

图像多相分割松弛凸化模型分裂方法

张文娟^{1,2}, 冯象初¹

(1. 西安电子科技大学理学院 西安 710071; 2. 西安工业大学理学院 西安 710032)

【摘要】研究了一类向量值极小化问题的凸松弛方法,给出了适用于split Bregman快速算法的一般性等价模型。Vese-Chan多相分割方法和基于分片常数水平集函数的Mumford-Shah方法是新模型的特例。数值实验表明,在Vese-Chan方法和Mumford-Shah方法中应用split-Bregman算法,具有较快的运算速度和较好的分割效果,且对初始条件是鲁棒的。

关键词 凸松弛; 图像多相分割; Mumford-Shah方法; split-Bregman迭代; Vese-Chan方法
中图分类号 TP391 **文献标志码** A **doi**:10.3969/j.issn.1001-0548.2013.01.027

Split Method for the Convex Relaxation Model of Image Multi-Phase Segmentation

ZHANG Wen-juan^{1,2} and FENG Xiang-chu¹

(1. School of Science, Xidian University Xi'an 710071; 2. School of Science, Xi'an Technological University Xi'an 710032)

Abstract A general equivalent model is introduced based on the convex relaxation model of a class of vector-valued minimization problems. The presented model can be solved by split-Bregman algorithm. The computational efficiency is greatly improved. The method is applied to the Vese-Chan multi-phase segmentation model and Mumford-Shah model. Numerical experiments show our method has fast computing speed and good segmentation results, and is robust to the initial condition.

Key words convex relaxation; image multi-phase segmentation; Mumford-Shah method; split-Bregman iteration; Vese-Chan method

在图像处理和计算机视觉中,非凸能量极小化问题变得越来越普遍。在一个凸集上求凸函数的极小解时,最优解的一阶必要条件也是充分条件,任何一个局部最优解也是全局最优的。但如果是非凸优化问题,最优解的一阶必要条件不是充分的,对很多数值方法而言往往会得到局部极小解。凸松弛方法是求解非凸优化问题的有效方法,实际上,在将非凸问题凸化的同时还进一步要求凸松弛模型具有适用于快速算法的形式。

在二相分割情形,文献[1]针对GAC (geodesic active contour)模型^[2]和ACWE (active contour without edges)^[3]模型给出了相应的凸化模型,并利用split Bregman^[4-6]迭代求解,运算速度快,并取得了很好的分割效果。文献[1]给出了GAC模型的一个等价形式,从而将非凸问题转化为凸问题。ACWE模型的凸松弛是将未知函数限制在区间[0,1]上,从而将全体二值函数构成的非凸解集松弛为凸集。

对离散形式的多相图像分割,graph cuts算法^[7-9]可以求得全局极小解,但graph cuts算法对离散网格具有依赖性,并且处理3D图像时需特别考虑记忆存储空间的分配。对连续形式的多相图像分割,文献[10]通过将未知函数定义在更高维的空间中,给出了一类向量值极小化问题的凸松弛方法,并利用Arrow-Hurwicz-Uzawa算法^[11-12]求解。与离散方法相比,连续方法具有次像素准确性。但是由于未知函数维数的增高,特别是由于模型形式对算法的限制,使用Arrow-Hurwicz-Uzawa算法求解,计算代价较高。

本文在连续情形下,研究了文献[10]中的凸松弛模型,给出了适用于split Bregman算法的一般性等价形式。Vese-Chan多相分割方法和基于分片常数水平集函数的Mumford-Shah方法是新模型的特例。数值实验表明,在Vese-Chan方法和Mumford-Shah方法中应用split Bregman算法,具有较快的运算速度和较好的分割效果,且对初始条件是鲁棒的。

收稿日期: 2011-07-05; 修回日期: 2012-11-12

基金项目: 国家自然科学基金(61271294, 60872138, 61105011, 11101292)

作者简介: 张文娟(1980-),女,博士生,主要从事变分、偏微分方程在图像分割中的应用方面的研究。

1 一类向量值极小化问题的凸松弛方法

图像分割问题中的很多变分模型为:

$$\min_{u(x)} E(u(x)) := \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} |\nabla u_i| dx + \mu \int_{\Omega} \rho(x, u(x)) dx \quad (1)$$

式中, 向量值函数为:

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)) : \Omega \subset \mathbf{R}^d \rightarrow \Gamma := \{0, 1, \dots, N_i\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, N_m\}$$

$\rho : \Omega \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ 非负且常是非凸的, 参数 μ 用以平衡式(1)中两项的作用。

文献[10]提出了式(1)的凸松弛方法, 并在一定条件下建立了凸松弛模型的解与原问题解的关系。松弛后的优化问题为:

$$\min_{\phi = 1_{\{u(x) \geq \gamma\}}} F(\phi) \quad (2)$$

$$F(\phi) := \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{N_i} \int_{\Omega} |\nabla \phi(x, le_i)| dx + (-1)^m \mu \times \int_{\gamma \in \Gamma} \int_{\Omega} \rho(x, \gamma) D_{1, \dots, m}^m \phi(x, \gamma) dx$$

