



微机电硅谐振器动态建模及同步控制

常淑俊^{1*}, 孙佳伟²

(1. 电子科技大学中山学院 广东 中山 528400; 2. 电子科技大学自动化工程学院 成都 611731)

【摘要】 由于微机电 (MEM) 硅谐振器高能量输出下的周期性振荡、分岔、混沌等非线性因素, 使其振荡频率控制精度有限。针对双端固支梁微机电硅谐振器, 提出了一种输出反馈同步控制方法, 通过振荡器同步以提高其振荡频率控制性能。首先, 对双端固支梁 MEM 硅谐振器系统结构及非线性特性进行了分析, 并建立了充分考虑系统非线性特性的动态模型; 在此基础上, 设计了基于同步误差的输出反馈同步控制器, 实现了多 MEM 硅谐振器同步控制, 并使得相应的同步误差渐近收敛到零。最后, 通过仿真实验证明了所提出方法的有效性。

关键词 动态模型; 微机电; 同步控制; 双端固支梁 MEM 硅谐振器

中图分类号 TP271 **文献标志码** A **doi**:10.12178/1001-0548.2022371

Dynamics Modeling and Synchronization Control of Clamped-Clamped Beam MEM Silicon Resonator

CHANG Shujun^{1*} and SUN Jiawei²

(1. University of Electronic Science and Technology of China Zhongshan Institute Zhongshan Guangdong 528400;

2. School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 611731)

Abstract Non-linear factors such as periodic oscillation, bifurcation and chaos under the high-energy output of micro-electro-mechanical (MEM) silicon resonators will limit the accuracy of oscillation frequency control. This paper proposes an output feedback synchronous control method for clamped-clamped beam micro-electro-mechanical silicon resonators and improves its oscillation frequency control performance through oscillator synchronization. First, the system structure and nonlinear characteristics of the MEM silicon resonator with clamped-clamped beam MEM silicon resonators are analyzed and a dynamic model that fully considers the nonlinear characteristics of the system is established. On this basis, an output feedback synchronization controller based on synchronization error is designed, it can realize the synchronous control of multi-MEM silicon resonators and make the corresponding synchronous error asymptotically converge to zero. Finally, the effectiveness of the proposed method is proved by simulation experiments.

Key words dynamics model; MEM; synchronization control; silicon resonator

微机电 (micro-electro-mechanical, MEM) 硅谐振器的应用广泛, 并越来越多地被用作传感器系统、参考时钟和存储元件的一部分。作为一种石英晶体有前途的替代品, MEM 硅谐振器主要应用于现代数据和通信的振荡器电路中的精确计时器件^[1]。由于其制造技术, MEM 硅谐振器可以与互补金属氧化物半导体 (CMOS) 工艺兼容。这导致 MEM 硅谐振器拥有低成本、低功耗、高可靠性和可制造性的优点。文献 [2-3] 已经描述了将微梁用

作谐振器。

尽管小型化 MEM 硅谐振系统具有许多优点, 但也存在一些难以解决的问题。一个主要问题是如何实现高输出能量。传统的石英晶体谐振器不会被驱动到非线性状态, 因为相当庞大的石英晶体单元可以存储足够的能量用于振荡, 同时保持线性。然而, 由于 MEM 硅谐振器尺寸更小, 本质上存储的能量会更少。因此, MEM 硅谐振器必须被驱动到非线性状态以存储更多的能量^[4]。MEM 硅谐振器

收稿日期: 2022-10-26; 修回日期: 2022-12-15

基金项目: 四川省科技计划资助项目 (2020YFH0027)

作者简介: 常淑俊 (1975-), 女, 主要从事控制工程和自动化技术方面的研究。

*通信作者: 常淑俊, E-mail: sannychang@zsc.edu.cn

中的非线性通常来源于两个地方：相对较大的结构变形和与位移相关的激励。如果进一步增加激励力的大小将导致系统的非线性振动，这种方法已经被证明对谐振器的动态行为更有效。文献 [5-7] 进行了大量研究来报告各种非线性动态现象，如 MEM 硅谐振器中的频率响应曲线弯曲和阶跃现象。同时，理论与实验研究均表明，混沌运动作为非线性动态中的一种特殊现象，广泛存在于 MEM 硅谐振器中。文献 [8] 研究了双端固支微梁在超谐波激励下的复杂动态行为，发现对称性破缺是导致该系统出现混沌运动的主要原因。文献 [9] 研究了一类压电层合微梁的动力学问题，指出电压幅值的变化可导致系统产生倍周期/混沌运动。

