

基于FOCUSS算法的稀疏阵列综合

杨鹏¹, 闫飞¹, 张胜辉², 杨峰¹

(1. 电子科技大学电子工程学院 成都 611731; 2. 航天恒星科技有限公司 北京 海淀区 100086)

【摘要】以最大稀疏化阵列得到所期望的方向图是稀疏阵列综合理论中的关键问题。由于阵列天线本身具有稀疏的物理特性,因此可将稀疏阵列综合归结为稀疏信号的重建过程。该文提出一种将阵列天线的波束形成问题等效为求解稀疏信号向量的最优化问题的方法,并利用FOCUSS算法快速准确地得到最大稀疏化的阵列,以及阵元位置和激励幅度。理论分析和数值仿真表明了该方法的有效性。

关键词 阵列综合; FOCUSS算法; 稀疏阵列; 稀疏信号重建

中图分类号 TN821+.91

文献标志码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2014.02.008

Sparse Array Synthesis Based on FOCUSS Algorithm

YANG Peng¹, YAN Fei¹, ZHANG Sheng-hui², and YANG Feng¹

(1. School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 611731;

2. Space Star Technology Co. Ltd. Haidian Beijing 100086)

Abstract The use of maximally sparse array to achieve the desired radiation pattern is a key problem in sparse array synthesis theory. Since the array antenna has intrinsic character of sparsity, the sparse array synthesis problem can be seen as a process of sparse signal reconstruction. In this paper, the problem of beamforming with antenna array is proved to be the same as the optimization problem of solving sparse signal vector. By using the focal undetermined system solver (FOCUSS) algorithm, maximally sparse array as well as the elements' locations and amplitudes are achieved quickly and accurately. The efficiency of this method is proved by theoretical analyses and numerical simulations.

Key words array synthesis; FOCUSS algorithm; sparse array; sparse signal reconstruction

很多应用(如射电天文望远镜)要求阵列天线的方向图具有较窄的主瓣宽度,而对增益的要求不高,这类应用可以采用在阵列口径范围内稀疏布置阵元来实现^[1]。同时,较少的阵元数表明系统成本的减少和软硬件复杂度的降低。此外,由于阵元间距往往大于半波长,阵元间的互耦变得很弱,使天线单元的阻抗和方向图受互耦影响很小。正是由于稀疏阵列具有上述优点,因此一直是阵列天线研究的热点。稀疏阵列设计目的是利用尽可能少的阵元数来获得期望的方向图,由于阵元稀疏,往往会使方向图的副瓣电平提高。因此,在保持较低的副瓣电平和一定的主瓣形状的同时,如何使阵列最大稀疏化,一直以来都是研究的重点和难点。

由于阵元的非均匀布置将导致复杂的非线性优化问题,故采取按均匀间隔阵列稀疏化设计的方式可以大大简化设计过程,其做法是简单地从均匀间

隔阵列中抽掉部分阵元,自然地形成了阵元间距约束为某个基本量的整数倍的非均匀阵列。随着计算机技术和智能算法的发展,基于计算机的智能优化方法非常适合求解此类问题。这些方法包括遗传算法(genetic algorithm, GA)^[2]、差分进化算法(differential evolution algorithm, DE)^[3]、粒子群优化算法(particle swarm optimization, PSO)^[4]等。基于矩阵束的高效方法(matrix pencil method, MPM)^[5-6]在收敛速度和精度方面都表现出了较好的性能。

稀疏信号理论已经广泛应用于阵列信号处理中,如基于稀疏信号重建的脑电磁源定位、核磁共振成像以及来波方向估计等,由于天线阵元在空间上分布是离散、稀疏的,因此,天线阵列综合问题本质上属于稀疏信号重建的过程。近年来,已有学者开始研究基于贝叶斯压缩采样(Bayesian compressive sampling, BCS)的阵列综合方法^[7-8]。这

收稿日期: 2013-02-20; 修回日期: 2013-04-23

项目基金: 国家自然科学基金(61301056, 61231011, 11176007); 高等学校学科创新引智计划(B07046); 中央高校基本科研业务费专项资金(ZYGX2012J010); 教育部博士点基金(2012018520004)

