫, 汪忠来, 肖宁聪

(电子科技大学机械电子工程学院 成都 611731)

【摘要】将产品性能函数在指定百分位数处的波动作为产品稳健性指标, 极限性能函数的区间可靠度大于可靠性指标作为约束, 建立了随机变量和区间变量同时存在时的可靠性稳健设计单目标优化模型。为了提高可靠性优化设计问题的效率, 将两个耦合的优化问题分解成两层结构优化设计问题, 上层为稳健优化设计, 下层进行可靠性分析计算。最后用减速器可靠性稳健优化设计问题验证所建立模型的效率和精度。

关键词 区间变量; 百分位数; 可靠性稳健设计; 单目标; 两层优化

中图分类号 TP202[†].1

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2012.06.026

Reliability-Based Robust Design Method with Mixture of Random Variables and Interval Variables

ZHANG Xiao-ling, HUANG Hong-zhong, XU Huan-wei, WANG Zhong-lai, and XIAO Ning-cong

(School of Mechatronics Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 611731)

Abstract In this paper, the fluctuation of the performance function at a given percentile is taken as product robustness index, and the interval reliability of the limit state function bigger than the reliability target is formulated as constraint, the reliability-based robust design single objective optimization problem is developed with the mixture of random design variables and interval variables. To improve the efficiency of probability design optimization problem, the two coupled optimization loops are decomposed into two level structure design optimization, the top level is robust design optimization problem, and the lower level is the reliability analysis problem. Finally, the reliability-based robust design of a reducer is presented to verify the efficiency and accuracy of the proposed method.

Key words interval variable; percentile; reliability based robust design; single objective; two level

随着航空发动机、数控机床等复杂机电产品日益大型化与复杂化, 以及在设计、制造与使用阶段存在大量的不确定性, 使产品设计对可靠性和稳健性的要求越来越高。可靠性设计是一个多维非线性概率积分问题, 是指产品性能的极限状态函数满足规定指标的概率^[1]。稳健设计是通过调整设计变量及控制其容差, 使可控因素和不可控因素当与设计值发生变差时仍能保证产品质量的一种工程方法^[2-3]。可靠性设计和稳健设计面临的一个共同挑战是计算成本。近几年, 很多学者从不同的角度提出了提高可靠性和稳健设计计算效率的方法^[4-9]。一阶泰勒展开是最常用的近似方法之一, 但在性能函数为高非线性情形时, 会产生很大误差。可靠性稳健设计是指满足可靠性约束的情况下最小化成本, 最大化产品的稳定性。文献[10-11]建立了可靠性和稳健

设计在同一个可靠性优化设计问题中的集成模型, 性能函数的方差表示产品的稳健性。文献[12]提出用性能函数的百分位差表示产品的稳健性更能反映性能函数的概率分布, 并提出了提高可靠性评估和稳健设计的可靠性优化搜索方法。文献[13]运用性能矩积分法, 建立了性能函数越大越好、越小越好和取特定值的3种稳健性目标函数。为了提高可靠性稳健设计的效率, 文献[14-17]采用降维近似方法描述不确定性, 建立了概率可靠性稳健设计模型。文献[18-19]建立了多目标可靠性稳健设计模型, 分别采用权重系数和遗传算法求解多目标优化设计问题。

上述不确定性分析方法假设不确定性变量服从某种特定的分布。但是在很多工程实际中, 无法获取足够的信息描述不确定性变量的概率分布, 只能得到这些变量可能的取值范围。文献[20]提出了一种

收稿日期: 2011-03-25; 修回日期: 2012-06-12

基金项目: 国家自然科学基金(51075061)

作者简介: 张小玲(1981-), 女, 博士, 主要从事系统可靠性优化设计、多学科设计优化等方面的研究。

集成可能性优化设计和稳健设计的认知不确定性分析方法,利用Info-Gap Model建立多目标稳健设计模型。稳健设计指标是一个多目标问题存在如何选择合适的权值,或者对Pareto解集的求取等问题。本文研究同时包含区间变量和随机变量时的可靠性稳健优化设计问题。最小化目标函数的均值,将稳健设计目标即由区间变量波动引起的目标函数的最大波动在允许范围内作为约束条件,建立单目标可靠性稳健优化设计模型。