针对 MEM 硅谐振器的非线性动态，科学界已经提出很多有效的控制方法。文献 [10] 以文献 [11] 中的 MEMS 动力学模型作为研究对象，应用线性最优控制理论成功地使系统的运动状态从混沌运动变为稳定的周期振动。文献 [12-13] 分析了一类微谐振器的混沌运动，应用 Melnikov 方法获得了系统发生混沌运动的临界阈值，最终通过引入鲁棒自适应模糊控制算法，成功实现了对系统的混沌控制。文献 [14-16] 提出了使用振荡器同步来提高频率精度的想法。文献 [14] 分析了通过同步可以提高耦合振荡器精度的条件，发现精度的提高，取决于如何向系统添加噪声。文献 [15] 分析了相互同步振荡器系统中的相位噪声，忽略了幅度噪声以及幅度调制到相位调制的转换，以用于任意耦合和注入锁定拓扑，同时研究了非最佳耦合相位对系统相位噪声的影响。文献 [16] 研究了在相位缩减极限中通过同步具有不同频率的 N 个振荡器的晶格来提高频率精度。然而，由于 MEM 硅谐振器的模型比 Duffing 方程复杂得多，现有的硅谐振器同步控制方法无法满足谐振器周期性振荡、分岔、混沌非线性影响下的高能量输出同步控制动静态性能要求。

本文旨在研究基于静电驱动双端固支梁的 MEM 硅谐振器动态特性及其同步控制方法。本文提出了一种输出反馈同步控制方法，它可以将同步误差渐近地减小到零，最后通过仿真实验表明所提出的方法是有效的。

1 系统动态建模及分析

本文研究了一种双端固支梁 MEM 硅谐振器。

静电驱动谐振器中的非线性来源于机械和电容，机械非线性是由谐振元件中的几何和材料效应引起的，而电容非线性是由静电耦合机制引起的。根据经典梁理论，可以对桥式谐振器（也称为双端固支梁谐振器）进行建模。相应地，在理论上分布材料非线性可以使用杨氏模量进行估计。这些非线性效应可以通过具有 Duffing 结构的简化或集总模型有效地描述。

谐振器的示意图如图 1 所示。虚线描述了谐振器震动的形状。由于梁的横向振动，谐振器称为弯曲谐振器。谐振器的驱动是通过直流 (V_{dc}) 和交流 (V_{ac}) 电压分量实现的，它们通过偏置三通施加到谐振器的电极上。值得注意的是，直流电压 (V_{dc}) 应用于梁的两个电极，而交流电压 (V_{ac}) 应用于单个电极。通过用电负载激励电容设备， V_{dc} 使检测质量块轻微偏移，而 V_{ac} 使检测质量块在新缺陷位置周围振动。

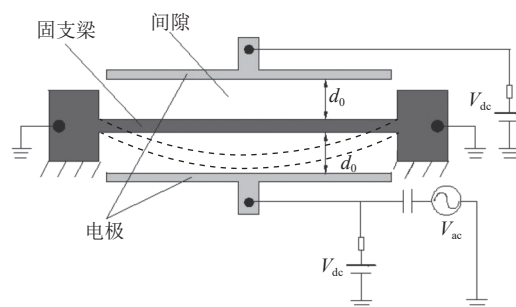


图 1 双端固支梁谐振器示意图

由于梁在整个梁长度上被激发（见图 1）， x 表示梁在第一模式下振动的位移量。此外， \dot{x} 和 \ddot{x} 分别表示 x 的一阶和二阶导数。描述 MEM 硅谐振器动态行为的集总单自由度模型如下^[5,17]：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dx}{dt} + g(x)x = \frac{1}{2} \frac{C_0 d_0}{(d_0 - x)^2} V_1^2(t) - \frac{1}{2} \frac{C_0 d_0}{(d_0 + x)^2} V_2^2(t) \quad (1)$$

