

## 信号的多通道多分辨分解\*

唐向宏\*\* 龚宇<sup>✓</sup> 龚耀寰

(电子科技大学电子技术系 成都 610054)

① 29-33

【摘要】 小波变换是近年来兴起的一种时频域信号分析理论,是信号分析处理的一种强有力的新工具。文中根据小波变换的特点,在Mallat“二通道”多分辨分析的基础上,讨论分析了信号的多通道多分辨分析的理论 and 实现算法,给出了实验模拟结果,实验结果表明这一理论和方法对信号的处理分析是非常有用的。

关键词 信号分析; 母小波; 小波变换; 通道; 多分辨分析  
中图分类号 TN64

TN 911.6

近几年随着小波理论的发展和应用,小波理论已成为信号分析处理的一种强有力的工具。

设  $f(t)$  为能量有限的一维函数  $f(t) \in L^2(R)$ , 则其小波变换定义为<sup>[1]</sup>

$$Wf(a,b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (1)$$

式中  $a$  称为尺度(或伸缩)因子;  $b$  为平移因子;  $\Psi(t)$  称为母小波。

设  $\Psi_a(t) = |a|^{-1/2} \Psi\left(\frac{t}{a}\right)$ ,  $\tilde{\Psi}_a(t) = \Psi(-t)$ , 则式(1)可写为

$$Wf(a,b) = f(t) * \tilde{\Psi}_a(t) \quad (2)$$

所以小波变换可看成是原始信号用一组不同尺度的带通滤波器进行滤波,将信号分解到一系列频带上进行分析处理。

在实际应用时,需对式(1)的  $a$  和  $b$  进行离散处理,可以对尺度因子进行指数采样实现离散<sup>[2]</sup>

$$\begin{cases} a = a_0^n & a_0 > 1 \\ b = b_0 n a_0^n & b_0 > 0 \end{cases} \quad (3)$$

最重要的一种离散是根据人类的视觉通道特性,对尺度因子按倍频程方式离散化,这时  $a = 2^n$ ,  $b = n 2^n$ 。Mallat 所提出的多分辨分析<sup>[3]</sup>,则是这种情况下的一种特殊小波变换,可以看出,Mallat 的多分辨分析是在二通道基础上进行的。Steffen 等人<sup>[4]</sup>和 Zou 等人<sup>[5]</sup>讨论了多通道的情况。我们根据小波变换特点,在 Mallat“二通道”多分辨分析的基础上,对多通道情况进行了进一步的研究,讨论分析了信号的多通道多分辨分析的理论 and 实现算法,并将这一理论进行了计算机模拟实验,取得了满意的效果。

## 1 多通道多分辨分析

为了将 Mallat“二通道”多分辨分析推广到多通道( $M$ -通道)情况,我们仍需从连续小波变换的

1996年3月5日收稿,1996年4月17日修改定稿

\* 国家自然科学基金和电子部预研基金资助项目

\*\* 男 33岁 博士生

离散化入手,取  $a_0=M, b_0=1$ , 这样尺度函数  $\phi(t)$  满足的双尺度方程为<sup>[5]</sup>

$$\phi(t) = \sum_n h(n)\phi(Mt-n) \quad (4)$$

它对应的小波共有  $M-1$  个, 用  $\Psi^{(i)}(t)$  表示, 且满足

$$\Psi^{(i)}(t) = \sum_n g^{(i)}(n)\phi(Mt-n) \quad i=1, 2, \dots, M-1 \quad (5)$$

令  $\phi_k = M^{-j/2}\phi(M^{-j}t-k), \Psi_k^{(i)} = M^{-j/2}\Psi^{(i)}(M^{-j}t-k)$ , 并令由  $\{\phi_k, k \in \mathbb{Z}\}$  张成的子空间为  $V_j$ , 由  $\{\Psi_k^{(i)}, k \in \mathbb{Z}\}$  张成的子空间为  $W_j^{(i)}$ 。由式(4)可知,  $V_j$  具有以下性质:

1) 单调性

$$\dots V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \dots$$

2) 渐近完全性

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

3) 伸缩规则性

$$\forall f(t) \in V_{j-1} \Leftrightarrow f(Mt) \in V_j, \forall j \in \mathbb{Z}$$

4) 正交基存在性: 如果尺度函数  $\phi(t)$  和对应的小波  $\{\Psi^{(i)}(t), i=1, 2, \dots, M-1\}$  选择满足

$$\begin{aligned} \langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle &= \delta_{mn} \\ \langle \phi_m(t), \Psi_k^{(i)}(t) \rangle &= 0 \quad i=1, 2, \dots, M-1 \\ \langle \Psi_k^{(i)}(t), \Psi_l^{(j)}(t) \rangle &= \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} \quad i=1, 2, \dots, M-1 \end{aligned}$$

时,  $V_j$  子空间就分成  $M-1$  个正交补空间, 而这些正交补空间就可具有以下性质:

1)  $W_j^{(i)} \perp W_j^{(k)}, i \neq k, i, k=1, 2, \dots, M-1$ ;

2)  $W_j^{(i)} \perp V_j$ ;

3)  $V_j = V_{j+1} \oplus (\bigoplus_{i=1}^{M-1} W_{j+1}^{(i)})$ ; 从而  $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (\bigoplus_{i=1}^{M-1} W_j^{(i)})}$  (“ $\oplus$ ”为直和符号)。

由于  $V_{j+1} \subset V_j$ , 所以  $\phi_{j+1,n}$  则可由  $\{\phi_k, k \in \mathbb{Z}\}$  正交基展开

$$\phi_{j+1,n} = \sum_k \langle \phi_{j+1,n}, \phi_k \rangle \phi_k \quad (6)$$

利用双尺度方程式(4)可以证明

$$\phi_{j+1,n} = M^{-1/2} \sum_k h(k-Mn)\phi_k \quad (7)$$

对式(7)两边内积得

$$\langle f(t), \phi_{j+1,n} \rangle = M^{-1/2} \sum_k h(k-Mn) \langle f(t), \phi_k \rangle \quad (8)$$

令  $A_{j+1}^n f = \langle f, \phi_{j+1,n} \rangle$ , 则式(8)可简写为

$$A_{j+1}^n f = M^{-1/2} \sum_k h(Mn-k) A_j^k f \quad (9)$$

式中表明: 低一级分辨率( $j+1$ )的模糊分量可以用高一级( $j$ )的模糊分量通过具有冲激响应为  $M^{-1/2}h(n)$  的滤波器滤波后, 再抽样(downsampling)  $M$  求得。

类似地, 根据双尺度方程式(5)并令  $D_{j+1}^n f = \langle f, \Psi_{j+1}^n \rangle$ , 可证

$$D_{j+1}^n f = M^{-1/2} \sum_k \tilde{g}^{(i)}(Mn-k) A_j^k f \quad i=1, 2, \dots, M-1 \quad (10)$$

式中表明: 第  $j+1$  级分辨率的细节信号可以由第  $j$  级分辨率的模糊分量, 通过具有冲激响应为  $M^{-1/2}\tilde{g}^{(i)}(n)$  的滤波器滤波后, 再抽样  $M$  求得。因此我们从式(9)和式(10)得出: 第  $j$  分辨率的模糊分量  $A_j^k f$  可分解成分率为  $j+1$  的模糊分量  $A_{j+1}^n f$  和细节信号  $D_{j+1}^n f$ , 其实现流程如图 1 所示。

根据文献[6]可设连续信号  $f(t) \in L^2(R)$  的离散信号为  $f(n) \in l^2(R)$  并满足

$$\begin{cases} f(t) = \sum_n f(n)\phi(t-n) \\ f(n) = \langle f(t), \phi(t-n) \rangle = A_0 f \end{cases} \quad (11)$$