可靠性优化设计求解问题是一个两层循环优化过程,外循环是优化,主要是搜寻可行解;内循环提供可靠性约束的分析计算,即是可靠性分析。该方法在每次优化时都需要进行大量的可靠性分析计算,导致计算效率很低。文献[21]提出了SORA (sequential optimization and reliability assessment)方法,该方法将可靠性分析和优化进行解耦,形成序列环。在每次优化过程中,可靠性约束被确定性约束取代,提高了可靠性优化设计问题的效率。本文将可靠性优化设计问题分解成两层优化结构,上层设计问题为稳健优化设计,下层进行可靠性分析计算。

1 可靠性分析方法及稳健设计指标

1.1 可靠性分析方法

可靠性分析是计算极限状态函数小于零的概率,即有:

$$R_i = P\{g_i(\mathbf{x}) \leq 0\} = \int_{g_i(\mathbf{x}) \leq 0} f_x(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是随机设计变量; $f_x(\mathbf{x})$ 是 \mathbf{x} 的联合概率密度函数; 积分区域为 $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ 。

在工程系统中,联合概率密度函数和极限状态函数通常都是多维非线性函数,很难直接通过式(1)计算极限状态函数的可靠度。通过基于设计点(most probable point, MPP)的近似积分方法可以把可靠性约束转化成确定性约束问题,有:

$$g_i^p(\mathbf{x}_{\text{mpp}}) \leq 0 \quad (2)$$

式中, g_i^p 为函数 $g_i(\mathbf{x})$ 的 p 百分位数。求解MPP的优化问题为:

$$\begin{aligned} \min &: g_i(\mathbf{u}) \\ \text{s.t.} & \|\mathbf{u}\| = \beta_i = \Phi_i^{-1}(\mathbf{R}_i^T) \\ & P\{g_i(\mathbf{x}) \leq g_i^p\} = \mathbf{R}_i^T \end{aligned} \quad (3)$$

式中, \mathbf{u} 为随机变量 \mathbf{x} 转化成标准正态分布变量的表示形式; β 为可靠性指数; $\Phi_i^{-1}(\cdot)$ 为标准正态分布累积分布函数的反函数。

二维空间的基于MPP的可靠性约束如图1所示。

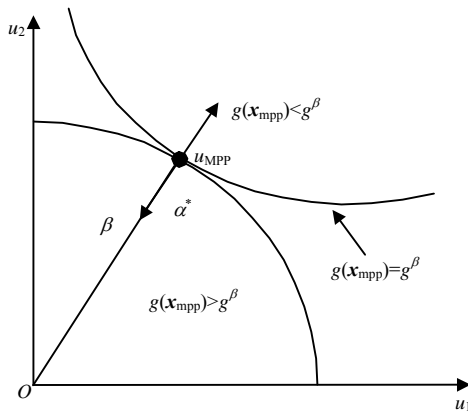


图1 二维空间的基于MPP点的可靠性约束

1.2 稳健设计指标

产品性能函数的均值和方差描述了产品的稳健性,只含随机变量的稳健优化设计模型为:

$$\begin{aligned} \min &: w_1 \mu_f + w_2 \sigma_f \\ \text{s.t.} & \mu_g + k \sigma_g \leq 0 \\ & h(\mathbf{x}) = 0 \\ & \mathbf{x}^l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^u \end{aligned} \quad (4)$$

式中, w_1 和 w_2 为权重系数; k 为一个常数。当仅存在区间变量时,其稳健优化设计问题为:

$$\begin{aligned} \min &: w_1 \bar{f} + w_2 \delta_f \\ \text{s.t.} & g_i^{\max}(\mathbf{y}) \leq 0 \quad i=1,2,\dots,n \\ & h(\mathbf{y}) = 0 \\ & \mathbf{y}^l \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}^u \end{aligned} \quad (5)$$