作者简介: 杨鹏(1978-), 男, 博士, 主要从事共形天线和自适应天线方面的研究。

类方法具有计算量少、能够以较少的迭代次数收敛到稀疏解的特点。然而,这类方法往往需要预先知道信号源数(或天线阵元个数);此外,在处理复数问题时,计算效率远不如实数问题。

本文首先将稀疏阵列综合问题等效为稀疏信号问题,然后利用欠定系统局域解法(focal undetermined system solver, FOCUSS)对该问题进行高效求解。该方法可以在一定的误差允许范围内,自动获得最大稀疏阵列,同时给出各阵元的位置和激励幅度,并且可以处理实数和复数问题。

1 问题描述

1.1 阵列模型

考虑一个由 N 个全向阵元组成的均匀直线阵,阵元间距为 d (通常为半波长),阵列口径为 $D = (N-1)d$,则期望的阵列方向图可以表示为:

$$F_d(\theta) = \sum_{n=1}^N w_n \exp[ik_0(n-1)d \sin \theta] \quad (1)$$

式中, w_n 表示第 n 个阵元的激励; θ 表示波束指向与阵列法线的夹角; $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ 表示信号波长。假设有 M 个虚拟的天线单元($M \gg N$),阵元间距为 Δd ,均匀分布在口径 D 内,则由这 M 个虚拟的天线单元形成的阵列方向图为:

$$F(\theta) = \sum_{m=1}^M w_m \exp[ik_0(m-1)\Delta d \sin \theta] \quad (2)$$

当然,并不是所有的 M 个阵元都需要被激励,若第 m 个阵元的激励为零,即 $w_m = 0$,则等效于在该位置没有天线。现在需要寻求一组最优权值 $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T$,使综合出的阵列方向图 $\mathbf{F} = [F(\theta_1), F(\theta_2), \dots, F(\theta_J)]^T$ 在 J 个方向上(通常情况下 $J < M$)尽可能地与期望的阵列方向图 $\mathbf{F}_d = [F_d(\theta_1), F_d(\theta_2), \dots, F_d(\theta_J)]^T$ 相同,并且希望 \mathbf{w} 尽可能的稀疏,即 \mathbf{w} 中绝大多数元素为零。该问题等效为:

$$\min \|\mathbf{w}\|_2 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{F} - \mathbf{F}_d\|_2 = \|\mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{F}_d\|_2 \leq \varepsilon \quad (3)$$

式中, \mathbf{A} 是一个 $J \times M$ 的复矩阵,它的第 (j, m) 个元素为 $[\mathbf{A}]_{jm} = \exp[ik_0(m-1)\Delta d \sin \theta_j]$; $\|\cdot\|_2$ 表示2范数,即 $\|\mathbf{w}\|_2 = (\sum_i w_i^2)^{1/2}$; ε 表示误差。

由于 $J < M$,即未知量个数大于方程组个数,因此线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{F}_d$ 是欠定的,但由于有使 $\|\mathbf{w}\|_2$ 最小的约束条件,该方程的解是唯一的,可以表示为:

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}^+ \mathbf{F}_d \quad (4)$$

式中,符号“+”表示 Moore-Penrose 伪逆; $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1} \mathbf{A}^H$,符号“H”表示共轭转置。

虽然利用式(4)来计算权值具有较小的运算量,并且可以得到所期望的方向图,但这个解倾向与将能量分散到 \mathbf{w} 的各个分量中,而不是集中到少量的几个元素,即 \mathbf{w} 并不是稀疏的,而是含有较多的非零元素,违背了利用较少的阵元获得期望方向图的初衷。

1.2 FOCUSS算法

为了克服上述解中能量不集中的问题,可以采用 FOCUSS 算法^[9-10]进行求解。FOCUSS 算法本质上属于一种加权最小范数最小二乘法,通过对目标函数进行加权处理,采用迭代的方法逐步得到稀疏解。首先利用一个权矩阵 \mathbf{W} ,将式(4)的解变为:

$$\mathbf{w} = \mathbf{W}(\mathbf{A}\mathbf{W})^+ \mathbf{F}_d = \mathbf{W}\mathbf{q} \quad (5)$$