式中， m 、 b 和 $g(x) = \alpha_2 + \alpha_3 x^2$ 分别是系统的有效（集总）质量、阻尼和非线性刚度； C_0 是当 $x = 0$ 时间隙上的电容； d_0 是相应的间隙宽度。尽管梁振动形状是连续的，但已发现集总描述式 (1) 足以捕捉 MEM 硅谐振器的动态行为^[1]。 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 表示施加在电极上的电压，并写为：

$$V_1(t) = V_{dc} + V_{ac} \sin(\Omega t) \quad V_2 = V_{dc} \quad (2)$$

式中， V_{dc} 是偏置电压； V_{ac} 和 $2\pi/\Omega$ 分别是交流电压的幅度和频率。从式 (2) 可以看出，谐振器受到频

率为 $2\pi/\Omega$ 和 $4\pi/\Omega$ 的参量激励。

为了建模方便, 可以将式(1)改写为:

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + \beta_1 \frac{dz}{d\tau} + \beta_2 z + \beta_3 z^3 = \frac{\gamma(V_{dc} + V_{ac} \sin(\varpi\tau))^2}{(1-z)^2} - \frac{\gamma V_{dc}^2}{(1+z)^2} \quad (3)$$

通过定义弹性固有频率 $\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{m}}$, 并且定义

如下无量纲量: $\tau = \omega_0 t$, $\varpi = \frac{\Omega}{\omega_0}$, $z = \frac{x}{d_0}$, $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{m\omega_0}$,
 $\beta_2 = \frac{\alpha_2}{m\omega_0^2}$, $\beta_3 = \frac{\alpha_3 d_0^2}{m\omega_0^2}$, $\gamma = \frac{C_0}{2m\omega_0^2 d_0^2}$ 。

上述 MEM 硅谐振器模型及其动态特性分析表明, 其是一个典型的非线性动态系统, 并存在周期性振荡^[18]、拓扑结构突变的分岔^[19]、有界初始条件敏感和非周期的混沌特性^[20-21]。非线性微分系统式(3)使用无量纲的参数进行数值仿真, 假设系统参数为 $m = 6 \times 10^{-12}$ kg、 $V_{dc} = 4.3$ V、 $\alpha_1 = 6 \times 10^{-8}$ kg/s、 $\alpha_2 = 6$ μ N/ μ m、 $\alpha_3 = 14$ μ N/ μ m³、 $d = 2.2$ μ m、 $C_0 = 0.8 \times 10^{-12}$ F、 $\omega_0 = 10^6$ rad/s, 这表明在模型式(3)中 $\beta_1 = 10^{-2}$ 、 $\beta_2 = 1$ 、 $\beta_3 = 11.29$ 、 $\gamma = 0.0138$ 。

为了研究谐振器的动态行为, 使偏置电压 V_{dc} 保持固定, 交流电压 V_{ac} 变化。图2说明了 $V_{ac} = 0.25$ V和 $\Omega = 0.2 \times 10^6$ rad/s时系统的相位响应, 其中系统式(3)表现出混沌的反应。图3中存在一个正 Lyapunov 指数证实了系统的混沌行为。当 $V_{ac} = 0.15$ V和 $\Omega = 0.2 \times 10^6$ rad/s 时, 系统式(3)表现为周期性, 由图4的相位图中观察到的运动, 得到范围的分岔图 V_{ac} 如图5所示, 这表明存在与 V_{ac} 相关的不同类型的运动。事实上, 其他参数也可能导致复杂的动态行为, 如可以得到图6中通过调整 V_{dc} 的分岔图, 展示了系统的行为如何随直流电压变化。

