

原子玻色-爱因斯坦凝聚与单模光场相互作用系统的保真度

李明

(桂林理工大学理学院 广西 桂林 541004)

【摘要】利用格子液体方法对二能级原子玻色-爱因斯坦凝聚与单模光场相互作用系统的哈密顿量进行了改进,并且研究了初始光场的平均光子数、光场与原子间的相互作用强度,以及光场的圆频率对二能级原子玻色-爱因斯坦凝聚与单模光场相互作用系统的量子态保真度的影响。结果表明,二能级原子玻色-爱因斯坦凝聚单模光场系统的保真度呈现崩塌回复现象,初始光场的平均光子数越小,系统的保真度越好;光场和原子间的相互作用强度和光场的圆频率对系统的保真度没有明显的影响。

关键词 玻色-爱因斯坦凝聚; 保真度; 单模光场; 二能级原子

中图分类号 O431

文献标志码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2014.04.012

Fidelity of Quantum State for Interacting System of Atomic Bose-Einstein Condensate and Single-Mode Light Field

LI Ming

(College of Science, Guilin University of Technology Guilin Guangxi 541004)

Abstract The Hamiltonian operator of a system of two-level atomic Bose-Einstein condensate interacting with single-mode squeezed coherent light field is improved in terms of the lattice-liquid model. The influence on the fidelity of quantum state of the system from the average photon number of the initial light field, the interaction intensity between light field and atoms, and the circular frequency of the light field is studied. The results show that the fidelity of the system presents a collapse-revert phenomenon. The smaller average photon number of the initial light field, the better the fidelity of the system; the interaction intensity between light field and atoms and the circular frequency of the light field have no obvious influence on the fidelity of the system.

Key words Bose-Einstein condensate; fidelity; single-mode light field; two-level atoms

1995年,自美国物理学家发现玻色-爱因斯坦凝聚^[1-3](简称BEC)现象以来,人们以极大的兴趣对BEC的产生和原子BEC与光场相互作用进行了大量的理论和实验研究,取得了一系列研究成果^[4-12]。原子BEC体具有隧穿、宏观相干和量子超流性等奇异特性,在原子钟、原子激光、原子芯片技术、量子计算机和纳米技术等领域都有重要的学术价值和潜在应用前景。

保真度是用来描述信息在传输过程中保持原来状态程度一个重要概念。近年来,它作为一个重要的物理参数,在量子光学和信息科学领域中有广泛的应用,如量子密码、量子隐形传态理论中的保真度等^[13-14]。而量子态的保真度是值得探讨的问题,它涉及到量子计算的可靠性和量子通信的失真度,已成为量子计算和量子通信领域的一个热门问题。

本文在文献[15]的基础上,利用格子液体方法对

二能级原子BEC与单模光场相互作用系统的哈密顿量进行了改进,并且研究了二能级原子BEC单模光场系统的量子态保真度。结果表明,系统的保真度呈现崩塌回复现象,初始光场的平均光子数光场越小,保真效果越好;光场和原子间的相互作用强度和光场的圆频率对系统的保真度没有明显影响。

1 改进的模型和求解

根据文献[16]的分析,对文献[15]中的哈密顿量进行改进,得到改进后的哈密顿量为:

$$H = (\omega_0 + u_0)b^+b + \omega a^+a + \varepsilon\sqrt{N_0}(a^+be^{i\theta} + ab^+e^{-i\theta}) + u_0N_0/2 \quad (1)$$

系统的Heisenberg运动方程为:

$$i\dot{a} = [a, H] = \omega a + \varepsilon\sqrt{N_0}be^{i\theta} \quad (2)$$

$$i\dot{b} = [b, H] = \varepsilon\sqrt{N_0}ae^{-i\theta} + (\omega_0 + u_0)b \quad (3)$$