式中, $\phi(x, \gamma) = 1_{\{u(x) \geq \gamma\}}$ 为 $u(x)$ 的箱函数, 定义为:

$$1_{\{u(x) \geq \gamma\}} := 1_{\{u_1 \geq \gamma_1, \dots, u_m \geq \gamma_m\}} = \begin{cases} 1 & u_1 \geq \gamma_1, \dots, u_m \geq \gamma_m \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (3)$$

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m), \gamma_i \in \{0, 1, \dots, N_i, N_i + 1\}$; e_i 表示第 i 个元素为 1, 其余元素为 0 的 m 维单位向量; $D_{1, \dots, m}^m := D_m \dots D_1$; 则有:

$$(D_i \phi)(x, \gamma) = \begin{cases} 0 & \gamma_i = N_i + 1 \\ \phi(x, \gamma + e_i) - \phi(x, \gamma) & \text{否则} \end{cases} \quad (4)$$

式(1)等价于对箱函数的最优化问题式(2)。极小化式(2)的目标泛函 $F(\phi)$ 关于 $\phi(x, \gamma) = 1_{\{u(x) \geq \gamma\}}$ 是凸的, 但是全体箱函数组成的集合是非凸的, 因此松弛解空间使其为凸, 则使原问题凸化。下面的定理给出了式(2)的松弛解空间, 将箱函数的值域由二值 $\{0, 1\}$ 松弛为区间 $[0, 1]$, 并说明了在一定条件下可以通过式(2)的全局极小解求得式(1)的最优解。

定理 1 设:

$$\tilde{\Gamma} := \{0, 1, \dots, N_i + 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, N_m + 1\}$$

定义 X 为满足下列条件的 $\phi : \Omega \times \tilde{\Gamma} \rightarrow [0, 1]$ 的全体组成的集合:

- 1) $\phi(x, \theta) = 1$;
- 2) 若存在 i 使 $\gamma_i = N_i + 1$, 则 $\phi(x, \gamma_1, \dots, \gamma_m) = 0$;
- 3) $(-1)^m D_{1, \dots, m}^m \phi(x, \gamma) \geq 0$ 。

设 ϕ^* 为 F 在 X 上的一个极小解, 如果 $F(\phi^*) = F(1_{\{\phi^*(x, \gamma) \geq 1\}})$ 成立, 则有:

$$u_i(x) = \sum_{l=1}^{N_i} 1_{\{\phi^* \geq 1\}}(x, le_i) \quad (5)$$

式(5)为式(1)的一个极小解, 其中有:

$$1_{\{\phi^* \geq 1\}}(x, le_i) = 1_{\{\phi^*(x, le_i) \geq 1\}} \quad (6)$$

定理1将原非凸模型的计算问题转化为凸模型的计算问题。但文献[10]对所有的 γ 计算 $\phi^*(x, \gamma)$, 且由于模型形式对算法的限制, 使利用 Arrow-Hurwicz-Uzawa 算法求解的计算代价较高。

事实上, 从式(5)、式(6)可以看出, 不必从凸松弛模型中对所有的 γ 计算 $\phi^*(x, \gamma)$, 只要解得函数 $\phi^*(x, le_i), l = 1, 2, \dots, N_i$, 用 1 阈值, 可得 $1_{\{\phi^*(x, le_i) \geq 1\}}$, 然后对 l 求和即得式(1)极小解的第 i 个分量 $u_i(x)$ 。
 $m = 2, \Gamma = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ 时的情况如图1所示。

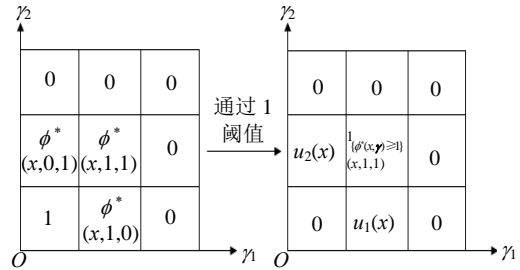


图1 $m = 2, \Gamma = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ 时, 由式(2)的极小解得到式(1)的极小解

2 松弛凸化模型分裂方法

2.1 凸松弛等价模型

设 C_m^k 表示 $\{1, 2, \dots, m\}$ 中任意 k 个元素的组合全体构成的集合, 即有:

$$C_m^k = \left\{ p = (i_1, i_2, \dots, i_k) \mid i_j \in \{1, 2, \dots, m\}, (j = 1, 2, \dots, k) \right\} \quad (7)$$