式中, $\bar{f} = \frac{1}{2}(f^{\max} + f^{\min})$; $\delta_f = \frac{1}{2}(f^{\max} - f^{\min})$; \mathbf{y} 为区间变量。同时存在随机变量和区间变量的稳健设计模型为:

$$\begin{aligned} \min &: w_1 \bar{\mu}_f + w_2 \bar{\sigma}_f + w_3 \delta_f \\ \text{s.t.} & \mu_{g_i}^{\max} + k \sigma_{g_i}^{\max} \leq 0 \quad i=1,2,\dots,n \\ & h(\bar{\mu}_x, \bar{\mathbf{y}}) = 0 \\ & \mu_x^l \leq \mu_x \leq \mu_x^u \\ & \mathbf{y}^l \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}^u \end{aligned} \quad (6)$$

随机不确定性因素作用下的可靠性稳健优化设计问题为:

$$\begin{aligned} \min &: w_1 \frac{\mu_f}{\mu_f^*} + w_2 \frac{\sigma_f}{\sigma_f^*} \\ \text{s.t.} & P\{g_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq 0\} \geq \beta_i^T \quad i=1,2,\dots,n \\ & \mathbf{d}^l \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^u, \mu_x^l \leq \mu_x \leq \mu_x^u \end{aligned} \quad (7)$$

产品性能函数的百分数和性能函数分布的尾部面积有关,可以反映分布的一些特征,且百分位差可以反映稳健设计的置信区间,如图2所示。

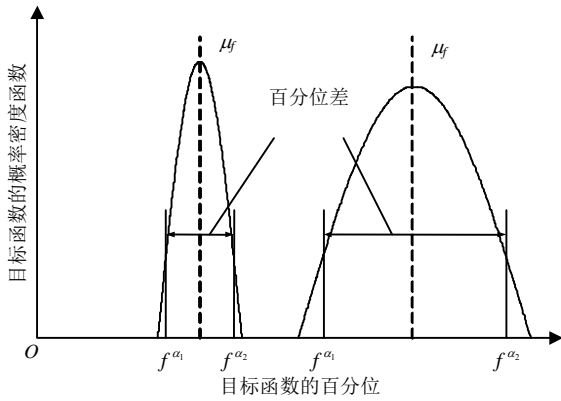


图2 性能函数百分位数

用性能函数的百分位差代替目标函数的方差, 其最大的优点是包含除均值以外更多的信息, 如性能函数的偏斜。但文献[16]中百分位差方法适合于性能函数的概率分布为对称分布, 且式(8)是一个多目标优化设计问题, 不同的权重系数设置下, 系统会收敛到不同的设计点。本文提出用性能函数在某一百分位数处的波动表示产品性能的稳健性, 且把多目标问题转化成单目标问题, 建立考虑同时含随机变量和区间变量的可靠性稳健优化设计模型。

用性能函数的百分位差作为性能函数的稳健性指标, 其可靠性稳健设计为:

$$\begin{aligned} \min &: w_1 \frac{\mu_f}{\mu_f^*} + w_2 \frac{\Delta_f}{\Delta_f^*} \\ \text{s.t.} & P\{g_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq 0\} \geq \beta_i^T \quad i=1, 2, \dots, n \\ & \mathbf{d}^l \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^u, \boldsymbol{\mu}_x^l \leq \boldsymbol{\mu}_x \leq \boldsymbol{\mu}_x^u \\ & \Delta_f = f^{\alpha_1} - f^{\alpha_2} \\ & P\{f(\mathbf{d}, \mathbf{x}, \mathbf{p}) - f^{\alpha_1} \leq 0\} = \int_{-\infty}^{f^{\alpha_1}} g(f) df = \beta_f^{\alpha_1} \\ & P\{f(\mathbf{d}, \mathbf{x}, \mathbf{p}) - f^{\alpha_2} \leq 0\} = \int_{-\infty}^{f^{\alpha_2}} g(f) df = \beta_f^{\alpha_2} \end{aligned} \quad (8)$$