在共振条件($\omega = \omega_0$)下, 求解Heisenberg运动方程, 可得:

$$a(t) = \alpha_a(t)a(0) + \beta_a(t)b(0) \quad (4)$$

$$b(t) = \alpha_b(t)a(0) + \beta_b(t)b(0) \quad (5)$$

其中

$$\alpha_a(t) = (1/\gamma) \exp[-i(\omega + u_0/2)t] \times [\gamma \cos(\gamma t) + iu_0/2 \sin(\gamma t)] \quad (6)$$

$$\beta_a(t) = -i\sqrt{N_0}\varepsilon(1/\gamma) \exp[-i(\omega + u_0/2)t] \sin(\gamma t) e^{i\theta} \quad (7)$$

$$\alpha_b(t) = -i\sqrt{N_0}\varepsilon(1/\gamma) \exp[-i(\omega + u_0/2)t] \sin(\gamma t) e^{-i\theta} \quad (8)$$

$$\beta_b(t) = (1/\gamma) \exp[-i(\omega + u_0/2)t] \times [\gamma \cos(\gamma t) - iu_0/2 \sin(\gamma t)] \quad (9)$$

式中, $\gamma = \sqrt{u_0^2/4 + N_0\varepsilon^2}$ 。

假设初始时刻所有原子均处于基态并发生BEC。系统的初始态矢可表示为:

$$|\psi(0)\rangle = |\beta\rangle_g \otimes |0\rangle_e \otimes |\alpha\rangle_f \equiv |\beta, 0, \alpha\rangle \quad (10)$$

式中, $|\beta\rangle_g$ 为原子基态湮没算符 b 的本征态, 即 $b|\beta\rangle_g = \sqrt{N_0}e^{-i\theta}|\beta\rangle_g$; n_0 为初始光场的平均光子数。原子的激发态为真空态 $|0\rangle_e$, 而光场处于相干态 $|\alpha\rangle_f$, $|\alpha\rangle_f = D(\alpha)|0\rangle_f$, $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$, $\alpha = \sqrt{n_0}e^{i\theta}$ 。

任意时刻系统的态矢可表示为:

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle \quad (11)$$

式中, $U(t) = \exp(-iHt)$ 。

由式(10)和式(11)可以得出系统的密度算符 $\rho(0)$ 和 $\rho(t)$, 其表达式如下:

$$\rho(0) = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)| = \exp(-|\alpha|^2) \times \sum_{m,n} \frac{\alpha^n (\alpha^*)^m}{\sqrt{m!n!}} |\beta, 0, n\rangle\langle\beta, 0, m| \quad (12)$$

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \exp(-|\alpha\beta_a^*(-t)|^2 - |\alpha\alpha_a^*(-t)|^2) \sum_{m',n',M',N'} \frac{1}{\sqrt{m'!n'!}\sqrt{M'!N'!}} \times [\alpha\alpha_a^*(-t)]^{m'} [\alpha^*\alpha_a(-t)]^m [\alpha\beta_a^*(-t)]^{N'} \times [\alpha^*\beta_a(-t)]^{M'} |\beta, N', n'\rangle\langle\beta, M', m'| \quad (13)$$

光场和BEC的密度算符也可以分别表示为 ρ_f 和 ρ_b , 即:

$$\begin{cases} \rho_f = Tr_b \rho \\ \rho_b = Tr_f \rho \end{cases} \quad (14)$$

2 保真度的演化

系统、光场和BEC原子的保真度分别用 F_s 、 F_f 和 F_b 来表示, 并分别定义为:

$$\begin{cases} F_s = Tr\{\rho(0)\rho(t)\} \\ F_f = Tr\{\rho_f(0)\rho_f(t)\} \\ F_b = Tr\{\rho_b(0)\rho_b(t)\} \end{cases} \quad (15)$$

利用式(12)~式(15), 可以得到:

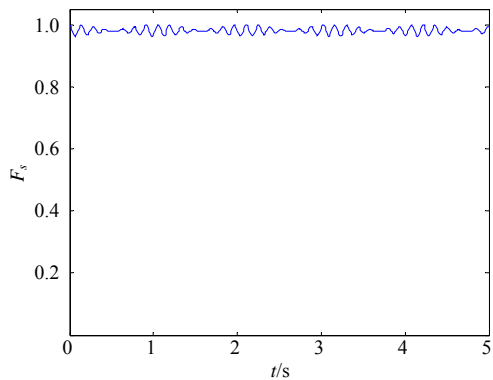
$$F_s = \exp\{-n_0[1 + N_0\varepsilon^2/\gamma^2 \sin^2 \gamma t + \cos^2 \gamma t + u_0^2/(4\gamma^2) \sin^2 \gamma t - 2 \cos(\omega + u_0/2)t \cos \gamma t - u_0/\gamma \sin(\omega + u_0/2)t \sin \gamma t]\} \quad (16)$$

$$F_f = \exp\{-n_0[1 + \cos^2 \gamma t + u_0^2/(4\gamma^2) \sin^2 \gamma t - 2 \cos(\omega + u_0/2)t \cos \gamma t - u_0/\gamma \times \sin(\omega + u_0/2)t \sin \gamma t]\} \quad (17)$$