满足: 1) $i_j \neq i_l, (j \neq l)$; 2) 组合 p 是无序的。当 $\gamma \in \Gamma$ 时, m 阶差分算子 $D_{1, 2, \dots, m}^m$ 可以整理为:

$$D_{1, 2, \dots, m}^m \phi(x, \gamma) = \phi \left(x, \gamma + \sum_{k=1}^m e_k \right) - \sum_{p \in C_m^{m-1}} \phi \left(x, \gamma + \sum_{k=1}^{m-1} e_{p(k)} \right) + \sum_{p \in C_m^{m-2}} \phi \left(x, \gamma + \sum_{k=1}^{m-2} e_{p(k)} \right) - \dots + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^m \phi(x, \gamma + e_k) + (-1)^m \phi(x, \gamma) \quad (8)$$

由于只关心 $\phi(x, le_i), l = 1, 2, \dots, N_i; i = 1, 2, \dots, m$, 将式(2)目标泛函第二项积分号内的部分整理为:

$$\begin{aligned}
(-1)^m \sum_{\gamma \in \Gamma} \rho(x, \gamma) D_{1,2,\dots,m}^m \phi &= (-1)^m \left\{ \begin{aligned} &\rho(x, \mathbf{0}) (-1)^{m-1} \sum_{i=1}^m \phi(x, \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^m \rho(x, \mathbf{e}_i) [(-1)^{m-1} \phi(x, 2\mathbf{e}_i) + (-1)^m \phi(x, \mathbf{e}_i)] + \\ &\sum_{i=1}^m \rho(x, 2\mathbf{e}_i) [(-1)^{m-1} \phi(x, 3\mathbf{e}_i) + (-1)^m \phi(x, 2\mathbf{e}_i)] + \dots + \\ &\sum_{i=1}^m \rho(x, (N_i - 1)\mathbf{e}_i) [(-1)^{m-1} \phi(x, N_i \mathbf{e}_i) + (-1)^m \phi(x, (N_i - 1)\mathbf{e}_i)] + \\ &\sum_{i=1}^m \rho(x, N_i \mathbf{e}_i) (-1)^m \phi(x, N_i \mathbf{e}_i) + \dots \end{aligned} \right\} = \\
&-\rho(x, \mathbf{0}) \sum_{i=1}^m \phi(x, \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{N_i-1} \rho(x, l\mathbf{e}_i) [-\phi(x, (l+1)\mathbf{e}_i) + \phi(x, l\mathbf{e}_i)] + \sum_{i=1}^m \rho(x, N_i \mathbf{e}_i) \phi(x, N_i \mathbf{e}_i) + \dots = \\
&\sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{N_i} [\rho(x, l\mathbf{e}_i) - \rho(x, (l-1)\mathbf{e}_i)] \phi(x, l\mathbf{e}_i) + \dots \quad (9)
\end{aligned}$$

将式(9)代入式(2), 令:

$$r_{il} = \rho(x, l\mathbf{e}_i) - \rho(x, (l-1)\mathbf{e}_i) \quad (10)$$

由于省略号表示的部分与 $\phi(x, l\mathbf{e}_i)$ 无关, 则关于 $\phi(x, l\mathbf{e}_i)$ 求解凸松弛模型(2)等价于:

$$\min_{\{\phi(x, l\mathbf{e}_i)\}_{i=1}^m} F(\phi) = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{N_i} \int_{\Omega} |\nabla \phi(x, l\mathbf{e}_i)| + \mu r_{il} \phi(x, l\mathbf{e}_i) dx \quad (11)$$

对每个 i 和 l , 求解下面的极小化问题:

$$\min_{\phi(x, l\mathbf{e}_i)} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \phi(x, l\mathbf{e}_i)| dx + \mu \int_{\Omega} r_{il} \phi(x, l\mathbf{e}_i) dx \right\} \quad (12)$$

2.2 split-Bregman 迭代求解

对式(12)采用分裂技术, 令 $\mathbf{d}_{il} = \nabla \phi(x, l\mathbf{e}_i)$, 那么式(12)等价于如下约束极小化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\phi(x, l\mathbf{e}_i), \mathbf{d}_{il}} &\left\{ \int_{\Omega} |\mathbf{d}_{il}| dx + \mu \int_{\Omega} r_{il} \phi(x, l\mathbf{e}_i) dx \right\} \\ \text{s.t.} &\quad \mathbf{d}_{il} = \nabla \phi(x, l\mathbf{e}_i) \end{aligned} \quad (13)$$

根据Lagrangian罚方法, 转化为无约束优化问题为:

$$\min_{\phi(x, l\mathbf{e}_i), \mathbf{d}_{il}} \left\{ \int_{\Omega} |\mathbf{d}_{il}| dx + \mu \int_{\Omega} r_{il} \phi(x, l\mathbf{e}_i) dx + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{d}_{il} - \nabla \phi(x, l\mathbf{e}_i)\|^2 \right\} \quad (14)$$