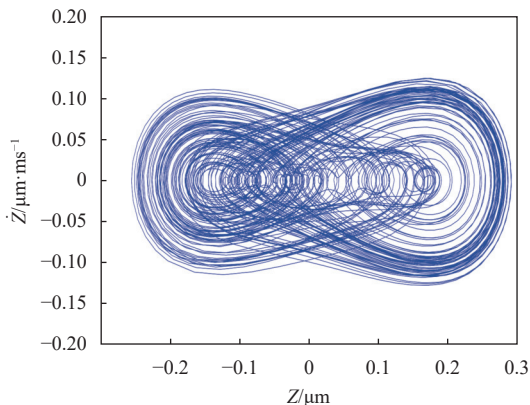


图2 $V_{ac} = 0.25$ V和 $\Omega = 0.2 \times 10^6$ rad/s固支梁谐振器的相位轨迹

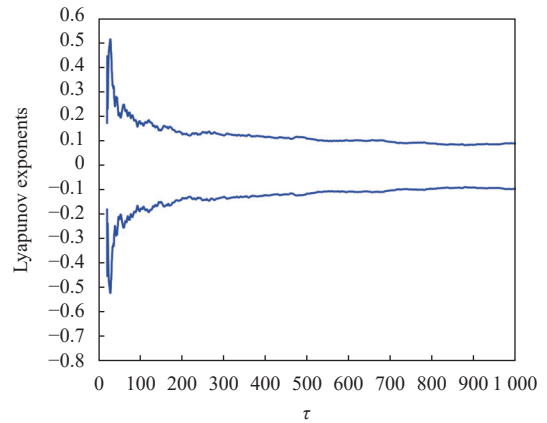


图3 $V_{ac} = 0.25$ V和 $\Omega = 0.2 \times 10^6$ rad/s系统的 Lyapunov 指数

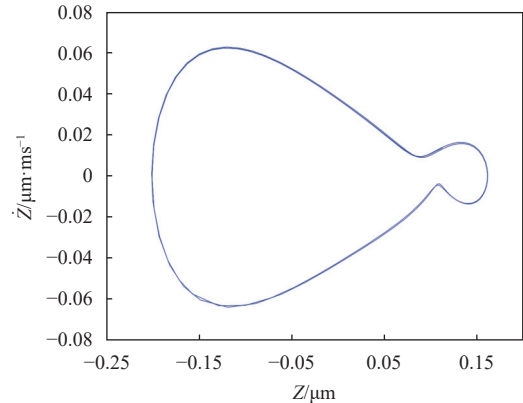


图4 $V_{ac} = 0.25$ V和 $\Omega = 0.2 \times 10^6$ rad/s固支梁谐振器的相位轨迹

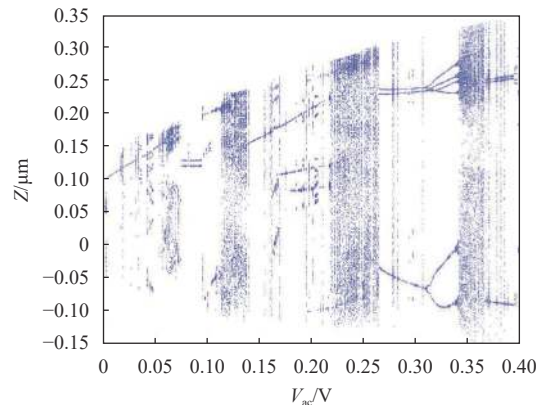


图5 V_{ac} 从0~0.4 V变化的分岔图

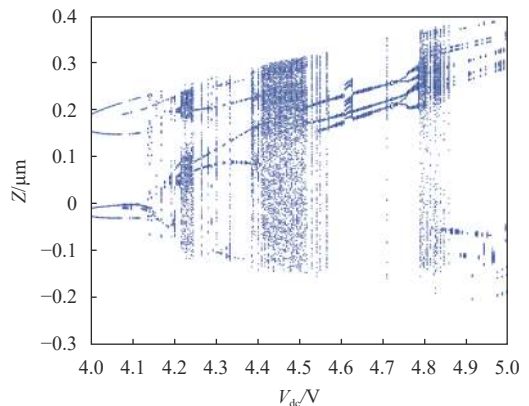


图6 V_{ac} 从4~5 V变化的分岔图

2 MEM 硅谐振器同步控制

定义状态变量 $p_1 = z$, $p_2 = \frac{dz}{d\tau}$, 系统 (3) 可以转化为如下状态空间表达式:

$$M: \begin{cases} \dot{p}_1 = p_2 \\ \dot{p}_2 = -\beta_1 p_2 - \beta_2 p_1 - \beta_3 p_1^3 + \\ \frac{\gamma(V_{dc} + V_{ac} \sin(\omega\tau))^2}{(1-z)^2} - \frac{\gamma V_{dc}^2}{(1+z)^2} \\ y = p_1 \end{cases} \quad (4)$$

式中, $\dot{p}_1 = \frac{dp_1}{d\tau}$; $\dot{p}_2 = \frac{dp_2}{d\tau}$ 。

在本节中, 考虑输出反馈下的一般主从型耦合系统控制, 由主系统式 (4) 和以下从系统 S 组成:

$$S: \begin{cases} \dot{\hat{p}}_1 = \hat{p}_2 \\ \dot{\hat{p}}_2 = -\beta_1 \hat{p}_2 - \beta_2 \hat{p}_1 - \beta_3 \hat{p}_1^3 + \\ \frac{\gamma(V_{dc} + V_{ac} \sin(\omega\tau) + u)^2}{(1-z)^2} - \frac{\gamma V_{dc}^2}{(1+z)^2} \\ \hat{y} = \hat{p}_1 \end{cases} \quad (5)$$