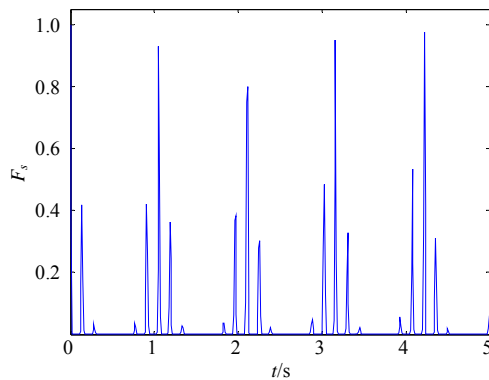
$$F_b = \exp(-n_0 N_0 \varepsilon^2 / \gamma^2 \sin^2 \gamma t) \quad (18)$$

由式(16)~式(18)可知, 系统、光场和原子的量子态保真度与BEC中的原子数 N_0 、初始光场的平均光子数 n_0 、光场与原子间相互作用强度 ε 和光场圆频率 ω 有关。下面通过数值计算主要讨论初始光场的平均光子数 n_0 、光场与原子间相互作用强度 ε 和光场圆频率 ω 的3个参数对系统的量子态保真度的影响。计算中, 参数的取值为 $N_0 = 2000$, $u_0 = 4$ 。

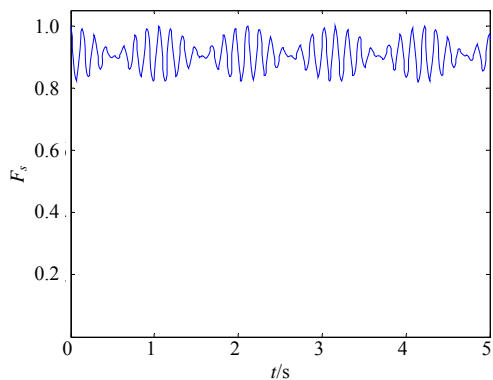
图1~图3显示二能级原子玻色-爱因斯坦凝聚与单模光场相互作用系统中, 量子态的保真度随时间 t 的演化曲线。当参数改变时, 系统的保真度都出现了周期性的崩塌和回复现象。从图1中可以看出, 当BEC中的原子数 N_0 、光场与原子间相互作用强度 ε 和光场圆频率 ω 不变时, 初始光场的平均光子数 n_0 较小时, 系统量子态的保真度接近于1, 几乎不失真(见图1a)。随着初始光场的平均光子数 n_0 的增加, 系统的量子态失真越大(见图1d)。继续增大初始光场的平均光子数 n_0 , 系统的量子信息从失真较小到完全失真, 再由完全失真到几乎不失真周期性振荡(见图1e和图1f)。因此, 改变初始光场的平均光子数 n_0 , 可以改变系统量子态的保真度大小, 而不改变振荡频率。也就是说, 系统的量子态保真度随 n_0 的增加而减小, 但振荡频率保持不变。从图2中可以看出, 当BEC中的原子数 N_0 、初始光场的平均光子数 n_0 和光场圆频率 ω 不变时, 当光场与原子间相互作用强度 ε 较大时, 量子信息处于快振荡状态, 振荡频率逐渐加快, 而系统的量子态保真度大小保持不变。由图3可知, 其他参数不变, 只改变光场圆频率 ω , 随着光场圆频率 ω 增大, 崩塌回复越来越频繁, 而系统的量子态保真度大小和振荡频率均保持不变。



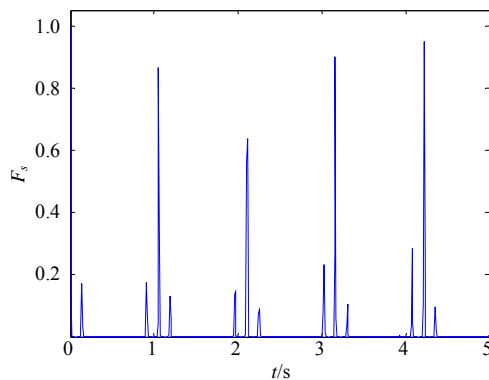
a. $\omega = 1, \epsilon = 1, n_0 = 0.01$