式中, λ 为罚参数。为确保等式约束成立, λ 应该尽可能大, 但当 λ 很大时, 式(14)对 $\phi(x, l\mathbf{e}_i)$ 和 \mathbf{d}_{il} 交替极小化迭代求解的收敛速度很慢。利用Bregman迭代可以解决这一问题, 引入向量 \mathbf{b}_{il} , 对 $p=0, 1, \dots$, split-Bregman迭代为:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{d}_{il}^{p+1}, \phi^{p+1}(x, l\mathbf{e}_i)) = \\ \arg \min_{\mathbf{d}_{il}, \phi(x, l\mathbf{e}_i)} &\left\{ \int_{\Omega} |\mathbf{d}_{il}| dx + \mu \int_{\Omega} r_{il} \phi(x, l\mathbf{e}_i) dx + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{d}_{il} - \nabla \phi(x, l\mathbf{e}_i) - \mathbf{b}_{il}^p\|^2 \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{b}_{il}^{p+1} = \mathbf{b}_{il}^p + \nabla \phi^{p+1}(x, l\mathbf{e}_i) - \mathbf{d}_{il}^{p+1} \quad (16)$$

运用交替极小化方法求解式(15)。

1) 固定 $\mathbf{d}_{il} = \mathbf{d}_{il}^p$, 对 $\phi(x, l\mathbf{e}_i)$ 求极小。由Euler方程可得:

$$\Delta \phi^{p+1}(x, l\mathbf{e}_i) = \frac{\mu}{\lambda} r_{il} + \nabla(\mathbf{d}_{il}^p - \mathbf{b}_{il}^p)$$

式中, Δ 和 ∇ 分别表示拉普拉斯算子和梯度算子。令 (i, j) 表示 x 的离散坐标, 利用高斯-赛德尔迭代方法有:

$$\alpha_{i,j} = d_{i-1,j}^{x,p} - d_{i,j}^{x,p} - b_{i-1,j}^{x,p} + b_{i,j}^{x,p} +$$

$$d_{i,j-1}^{y,p} - d_{i,j}^{y,p} - b_{i,j-1}^{y,p} + b_{i,j}^{y,p}$$

$$\beta_{i,j} = \frac{1}{4} \left(\begin{aligned} &\phi(i-1, j, l\mathbf{e}_i) + \phi(i+1, j, l\mathbf{e}_i) + \phi(i, j-1, l\mathbf{e}_i) + \\ &\phi(i, j+1, l\mathbf{e}_i) - \frac{\mu}{\lambda} r_{il} - \alpha_{i,j} \end{aligned} \right)$$

$$\phi^{p+1}(i, j, l\mathbf{e}_i) = \max\{\min\{\beta_{i,j}, 0\}, 1\} \quad (17)$$

上标中的 x 和 y 分别表示沿水平方向和垂直方向。

2) 固定 $\phi(x, l\mathbf{e}_i) = \phi^{p+1}(x, l\mathbf{e}_i)$, 对 \mathbf{d}_{il} 求极小可得:

$$\mathbf{d}_{il}^{p+1} = \text{shrink}(\mathbf{b}_{il}^p + \nabla \phi^{p+1}(x, l\mathbf{e}_i), 1/\lambda) \quad (18)$$

算法 1 输入: r_{il} ($i=1, 2, \dots, m; l=1, 2, \dots, N_i$), 参数 μ, λ , 初始值 $\phi^0(x, l\mathbf{e}_i) = \mathbf{d}_{il}^0 = \mathbf{b}_{il}^0 = 0$, 误差界 ε , 令 $p=0$, 即有:

1) 由式(17)计算 $\phi^{p+1}(x, l\mathbf{e}_i)$;

2) 由式(18)计算 \mathbf{d}_{il}^{p+1} ;

3) 由式(16)可得 \mathbf{b}_{il}^{p+1} ;

4) 若 $\|\phi^{p+1}(x, l\mathbf{e}_i) - \phi^p(x, l\mathbf{e}_i)\| \leq \varepsilon$, 停止, 输出 $\phi(x, l\mathbf{e}_i) = \phi^{p+1}(x, l\mathbf{e}_i)$; 否则令 $p = p+1$, 返回步骤1)。

3 应用于多相图像分割

3.1 Vese-Chan多相分割

图像分割是将图像区域 Ω 分割为 n 个子区域

$\Omega_k, k=0,1,\dots,n-1$, 满足 $\bigcup_{k=0}^{n-1} \Omega_k = \Omega, \Omega_k \cap \Omega_j = \Theta, k \neq j$ 。根据Vese-Chan多相分割水平集方法^[13-14], 设 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m: \Omega \rightarrow R$ 为 m 个水平集函数, 图像的 $n=2^m$ 个区域的边界通过它们的零水平集表示, 即有: $\bigcup_{k=0}^{n-1} \partial\Omega_k = \bigcup_{i=1}^m \{x \in \Omega: \varphi_i(x) = 0\}$ 。设 $\mathbf{b}(k) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ 为 $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ 的二进表示, $\omega_0(z) = z, \omega_1(z) = 1-z$, 则Vese-Chan极小化问题为:

$$\min_{\varphi_1, \dots, \varphi_m: \Omega \rightarrow R} \left\{ \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} |\nabla H(\varphi_i)| dx + \mu \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Omega} \prod_{i=1}^m \omega_{b_i(k)}(H(\varphi_i))(c_k - I)^2 dx \right\} \quad (19)$$