其中,

$$\mathbf{q} = (\mathbf{A}\mathbf{W})^+ \mathbf{F}_d = \mathbf{W}^+ \mathbf{w} \quad (6)$$

则关于 \mathbf{w} 的稀疏解问题可以转化为关于 \mathbf{q} 的稀疏解问题,即:

$$\min \|\mathbf{q}\|_2 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{q} - \mathbf{F}_d\|_2 = 0 \quad (7)$$

FOCUSS 算法是利用迭代方法对式(7)进行求解的。基本的 FOCUSS 算法由以下步骤构成:

$$1) \quad \mathbf{W}^{k+1} = \text{diag}(\mathbf{w}^k) \quad (8)$$

$$2) \quad \mathbf{q}^{k+1} = (\mathbf{A}\mathbf{W}^{k+1})^+ \mathbf{F}_d \quad (9)$$

$$3) \quad \mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{W}^{k+1} \mathbf{q}^{k+1} \quad (10)$$

式中,上标表示迭代次数。在实际应用过程中,为了保证数值稳定性,一般不会对步骤2)中的 $\mathbf{A}\mathbf{W}^{k+1}$ 直接求逆,而是通过求解下式来获得 \mathbf{q}^{k+1} :

$$\min_{\mathbf{q}} \|\mathbf{A}\mathbf{W}^{k+1} \mathbf{q} - \mathbf{F}_d\|_2 + \gamma \|\mathbf{q}\|_p \quad (11)$$

式中, γ 为正则化参数; $0 < p \leq 1$ 。

在第 $k+1$ 次迭代中,由于 \mathbf{W}^{k+1} 中的每一个分量由前一次迭代值 \mathbf{w}^k 中对应的分量构成,因此 \mathbf{W}^{k+1} 中较大的元素将降低 \mathbf{w}^{k+1} 中对应分量的贡献,这样可保证使 $\|\mathbf{q}\|_2$ 达到最小值的目标,即有:

$$\|\mathbf{q}^{k+1}\|_2 = \|(\mathbf{W}^{k+1})^+ \mathbf{w}^{k+1}\|_2 = \sum_{m=1, W_m \neq 0}^M \left(\frac{w_m^{k+1}}{w_m^k} \right)^2 \quad (12)$$

如果矩阵 \mathbf{A} 中的某一个列向量相对于其他向量更接近于 \mathbf{F}_d ,则 \mathbf{w} 中对应的分量将会在迭代过程中越来越大;反之,小的分量在逐步迭代过程中越来越小,直到趋近于零。FOCUSS 算法并不是简单地对少数初始的大分量进行增强,除非这些分量可以形成有效解。通常情况下,最终解中的非零分量不一定是初始值中的大分量。

2 数值仿真

2.1 -30 dB切比雪夫方向图

设期望的阵列方向图为-30 dB等副瓣电平 的切比雪夫方向图, 由 $N = 20$ 个间距为半波长的无方向性点源构成, 即阵列孔径 $D = 9.5\lambda$ 。为了利用上述方法, 设虚拟阵元的间距 $\Delta d = 0.01\lambda$, 对期望方向图的空间采样间隔为 5° (即 $J = 37$)。