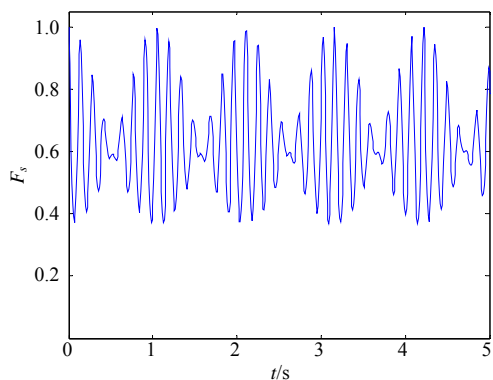
e. $\omega = 1, \epsilon = 1, n_0 = 5$



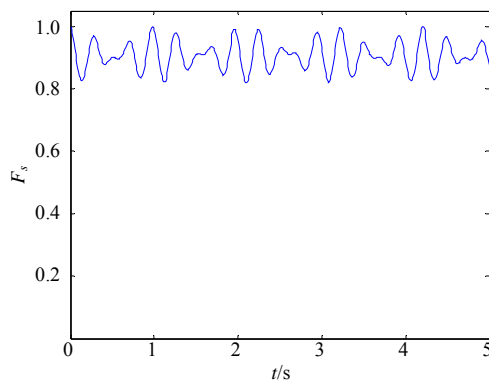
b. $\omega = 1, \epsilon = 1, n_0 = 0.05$



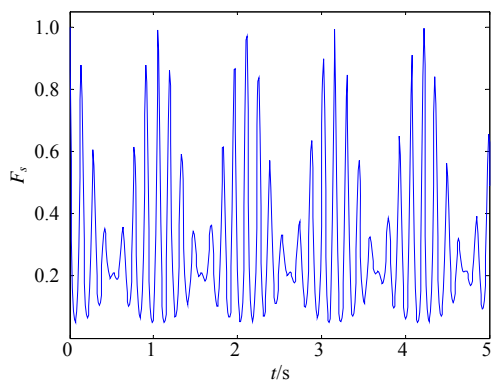
f. $\omega = 1, \epsilon = 1, n_0 = 10$



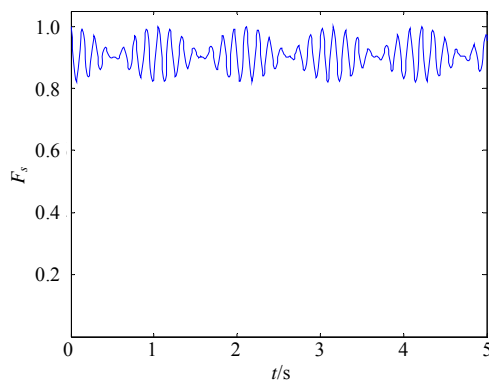
c. $\omega = 1, \epsilon = 1, n_0 = 0.25$