式中, H 为单位阶跃函数; I 为原始图像。目标泛函的第一项为正则项, 可以写为如下形式 $\sum_{i=1}^m \int_{\Omega} |\nabla H(\varphi_i)| dx = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} |\nabla \varphi_i| \delta(\varphi_i) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial\Omega_k} ds$, 即分割后各子区域边界长度之和; 第二项为数据忠诚项; $\prod_{i=1}^m \omega_{b_i(k)}(H(\varphi_i))$ 为子区域 Ω_k 的特征函数; c_k 为各子区域中像素点的强度均值; μ 用以平衡两项的作用。

对每个 i , 式(19)中目标泛函只依赖于 $H(\varphi_i)$, 设 $u_i = H(\varphi_i)$, 将式(19)改写为:

$$\min_{u_1, \dots, u_m: \Omega \rightarrow \{0,1\}} \left\{ \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} |\nabla u_i| dx + \mu \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Omega} \prod_{i=1}^m \omega_{b_i(k)}(u_i)(c_k - I)^2 dx \right\} \quad (20)$$

令 $\rho(x, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{i=1}^m \omega_{b_i(k)}(u_i)(c_k - I)^2$, 式(20)简写为:

$$\min_{u_1, \dots, u_m: \Omega \rightarrow \{0,1\}} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} |\nabla u_i| dx + \mu \int_{\Omega} \rho(x, \mathbf{u}(x)) dx \quad (21)$$

式(21)符合模型(1)的形式, 且在全体二值函数构成的非凸集合上求解, 因此为一个非凸优化问题。相应的松弛凸化模型分裂算法如下:

算法 2 输入: 原始图像 $I(x)$, 初始值 $u_i^0 (i=1,2,\dots,m)$, 误差界 $\varepsilon, h=0$, 则有:

$$1) \text{ 计算 } c_k^{h+1} = \frac{\int_{\Omega} \prod_{i=1}^m \omega_{b_i(k)}(u_i^h) I(x) dx}{\int_{\Omega} \prod_{i=1}^m \omega_{b_i(k)}(u_i^h) dx}, \quad k=0,1, \dots, n-1;$$

2) 利用算法1求解松弛凸化模型为:

$$\min_{\{\phi(x, \mathbf{e}_i)\}_{i=1}^m} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} |\nabla \phi(x, \mathbf{e}_i)| + \mu r_i \phi(x, \mathbf{e}_i) dx$$

由式(10)可得, $r_i = (c_i^{h+1} - I(x))^2 - (c_{n-1}^{h+1} - I(x))^2$, 解得 $\phi^{h+1}(x, \mathbf{e}_i)$;

3) 式(21)的解为 $u_i^{h+1} = 1_{\{\phi^{h+1}(x, \mathbf{e}_i) \geq 1\}}$;

4) 若 $\|u_i^{h+1} - u_i^h\| \leq \varepsilon$; 停止, 否则令 $h = h+1$, 返回步骤1)。

3.2 基于分片常数水平集函数的Mumford-Shah模型

基于分片常数水平集函数的Mumford-Shah模型^[15]表示为:

$$\min_{u: \Omega \rightarrow \{0,1,\dots,n-1\}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Omega} |\nabla \psi_k(u)| + \mu \psi_k(u) g_k(x) dx \right\} \quad (22)$$

式中, u 为分片常数水平集函数; $x \in \Omega_k$ 时,

$u(x) = k; \psi_k(u) := \prod_{j=0, j \neq k}^{n-1} \frac{(u-j)}{(i-j)}$ 为子区域 Ω_k 的特征

函数; $g_k(x) = (c_k - I(x))^2; c_k$ 为各子区域中像素点的强度均值; Ω_k 的边界长度为 $\partial\Omega_k = \int_{\Omega} |\nabla \psi_k| dx$ 。因此, 式(22)中目标泛函的第一项为边界长度项, 第二项为数据忠诚项, μ 用以平衡两项的作用。

设 $v_k = \psi_k(u)$, 式(22)转化成关于 v_k 的极小化问题为:

$$\min_{v_0, \dots, v_{n-1}: \Omega \rightarrow \{0,1\}, \sum_{k=0}^{n-1} v_k = 1} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Omega} |\nabla v_k| + \mu v_k g_k(x) dx \right\} \quad (23)$$

利用增广Lagrangian方法有:

$$\min_{v_0, \dots, v_{n-1}: \Omega \rightarrow \{0,1\}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Omega} |\nabla v_k| + \mu v_k g_k(x) dx + \int_{\Omega} \chi \left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k - 1 \right) dx + \gamma \int_{\Omega} \left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k - 1 \right)^2 dx \right\} \quad (24)$$