式中, u 是同步控制器。同步控制的目的是, 通过使用输出反馈控制器 $u(\tau) = L(y(\tau) - \hat{y}(\tau))$, 同步从系统 S 渐近到主系统 M 。

定义同步误差 $e(\tau) = p(\tau) - \hat{p}(\tau)$, 则同步误差动态方程可由式 (4) 和式 (5) 得出:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -\beta_1 e_2 - \beta_2 e_1 + \beta_3 (\hat{p}_1^3 - p_1^3) + \\ \gamma(V_{dc} + V_{ac} \sin(\omega\tau))^2 \left(\frac{1}{(1-p_1)^2} - \frac{1}{(1-\hat{p}_1)^2} \right) - \\ \gamma \frac{2(V_{dc} + V_{ac} \sin(\omega\tau))u - u^2}{(1-\hat{p}_1)^2} - \\ \gamma V_{dc}^2 \left(\frac{1}{(1+p_1)^2} - \frac{1}{(1+\hat{p}_1)^2} \right) \end{cases} \quad (6)$$

进一步得到非线性项方程如下:

$$\begin{cases} \Delta_1 = -(p_1^2 - p_1 \hat{p}_1 - \hat{p}_1^2) e_1 \\ \Delta_2 = \frac{2 - p_1 - \hat{p}_1}{(1-p_1)^2 (1-\hat{p}_1^2)} e_1 \\ \Delta_3 = -\frac{2 + p_1 + \hat{p}_1}{(1-p_1)^2 (1-\hat{p}_1^2)} e_1 \end{cases} \quad (7)$$

数值仿真表明谐振器的振荡幅度小于 $0.5d_0$, 将式 (6) 与式 (7) 结合得到:

$$\beta_3 \Delta_1 + \gamma(V_{dc} + V_{ac} \sin(\omega\tau))^2 \Delta_2 - \gamma V_{dc}^2 \Delta_3 = f(p_1, \hat{p}_2) e_1 \quad (8)$$

式中,

$$f(p_1, \hat{p}_2) = \frac{\gamma(2 - p_1 - \hat{p}_1)(V_{dc} + V_{ac} \sin(\omega\tau))^2}{(1-p_1)^2 (1-\hat{p}_1)^2} + \frac{\gamma V_{dc}^2 (2 + p_1 + \hat{p}_1)}{(1+p_1)^2 (1+\hat{p}_1)^2} - \beta_3 (p_1^2 + p_1 \hat{p}_1 + \hat{p}_1^2) \quad (9)$$

因此, 接下来研究二元函数的最大值为:

$$\rho(p_1, \hat{p}_2) = (1 - \hat{p}_1)^2 f(p_1, \hat{p}_2) - \beta_2 (1 - \hat{p}_1)^2 \quad (10)$$

使用 MATLAB 绘制图 7 所示的函数 $\rho(p_1, \hat{p}_2)$ 的三维图形。

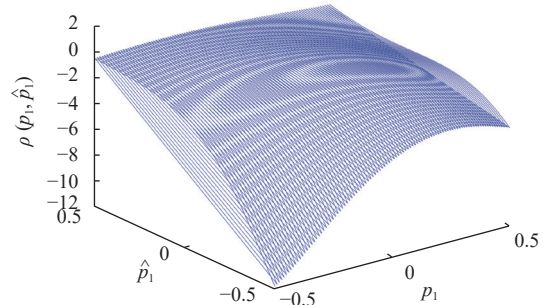


图 7 $\rho(p_1, \hat{p}_2)$ 函数图像

$\rho(p_1, \hat{p}_2)$ 的最大值为 $\max \rho = 0.0571$, 选择同步控制器为:

$$u(\tau) = k(y(\tau) - \hat{y}(\tau)) \quad (11)$$

式中, k 是需要设计的正增益参数。

联立式 (6)、(9) 和 (10), 可以得到:

$$\begin{aligned} \sigma &= f(p_1, \hat{p}_2) - \beta_2 - \gamma \frac{2(V_{dc} + V_{ac} \sin(\omega\tau))k - k^2 c_1}{(1-\hat{p}_1)^2} \leq \\ &= \frac{\rho(p_1, \hat{p}_2) - (V_{dc} - V_{ac})k + \gamma k^2 e_1}{(1-\hat{p}_1)^2} \leq \\ &= \frac{0.0571 - 0.115k + 0.0138k^2}{(1-\hat{p}_1)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