2 可靠性稳健优化设计模型

由于区间变量的存在, 可靠性分析结果也是一个区间, 为了保证系统的可靠性, 需保证性能函数的极限状态函数在区间变量取值范围的可靠度大于系统所要求的可靠度:

$$\begin{aligned} P\{g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \mathbf{y} \in [\mathbf{y}^l, \mathbf{y}^u] \leq 0\} & \geq \mathbf{R}_i^T \\ \Downarrow \\ P^{\max} & = P\{g_i^{\min}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \mathbf{y} \in [\mathbf{y}^l, \mathbf{y}^u] \leq 0\} \geq \mathbf{R}_i^T \\ P^{\min} & = P\{g_i^{\max}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \mathbf{y} \in [\mathbf{y}^l, \mathbf{y}^u] \leq 0\} \geq \mathbf{R}_i^T \end{aligned} \quad (9)$$

性能函数在某一百分位数处的波动为:

$$\begin{aligned} \Delta f^a & = P^{\max}\{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f^\alpha | \mathbf{y} \in [\mathbf{y}^l, \mathbf{y}^u] \leq 0\} - \\ & P^{\min}\{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f^\alpha | \mathbf{y} \in [\mathbf{y}^l, \mathbf{y}^u] \leq 0\} \end{aligned} \quad (10)$$

同时含随机变量和区间变量的可靠性稳健设计单目标优化设计模型为:

$$\begin{aligned} \min &: \mu_f \\ \text{s.t.} & P\{g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \mathbf{y} \in [\mathbf{y}^l, \mathbf{y}^u] \leq 0\} \geq \mathbf{R}_i^T \\ & \Delta f^a \leq \Delta_f^{\text{accept}} \\ & \mathbf{y}^l \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}^u, \boldsymbol{\mu}_x^l \leq \boldsymbol{\mu}_x \leq \boldsymbol{\mu}_x^u \\ & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (11)$$

3 可靠性稳健设计两层优化设计模型

将可靠性优化设计双层耦合问题分解成两层优化设计问题, 上层为稳健优化设计, 下层进行可靠性分析计算, 其流程如图3所示。

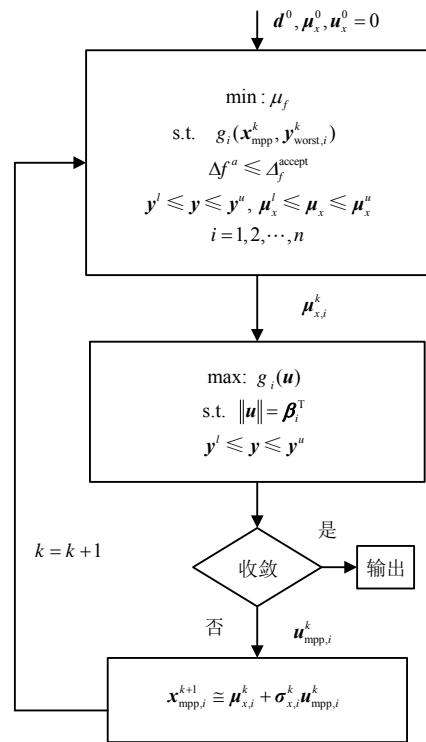


图3 可靠性稳健设计两层优化流程图

4 减速器优化设计

齿轮减速器是一种使用广泛的机械传动装置。本文采用单级斜齿轮减速器, 可靠性稳健优化设计验证随机变量和区间变量同时存在时的两层可靠性稳健设计优化模型, 如图4所示。已知齿数比 u 、输入功率为 p 、主动齿轮转速为 n_1 的情况下, 选取齿轮齿数 z_1 、模数 m 、螺旋角 β 及齿宽 b 为设计变量, 弹性模量 Z_E 、许用接触疲劳强度 $\sigma_{H\min}$ 和许用弯曲