式中, χ 为Lagrangian乘子; $\gamma > 0$ 为罚参数。令:

$$\rho(x, \mathbf{v}) = \mu \sum_{k=0}^{n-1} v_k g_k(x) + \chi \left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k - 1 \right) + \gamma \left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k - 1 \right)^2,$$

可将式(24)简写为:

$$\min_{v_0, \dots, v_{n-1}: \Omega \rightarrow \{0,1\}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Omega} |\nabla v_k| dx + \int_{\Omega} \rho(x, \mathbf{v}(x)) dx \quad (25)$$

式(25)具有模型(1)的形式, 且同样是在全体二值函数组成的非凸集合上求解。相应的松弛凸化模型分裂算法如下。

算法 3 输入: 原始图像 $I(x)$, 初始值 $c_k^0 (k=0,1,\dots,n-1), \chi^0$, 误差界 $\varepsilon, h=0$ 。

1) 利用算法1求解松弛凸化模型为:

$$\min_{\{\phi(x, \mathbf{e}_{k+1})\} \subset X} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Omega} |\nabla \phi(x, \mathbf{e}_{k+1})| + r_{k+1} \phi(x, \mathbf{e}_{k+1}) dx$$

由式(10)可得, $r_{k+1} = \mu(c_k^h - I(x))^2 + \chi^h - \gamma$, 解得 $\phi^h(x, \mathbf{e}_{k+1})$;

2) 式(23)的解为 $v_k^h = 1_{\{\phi^h(x, \mathbf{e}_{k+1}) \geq 1\}}$;

3) 计算 $c_k^{h+1} = \frac{\int_{\Omega} v_k^h I(x) dx}{\int_{\Omega} v_k^h dx}$;

4) $\chi^{h+1} = \chi^h + \tau \left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k^h - 1 \right)$;

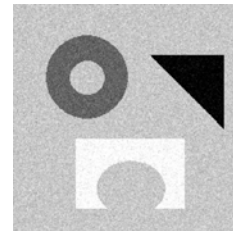
5) 若 $\|c_k^{h+1} - c_k^h\| \leq \varepsilon$, 停止; 否则令 $h = h + 1$, 返回步骤1)。

4 数值实验

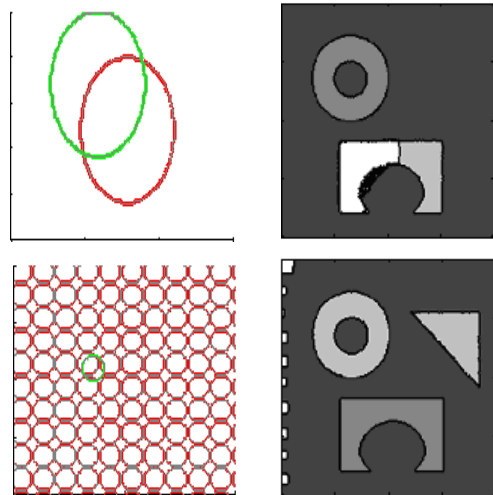
本文的数值实验所用的计算机系统为Microsoft Windows 7, 处理器Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU P7350 @ 2.00 Hz, 内存2.00 GB, 编程软件 Matlab 7.0。算法2和算法3中参数均选为取得较好分割结果时的值, 经过多次实验, 算法2中参数选为 $\lambda = 20$, $\mu = 10$; 算法3中参数 $\lambda = 1$, $\mu = 0.01$ 。各算法的迭代次数都选为出现最好分割结果的最小次数, 算法1只进行一次交替极小化的迭代过程, 算法2外迭代5次, 算法3外迭代1次。

图2所示为利用Vese-Chan算法、graph cuts算法以及算法2和算法3对一幅合成图像分割的结果比较。图2a所示为原始图像, 尺寸200×200, 4个区域的灰度值分别为0、100、200、255, 其中添加了标准差为5的高斯白噪声。图2b所示为经典Vese-Chan算法的分割结果, 在第一幅图所示的初始条件下, Vese-Chan算法收敛到局部极小解^[14], 导致分割结果不准确, 如第二幅图所示。若改为第三幅图所示的初始条件, 结果如第四幅图所示, 得到了原始图像的准确分割, 表明Vese-Chan算法的分割结果与初始条件有关。图2c所示的第一幅图为graph cuts算法的分割结果, 其余为各个子区域的特征函数, 利用k-means算法得到各子区域强度均值的初始值, graph cuts算法能实现对原始图像的准确分割。图2d的第一幅图为算法2的分割的结果, 利用图2b的第一幅图所示的初始条件, 原始图像被分为3个子区域, 灰度均值分别为255.099 8、61.550 8、199.996 7, 其中黑色边界和白色边界分别为初始条件中两条曲线演化的结果, 第二幅图和第三幅图分别为单位阶跃函数 u_1 、