a. $\omega = 1, n_0 = 0.05, \epsilon = 0.5$



d. $\omega = 1, \epsilon = 1, n_0 = 0.75$



b. $\omega = 1, n_0 = 0.05, \epsilon = 1$

图1 系统的保真度 F_s 随 n_0 变化的时间演化曲线

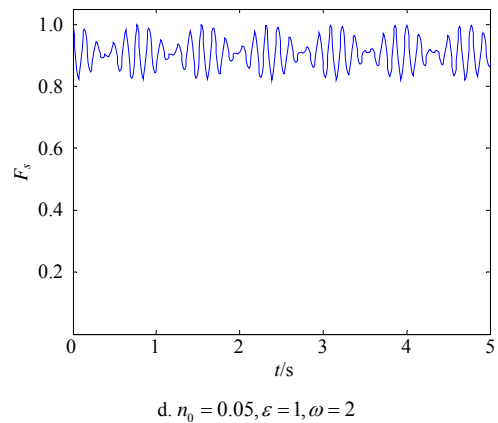
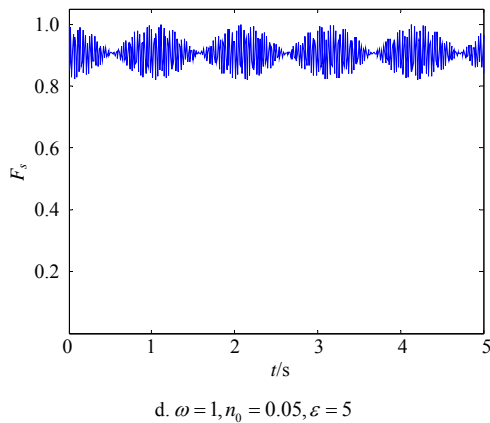
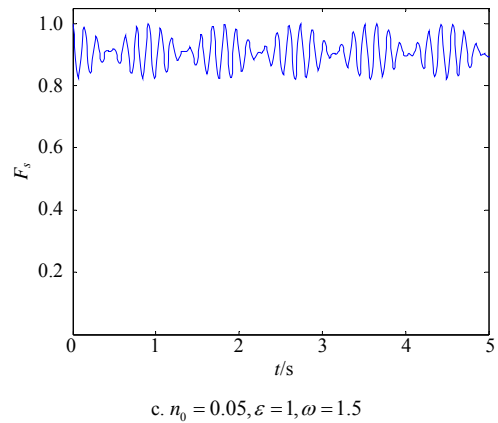
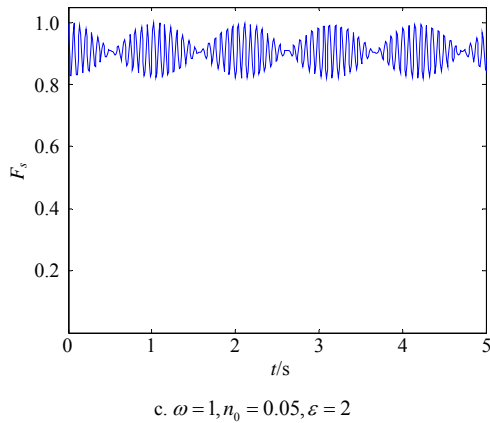
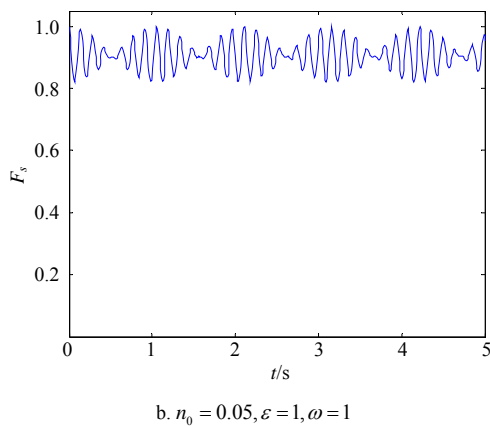
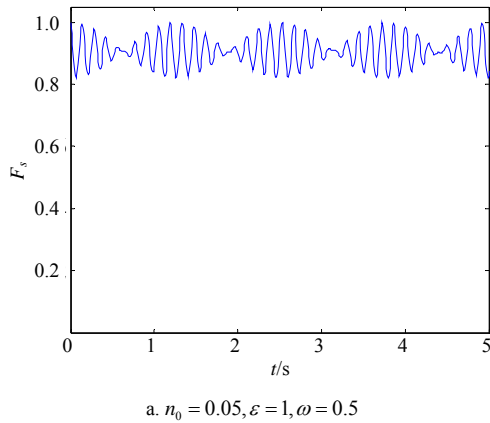


图2 系统的保真度 F_s 随 ϵ 变化的时间演化曲线

图3 系统的保真度 F_s 随 ω 变化的时间演化曲线



3 结论

本文研究了二能级原子单模光场系统中的量子态保真度随时间的演化，并讨论了初始光场的平均光子数 n_0 、光场与原子间的相互作用强度 ϵ 和光场的圆频率 ω 对系统的量子态保真度的影响。结果表明，初始光场的平均光子数 n_0 越小，保真度越好；当光场与原子间的相互作用强度 ϵ 较强时，系统的保真度处于快振荡状态，振荡频率加快，而保真度大小保持不变；当光场的圆频率 ω 增大时，崩塌回复越来越频繁，而系统的量子态保真度大小和振荡频率均保持不变。