然后, 取:

$$0.6 < k < 7.8 \quad (13)$$

它将保持 $\sigma < 0$ 。最后, 根据上述结果, 将式 (6) 式改写为:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = \sigma e_1 - \beta_1 e_2 \end{cases} \quad (14)$$

式 (14) 的系统矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sigma & -\beta_1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

因为 $\sigma < 0$, 系统矩阵的两个特征值都是正数。因此, 同步误差 $e(\tau)$ 渐近收敛到零。

在误差动态方程式 (6) 中, 线性项和二次项均包含输入 u 。因此, 如式 (13) 所示, 控制器增益 k 既不能太大也不能太小。控制器的增益 k 较大导致正反馈 u^2 抑制负反馈 $(V_{dc} + V_{ac} \sin(\omega\tau))u$, 这会使同步误差发散。相反, 控制器的增益 k 较小, 不能提供足够的负反馈来控制误差动态并确保同步误差收敛。

此外, 噪声在现实世界系统中无处不在, 采用同步时需要考虑噪声的影响。众所周知, 噪声会以不同的方式影响同步。因此, 很多研究都集中在干扰的影响和不确定的同步参数。但是, 由于只有输出信号可以被测量, 输入信号 u 以二次项输入从系统, 如何解决对于存在干扰或不确定性的多个 MEM 硅谐振器的同步问题, 仍然需要研究。

从图 1 可以看出, 梁在谐振器的间隙中振动, 那么 $-d_0 < z < d_0$, 这意味着 $-1 < p_1$ 且 $\hat{p}_1 < 1$, 因此在式 (6) 中有 $\frac{1}{4} < \frac{1}{(1-\hat{p}_1)^2}$ 。那么, 很明显存在一个正参数 η , 使得 u 和 u^2 的可变系数都大于 η 。

此外, MEM 硅谐振器的非线性项是 Lipschitz 连续函数, 因此同步误差可以通过线性输出反馈控制器进行校正。

3 仿真实验

仿真实验由主系统组成的 MEM 硅谐振器同步系统式 (4) 和从系统式 (5), 其具有不同的初始条件, $p_1(0) = p_2(0) = 0$, $\hat{p}_1(0) = 0.3$, $\hat{p}_2(0) = 0$, 激励频率 $\Omega = 0.2 \times 10^6$ rad/s。

选择 $k = 6.5$, 可得同步控制器 $u(\tau) = 6.5(y(\tau) - \hat{y}(\tau))$ 。仿真实验同步误差如图 8 和图 9 所示。仿真结果验证了本文所提出的控制方法能够有效地解决 MEM 硅谐振器系统的同步问题。