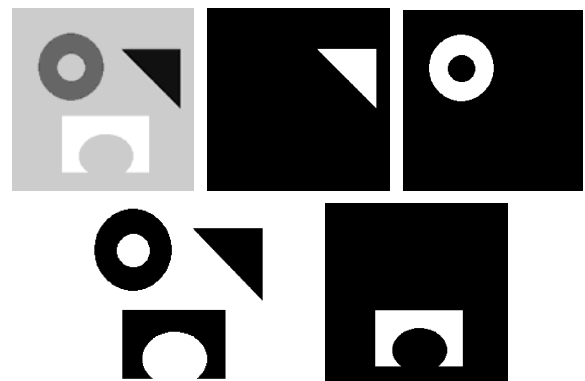
u_2 。实验证明, 在图2b给出的两个初始条件下, 算法2都能得到原始图像的准确分割。图2e的第一幅图为算法3的分割结果, 将原始图像分割为4个子区域, 灰度均值分别为-0.139 2、99.980 2、199.996 7、255.099 8, 其余为分割后4个子区域的特征函数 v_0 、 v_1 、 v_2 、 v_3 , 算法中各区域强度的初始均值同样通过k-means算法计算得到。算法3也能得到原始图像的准确分割。



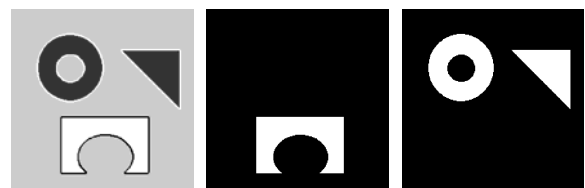
a. 原始图像



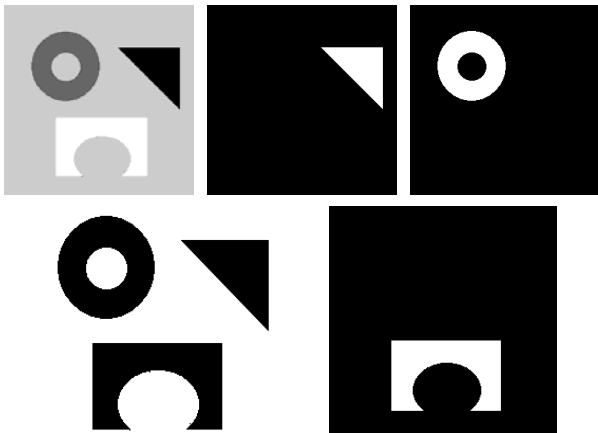
b. Vese-Chan算法分割结果



c. graph cuts算法分割结果



d. 算法2分割结果

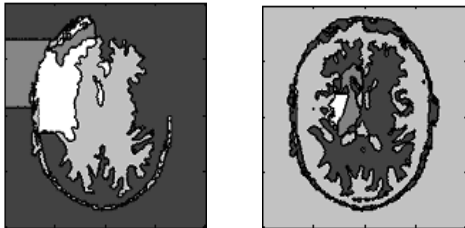


e. 算法3分割结果

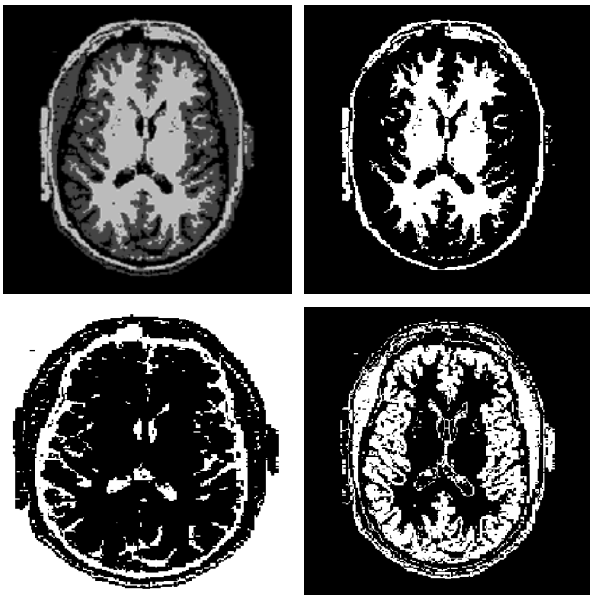
图2 合成图像分割结果比较



a. 原始图像



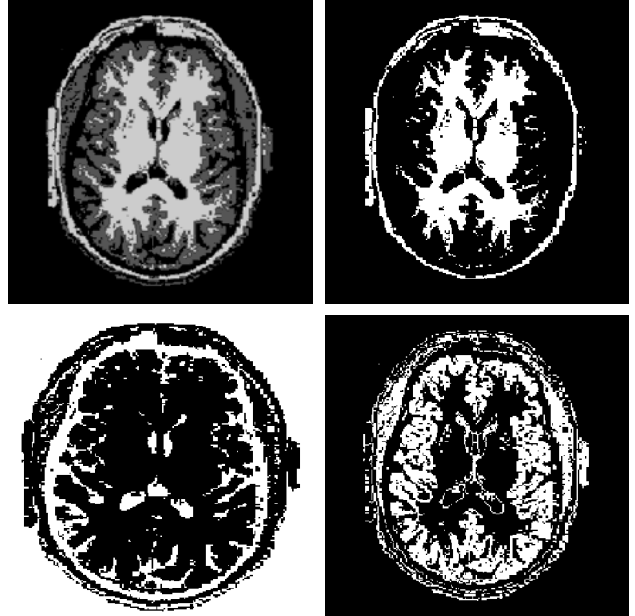
b. Vese-Chan 算法分割结果



c. graph cuts算法分割结果



d. 算法2分割结果



e. 算法3分割结果

图3 医学图像分割结果比较

图3所示为利用上述各算法分割一幅医学图像的结果比较。图3a所示为原始医学图像, 图3b所示的第一幅图为在图2b的第一个初始条件下利用Vese-Chan算法的分割结果, 得不到准确的分割。若改为第二个初始条件, 结果如第二幅图所示, 分割结果有所改善, 但仍不准确。graph cuts算法的分割结果如图3c所示, 图3d所示为算法2的分割结果, 选用图2b的第一个初始条件, 算法3的分割结果如图3e所示。可以看出, 本文的方法和graph cuts算法能得到原始图像的准确分割。

表1给出了各种方法分割合成图像和医学图像的运算时间比较, 其中, Vese-Chan算法是在图2b的第二个初始条件下的运算时间。虽然上述实验表明, 本文方法和graph cuts算法都能得到原始图像的准确分割, 但从表1可以看出, 本文方法的分割效率比graph cuts算法高; Vese-Chan算法的分割效率最低。

表1 各算法运算时间比较

	Vese-Chan算法/s	graph cuts/s	算法2/s	算法3/s
合成图像	124.426	56.703	7.425	3.853
医学图像	156.609	63.498	7.488	4.009

5 结 论

本文研究了一类向量值极小化问题的凸松弛方法, 给出一个一般性等价模型。该模型可以利用split Bregman迭代算法求解, 使运算效率大大提高。应用于Vese-Chan多相分割方法和基于分片常数水平集函数的Mumford-Shah方法, 数值实验表明, 本文的方法运算速度快, 分割效果好, 且不依赖于初始条件。对本文的模型更深入的理论研究还需在今后的工作中继续进行。

参 考 文 献

- [1] GOLDSTEIN T, BRESSON X. Geometric application of the split Bregman method: Segmentation and surface reconstruction[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2009, 45(1-3): 272-293.
- [2] KASS W, WITKIN A, TERZOPOULOS D. Snakes: Active contour models[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2004, 1(4): 312-331.
- [3] CHAN T, VESE L. Active contours without edges[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001(10): 266-277.
- [4] GOLDSTEIN T, OSHER S. The split Bregman algorithm for L_1 regularized problems[J]. *SIAM J on Imaging Sciences*, 2009, 2(2): 323-343.