疲劳强度 $\sigma_{F\min}$ 为设计参数，最小化减速器体积为设计目标，建立优化设计模型。 $\mathbf{x}=[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [z_1 \ m \ \beta \ b]^T$ ，随机变量和随机参数的分布如表1所示。

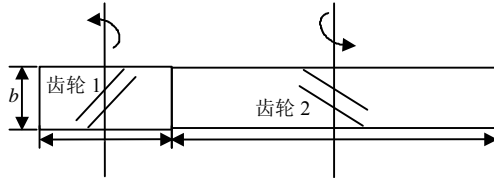


图4 减速器结构简图

表1 随机变量和随机参数的分布

变量	均值	方差	分布
b	μ_b	1~10	正态分布
Z_E	189.8	18.98	正态分布
P	2 000	200	正态分布
n_1	1 000	100	正态分布
$\sigma_{H\min}$	1 350	135	正态分布
$\sigma_{F\min}$	500	50	正态分布
u	5	0.02	正态分布

确定性变量为主动轮齿数 z_1 和模数 m ；区间变量为螺旋角 β ，区间范围为[0.139 6,0.279 3]；齿宽 b 服从正态分布，但其方差是一个范围[1,10]。对单级减速器设计的可靠性要求包括：1) 斜齿轮分度圆柱螺旋角应保证轴向重合度系数；2) 齿宽取值在一定的范围之内；3) 齿轮的弯曲疲劳强度和接触疲劳强度要小于各自的许用强度。减速器的可靠性稳健优化设计的数学模型可表示为：

$$\begin{aligned}
 & \min: \mu_f \\
 & \text{s.t. } P\{g_i(\mathbf{x}) \leq 0\} \geq R_i^T \\
 & \Delta f^a \leq \Delta f^{\text{accept}} \\
 & 17 - x_1 / \cos^3(x_3) \leq 0 \\
 & 2 \leq x_2 \leq 20 \\
 & 0.139\ 6 \leq x_3 \leq 0.279\ 3
 \end{aligned} \tag{12}$$

式中

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{\pi x_2^2}{4} [x_1^2 + (u x_1)^2] x_4 (\cos(x_3))^{-2} \\
 g_1 &= 1 - x_4 \sin(x_3) / (\pi x_2) \\
 g_2 &= 0.4 - x_4 \cos(x_3) / x_1 x_2 \\
 g_3 &= x_4 \cos(x_3) / x_1 x_2 - 0.9 \\
 g_4 &= Z_E Z_H \sqrt{\frac{F_t \cos(x_3) u + 1}{x_1 x_2 x_4} K_A} - \sigma_{H\min} Z_N \\
 g_5 &= \frac{F_t}{x_4 x_2} Y_F - \sigma_{F\min} Y_{ST}
 \end{aligned}$$

其中， $Z_H = 2.25$ ， $K_A = 1.45$ ， $Z_N = 0.87$ ， $Y_F = 1.98$ ， $Y_{ST} = 2.32$ 。

设 $R_1 \sim R_5$ 为 0.998 7，优化结果圆整以后如表2所示。

表2 可靠性稳健设计优化结果

	初始值	确定性设计	耦合方法	本文方法
z_1	16	16	16	16
m_n	10	15	14	14
b	150	200	171	171
β	0.2	0.229 2	0.226 9	0.226 9
$f \times 10^8$		4.435 9	3.552 5	3.552 5
$\Delta f_f^{\text{accept}}$			0.05f	0.05f
可靠度			0.998 7	0.998 7
函数评估次数		1 306	1 470	1 556
可靠性评估次数			50	1 556

表2列出了确定性设计方法、双循环耦合可靠性优化设计方法和本文方法的设计结果。由表2可以看出，可靠性稳健设计提高了产品性能在随机不确定性和区间不确定性同时作用下的稳定性和可靠性。两层优化设计方法大大降低了可靠性评估次数，提高了可靠性优化设计效率。