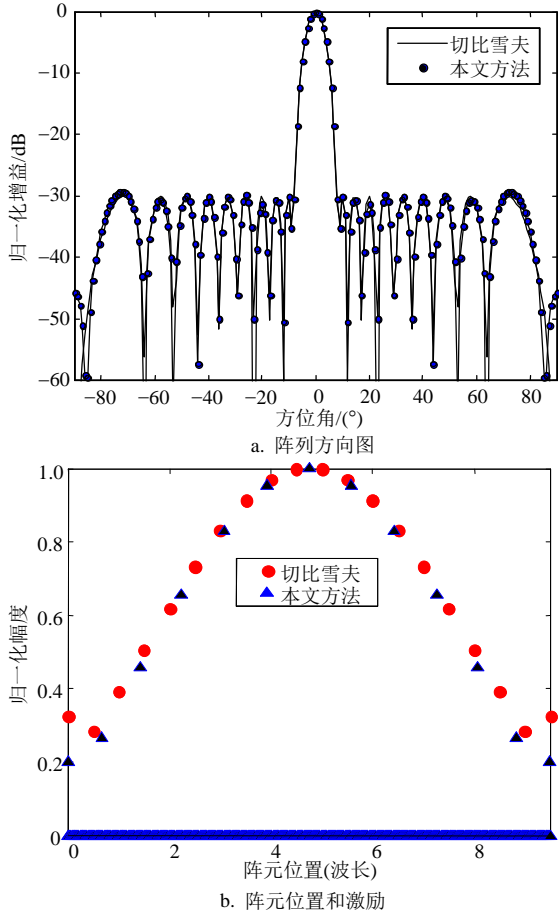


图1 -30 dB切比雪夫阵综合

图1a为20元切比雪夫阵列和利用本文方法得到的阵列方向图对比, 可见二者吻合得很好。图1b是二者的阵元位置和激励。从图中可以看出, 除13个阵元的激励不为零外, 其余都为零。因此, 运用本文方法, 仅仅需要13个阵元就可以得到和20个等间距排布的阵元相同的方向图。而整个运算过程仅需要约0.5 s (CPU 3.0 GHz, 8 GB RAM, Matlab 2010a)。相比文献[7]中基于BCS的方法, 本文的方法具有更大的稀疏度和更优的结果。

2.2 -25 dB修正泰勒方向图

在第二个例子中, 期望方向图为 $N = 29$ 个间距为半波长的无方向性点源构成的-25 dB修正泰勒方向图, 阵列口径 $D = 14\lambda$ 。虚拟阵元的间距

$\Delta d = 0.01\lambda$, 对期望方向图的空间采样间隔为 3° (即 $J = 61$)。图2a为29元修正泰勒阵列和利用本文的方法得到的阵列方向图对比, 图2b是二者的阵元位置和激励。由图可以看出, 仅需要18个阵元就可以得到所期望的方向图。整个运算过程仅需要约1.7 s。