- [5] YIN W, WANG Y, YANG J, et al. A new alternating minimization algorithm for total variation image reconstruction[J]. *SIAM Journal Imaging Sciences*, 2008, 1(3): 248-272.
- [6] YIN W, OSHER S, GOLDFARB D, et al. Bregman iterative algorithms for l_1 -minimization with applications to compressed sensing[J]. *SIAM J on Imaging Sciences*, 2008, 1(1): 142-168.
- [7] BAE E, TAI X C. Efficient global optimization for the multiphase Chan-Vese model of image segmentation by graph cuts[J]. *EMMCVPR, Lecture Notes in Computer Sciences*, 2009(5681): 28-41.
- [8] KOMODAKIS N, TZIRITAS G, PARAGIOS N. Fast, approximately optimal solutions for single and dynamic MRFs[C]//*IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Minneapolis, MN: IEEE, 2007.
- [9] TAI X C, DUAN Y P. Domain decomposition methods with graph cuts algorithm for image segmentation[J]. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 2011, 8(1): 137-155.
- [10] BROWN E S, CHAN T, BRESSON X. A convex relaxation method for a class of vector-valued minimization problems with applications to Mumford-Shah segmentation[R/OL]. [2010-03-20]. <ftp://ftp.math.ucla.edu/pub/camreport/cam10-43.pdf>.
- [11] ARROW K J, HURWICZ L, UZAWA H. *Studies in linear and non-linear programming*[M]. Vol II. Stanford, Calif, USA: Stanford University Press, 1958.
- [12] POPOV L D. A modification of the arrow-hurwitz method of search for saddle points[J]. *Mathematics Zametki*, 1980, 28(5): 777-784.
- [13] MUMFORD D, SHAH J. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1989(42): 577-685.
- [14] VESE L A, CHAN T F. A multiphase level set framework for image segmentation using the Mumford and Shah model[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2001(50): 271-293.
- [15] LIE J, LYSAKER M, TAI X C. A variant of the level set method and applications to image segmentation[J]. *Mathematics of Computation*, 2006, 75(255): 1155-1174.

编辑 黄 莘