5 结 论

本文提出了用性能函数在指定百分位数处的波动作为产品稳健性指标，建立了同时含随机变量和区间变量的可靠性稳健设计单目标优化模型；运用两层优化设计方法代替原来的耦合优化，减少了可靠性评估次数，提高了可靠性优化设计效率。

今后需要进一步考虑设计变量之间的相关性，提高可靠性分析精度，以及各个概率约束之间的相关性，计算系统可靠性；并考虑时变因素下，建立产品性能的稳健指标。

参 考 文 献

- [1] MELCHERS R E. Structural reliability analysis and prediction[M]. Chichester, England: John Wiley & Sons, 1999.
- [2] TAGUCHI G. Taguchi on robust technology development: bringing quality engineering upstream[M]. New York, USA: ASME Press, 1993.
- [3] PHADKE M S. Quality engineering using robust design[M]. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice Hall, 1989.
- [4] MCALLISTER C D, SIMPSON T W. Multidisciplinary robust design optimization of an internal combustion engine[J]. Journal of Mechanical Design, 2003, 125(1): 124-130.
- [5] VENIGELLA P. Robust mechanism synthesis with random and interval variables[D]. Rolla, Missouri, USA: University of Missouri-Rolla, 2004.
- [6] BEYER H G. Robust optimization- a comprehensive survey[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196(33-34): 3190-3218.
- [7] NOH Y, CHOI K K, LEE I, et al. Reliability-based design

- optimization with confidence level under input model uncertainty[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43(4): 443-458.
- [8] LEE I, CHOI K K, GORSICH D. Sensitivity analyses of FORM-based and DRM-based performance measure approach (PMA) for reliability-based design optimization (RBDO)[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 82(1): 26-46.
- [9] LIN P T, JALURIA Y, GEA H C. A hybrid reliability approach for reliability-based design optimization[C]//ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Montreal, Quebec, Canada: IDETC/CIE2010, 2010.
- [10] WANG W, WU J. Reliability-based robust design[C] //Proceedings of the 39th Structural Dynamics and Materials Conference. Longbeach, CA, USA: AIAA-98-2052, 1998.
- [11] KOCH P N. Probabilistic design: optimizing for six sigma quality[C]//43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Denver, Colorado, USA: AIAA-2002-1471, 2002.
- [12] DU X. An integrated framework for optimization under uncertainty using inverse reliability strategy[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2004(126): 562-570.
- [13] YOUN B D, CHOI K K, YI K. Performance moment integration (PMI) method for quality assessment in reliability based robust design optimization[J]. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2005, 33(2): 185-213.
- [14] LEE I, CHOI K K, DU L. Alternative methods for reliability-based robust design optimization including dimension reduction method[C]//Proceedings of 2006 ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Philadelphia, Pennsylvania: ASME, 2006.
- [15] YOUN B D, XI Z, WELLS L J, et al. Sensitivity-free approach for reliability-based robust design optimization [C]//Proceedings of the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference. Las Vegas, Nevada, USA: ASME, 2007.
- [16] LEE I, CHOI K K, DU L, et al. Dimension reduction method for reliability-based robust design optimization[J]. *Computers and Structures*, 2008, 86(13-14): 1550-1562.
- [17] YOUN B D, XI Z M. Reliability-based robust design optimization using the eigenvector dimension reduction (EDR) method[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 37(5): 475-492.
- [18] YADAV O P, BHAMARE S S, RATHORE A. Reliability-based robust design optimization: A multi-objective framework using hybrid quality loss function[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2010, 26(1): 27-41.
- [19] RATHOD V, YADAV O P, RATHORE A, et al. Reliability-based robust design optimization: A comparative study[C]//IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management. Singapore: IEEE, 2011.
- [20] TANG Y F, CHEN J Q, WEI J H. A sequential algorithm for reliability-based robust design optimization under epistemic uncertainty[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2012, 134(1): 1-10.
- [21] DU X, CHEN W. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2004(126): 225-233.

编辑 黄 莘