本文研究工作得到桂林理工大学博士科研基金的资助，在此表示感谢。

参 考 文 献

[1] ANDERSON M H, ENSCHER J R, METHEWS M R, et al. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor[J]. Science, 1995, 269(5221): 198-201.
 [2] DAVIS K B, MEWES M O, ANDREWS M R, et al. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms[J]. Physical Review Letter, 1995, 75(22): 3969-3973.
 [3] MEMES M O, ANDREWS M R, KURN D M, et al. Output coupler for Bose-Einstein condensed atoms[J]. Physical

- Review Letter, 1997, 78(4): 582-584.
- [4] YOU L, LEWENSTEIN M, COOPER J. Quantum field theory of atoms interacting with photons[J]. Physical Review A, 1995, 51(6): 4712-4727.
- [5] JING Hui, CHEN Jing-ling, GE Mo-lin. Quantum-dynamical theory for squeezing the output of a Bose-Einstein condensate[J]. Physical Review A, 2001, 63(1): 015601-015604.
- [6] KUANG Le-man, ZHOU Lan. Generation of atom-photon entangled states in atomic Bose-Einstein condensate via electromagnetically induced transparency[J]. Physical Review A, 2003, 68(4): 043606-043614.
- [7] ZHENG Gong-ping, LIANG Jiu-qing, LIU Wu-ming. Phase diagram of two-species Bose-Einstein condensates in an optical lattice[J]. Physical Review A, 2005, 71(5): 053608-053612.
- [8] XIE Zheng-wei, CAO Ze-xian, KATS E I, et al. Nonlinear dynamics of a dipolar Bose-Einstein condensates in an optical lattice[J]. Physical Review A, 2005, 71(2): 025601-025604.
- [9] JI An-chun, LIU Wu-ming, SONG Jun-liang, et al. Dynamical creation of fractionalized vortices and vortex lattices[J]. Physical Review Letter, 2008, 101(1): 010402-010405.
- [10] 李明. 原子玻色-爱因斯坦凝聚体对V型三能级原子激光压缩性质的影响[J]. 物理学报, 2011, 60(6): 063201.
LI Ming. Influence of an atomic Bose-Einstein condensate on the squeezing properties of V-type three-level atomic lasers[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(6): 063201.
- [11] 李明, 唐涛, 陈鼎汉. V型三能级原子双模光场系统中光场压缩性质[J]. 物理学报, 2011, 60(7): 073203.
LI Ming, TANG Tao, CHEN Ding-han. Squeezing properties of two-mode squeezed field interacting with V-type three-level atoms[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(7): 073203.
- [12] 李明, 陈鼎汉, 陈翠玲. Ξ 型三能级原子玻色爱因斯坦凝聚体对光场压缩性质的影响[J]. 物理学报, 2013, 62(18): 183201.
LI Ming, CHEN Ding-han, CHEN Cui-ling. Influence of Ξ -type three-level atomic Bose-Einstein condensate on the squeezing properties of light field[J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(18): 183201.
- [13] DUAN Lu-ming, GUO Guang-can. Perturbative expansions for the fidelities and spatially correlated dissipation of quantum bits[J]. Physical Review A, 1997, 56(6): 4466-4470.
- [14] 刘堂昆, 王继锁, 柳晓军, 等. 纠缠态原子偶极间相互作用对量子态保真度的影响[J]. 物理学报, 2000, 49(4): 708-712.
LIU Tang-kun, WANG Ji-suo, LIU Xiao-jun, et al. Influence of entangled states of atomic dipole-dipole interaction on the fidelity of quantum states[J]. Acta Physica Sinica, 2000, 49(4): 708-712.
- [15] HUANG Chun-jia, ZHOU Ming, KONG Fan-zhi, et al. Fidelity of quantum state for interacting system of light field and atomic Bose-Einstein condensate[J]. Chinese Optics Letters, 2005, 3(7): 410-413.
- [16] 李明, 孙久勋. 原子间相互作用对光场和原子激光压缩性质的影响[J]. 物理学报, 2006, 55(6): 2702-2707.
LI Ming, SUN Jiu-xun. Influence of the interaction between atoms on the squeezing of light field and atomic lasers[J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(6): 2702-2707.

编辑 黄莘