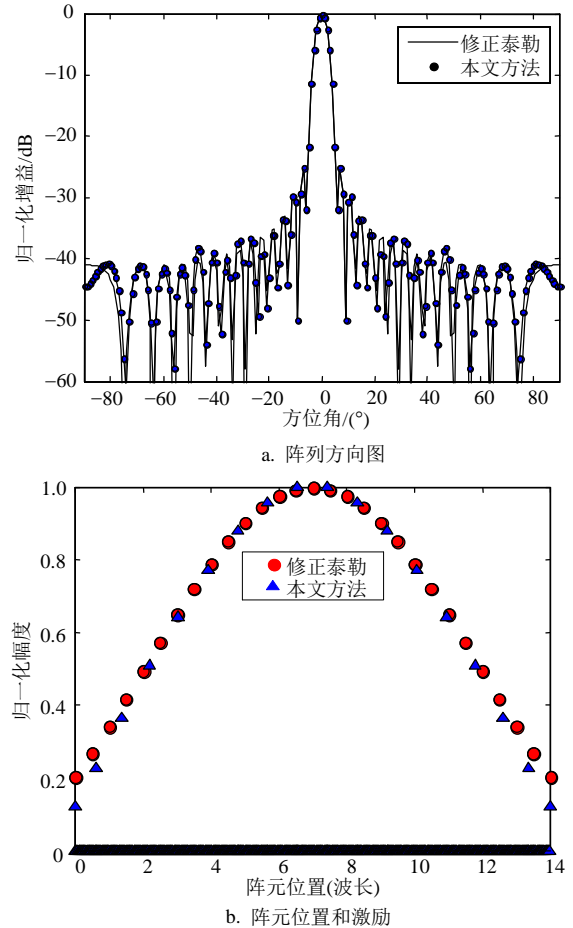


图2 -25 dB修正泰勒阵综合

2.3 -20 dB非对称余割平方方向图

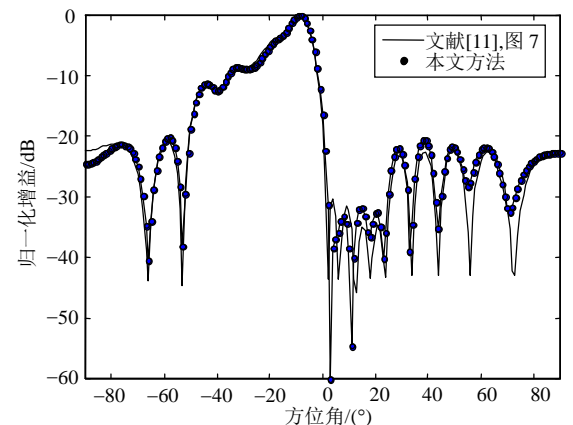


图3 -20 dB余割平方方向图综合

在该例中, 期望方向图为由 $N = 16$ 个间距为半波长的无方向性点源构成的余割平方方向图, 如文献[11]中图7所示。设虚拟阵元的间距 $\Delta d = 0.01\lambda$,

对期望方向图的空间采样间隔为 6° (即 $J = 31$)。图3为二者方向图对比,可见在主瓣区域吻合较好,在副瓣较低的区间,结果有一定的误差,但需要指出的是本文的方法仅使用了12个阵元,整个运算过程耗时约0.3 s。

3 结 论

本文提出了一种基于稀疏信号重建理论的阵列综合方法。首先将阵列综合问题等效为一个求解约束欠定线性方程组的问题,然后利用FOCUSS算法通过迭代求解出该问题的最大稀疏解,该解即为稀疏天线阵元的位置和激励幅度。理论分析和仿真结果表明,该方法能够以较大的稀疏度获得所期望的方向图,同时具有运算量小、收敛快的特点。

参 考 文 献

- [1] MAILLOUX R J. Phased array antenna handbook[M]. 2nd ed. Norwood, MA: Artech House, 2005.
- [2] CHEN K, YUN X, HE Z, et al. Synthesis of sparse planar arrays using modified real genetic algorithm[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2007, 55(4): 1067-1073.
- [3] CHEN Y, YANG S, NIE Z. The application of a modified differential evolution strategy to some array pattern synthesis problems[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2008, 56(7): 1919-1927.
- [4] LI Y, YANG F, OUYANG J. Synthesis of nonuniform array antennas using particle swarm optimization[J]. Electromagnetics, 2010, 30(3): 237-245.
- [5] LIU Y, NIE Z, LIU Q. Reducing the number of elements in a linear antenna array by the matrix pencil method[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2008, 56(9): 2955-2962.
- [6] LIU Y, LIU Q, NIE Z. Reducing the number of elements in the synthesis of shaped-beam patterns by the forward-backward matrix pencil method[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2010, 58(2): 604-608.
- [7] XHANG W, LI L, LI F. Reducing the number of elements in linear and planar antenna arrays with sparseness constrained optimization[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2011, 59(8): 3106-3111.
- [8] OLIVERI G, MASSA A. Bayesian compressive sampling for pattern synthesis with maximally sparse non-uniform linear array[J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2011, 59(2): 467-481.
- [9] GORODNITSKY I F, RAO B D. Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS: a re-weighted minimum norm algorithm[J]. IEEE Trans Signal Process, 1997, 45(3): 600-616.
- [10] COTTER S F, RAO B D, ENGAN K, et al. Sparse solution to linear inverse problems with multiple measurement vectors[J]. IEEE Trans Signal Process, 2005, 53(7): 2477-2488.
- [11] MARCANO D, DURAN F. Synthesis of antenna arrays using genetic algorithms[J]. IEEE Trans Antennas Propag Mag, 2000, 42(3): 12-22.

编辑 黄 莘