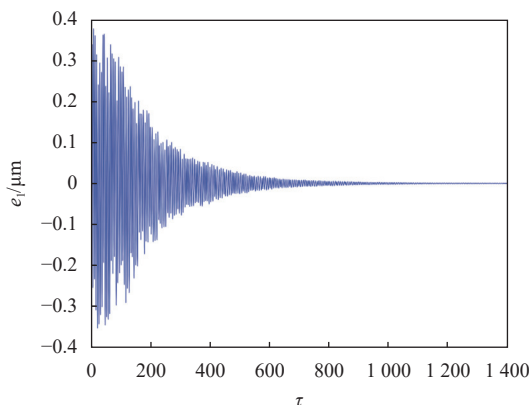


图 8 同步误差 e_1

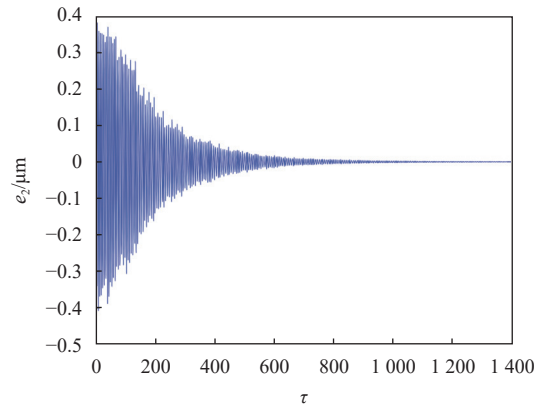


图 9 同步误差 e_2

4 结束语

本文针对双端固支梁 MEM 硅谐振器同步问题, 研究了一种新的输出反馈同步控制方法。首先对双端固支梁 MEM 硅谐振器非线性和动态特性进行了分析, 并建立系统模型。然后在此基础上, 设计了基于输出反馈的同步控制算法, 使从系统与主系统的动态同步。通过仿真实验证明所提出的方法能够有效地解决双端固支梁 MEM 硅谐振器同步问题。下一步可以针对以下问题继续开展相关研究工作, 如同步系统的电路实现技术、用于振荡同步或反同步的新设计方法等。

参考文献

- [1] CLARK T N. MEMS technology for timing and frequency control[J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2007, 54(2): 251-270.
- [2] NATHANSON H C, WICKSTROM R A. A resonant gate surface transistor with high-q bandpass properties[J]. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 1965, 12(9): 507.
- [3] NATHANSON H C, Newell W E, WICKSTROM R A, et al. The resonant gate transistor[J]. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 1967, 14(3): 117-133.
- [4] KAAJAKARI V, MATTILA T, OJA A, et al. Nonlinear limits for single-crystal silicon microresonators[J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2004, 13(5): 715-724.
- [5] MESTROM R M C, FEY R H B, PHAN K L, et al. Simulations and experiments of hardening and softening resonances in a clamped-clamped beam MEMS resonator[J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2010, 162(2): 225-234.
- [6] BRAGHIN F, RESTA F, LEO E, et al. Nonlinear dynamics of vibrating MEMS[J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2007, 134(1): 98-108.
- [7] YOUNIS M I, NAYFEH A H. A study of the nonlinear response of a resonant microbeam to an electric actuation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 31(1): 91-117.

- [8] DE S K, ALURU N R. Complex nonlinear oscillations in electrostatically actuated microstructures[J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2006, 15(2): 355-369.
- [9] CHEN C P, HU H T, DAI L M. Nonlinear behavior and characterization of a piezoelectric laminated microbeam system[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, 18(5): 1304-1315.
- [10] CHAVARETTE F R, BALTHAZAR J M, FELIX J L P, et al. A reducing of a chaotic movement to a periodic orbit, of a micro-electro-mechanical system, by using an optimal linear control design[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, 14(5): 1844-1853.
- [11] LUO A C J, WANG F Y. Chaotic motion in a micro-electro-mechanical system with non-linearity from capacitors[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2002, 7(1-2): 31-49.
- [12] HAGHIGHI H S, MARKAZI A H D. Chaos prediction and control in MEMS resonators[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15(10): 3091-3099.
- [13] DAVAIE-MARKAZI A H, SOHANIAN-HAGHIGHI H. Chaos analysis and control in AFM and MEMS resonators[J]. *Chaotic Systems*, 2011: 119-134.
- [14] NEEDLEMAN D J, TIESINGA P H E, SEJNOWSKI T J. Collective enhancement of precision in networks of coupled oscillators[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2001, 155(3-4): 324-336.
- [15] CHANG H C, CAO X D, MISHRA U K, et al. Phase noise in coupled oscillators: Theory and experiment[J]. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1997, 45(5): 604-615.
- [16] CROSS M C. Improving the frequency precision of oscillators by synchronization[J]. *Physical Review E*, 2012, 85(4): 046214.
- [17] OUKAD H M, YOUNIS M I. The dynamic behavior of MEMS arch resonators actuated electrically[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2010, 45(7): 704-713.
- [18] ALSALEEM F M, YOUNIS M I, RUZZICONI L. An experimental and theoretical investigation of dynamic pull-in in MEMS resonators actuated electrostatically[J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2010, 19(4): 794-806.
- [19] ABDEL-RAHMAN E M, NAYFEH A H. Secondary resonances of electrically actuated resonant microsensors[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2003, 13(3): 491.
- [20] LUO A C J, WANG F Y. Nonlinear dynamics of a micro-electro-mechanical system with time-varying capacitors[J]. *Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of the Asme*, 2004, 126(1): 77-83.
- [21] LIU S, DAVIDSON A, LIN Q. Simulation studies on nonlinear dynamics and chaos in a MEMS cantilever control system[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2004, 14(7): 1064.

编辑 刘飞阳