从而利用式(9)、(10)通过迭代可求得离散信号  $\{f(n) = A_0 f\}$  的有限分辨率的多分辨率表示为

$$f(n) = A_0 f + \sum_{j=1}^{M-1} \sum_k D_j^{(j)} f \quad (12)$$

由前可知,  $\{\phi_{j+1,k}, \Psi_j^{(j)}, k \in Z\}$  构成  $V_j$  子空间的一组正交基, 这样  $\phi_n$  可由这组正交基展开

$$\phi_n = \sum_k \langle \phi_{j+1,k}, \phi_n \rangle \phi_{j+1,k} + \sum_{k=1}^{M-1} \sum_k \langle \Psi_j^{(j)}, \phi_n \rangle \Psi_j^{(j)} \quad (13)$$

利用双尺度方程可证明

$$\phi_n = M^{-1/2} \sum_k h(n-Mk)\phi_{j+1,k} + M^{-1/2} \sum_{k=1}^{M-1} \sum_k g^{(j)}(n-Mk)\Psi_j^{(j)} \quad (14)$$

对式(14)两边取内积得

$$A_j^2 f = M^{-1/2} \sum_k h(n-Mk)A_{j+1}^2 f + M^{-1/2} \sum_{k=1}^{M-1} \sum_k g^{(j)}(n-Mk)D_j^{(j)} f \quad (15)$$

式(15)表明第  $j$  级分辨率的模糊分量  $A_j f$  可由低一级分辨率  $(j+1)$  的模糊分量  $A_{j+1} f$  和细节信号  $D_j^{(j)} f$  重构, 从而达到对原信号  $f(n)$  的重构。具体实现过程是: 首先是对模糊分量  $A_{j+1} f$  和细节信号  $D_j^{(j)} f$  进行插值抽样(upsampling)  $M$ ; 然后分别通过对应的滤波器滤波; 最后进行叠加。其实现框图如图 2 所示。

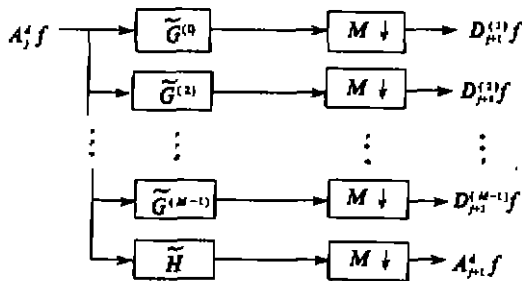


图 1 模糊分量  $A_j f$  分解成  $A_{j+1} f$  和  $D_{j+1}^{(j)} f$  的实现框图

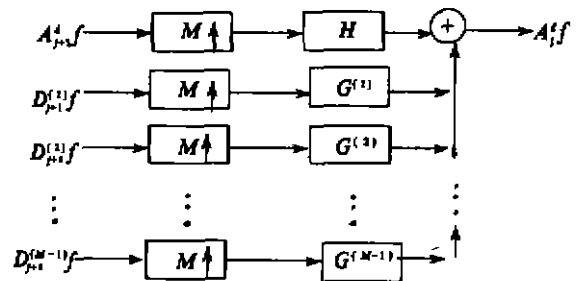


图 2 模糊分量  $A_{j+1} f$  和细节信号  $D_{j+1}^{(j)} f$  重构  $A_j f$  的实现框图

## 2 实验模拟及讨论

根据前面所讨论的理论和方法, 我们在计算机上进行了模拟实验。所选用的滤波器为 8 点 4 通道的 FIR-QMF 滤波器, 其系数如表 1 所示。

利用这组滤波器, 我们分别对一维信号和二维信号进行了多分辨率分析处理。图 3 给出一个一维离散信号多通道多分辨率的分解和重构结果, 其中图 3a 为原始信号(取自一幅  $256 \times 256 \times 8$  bits 图像的一条扫描线); 图 3b 为重构的原始信号, 分辨率层数为  $J=1$ ; 图 3c 为模糊分量和细节信号。

表1 滤波器系数

$h$	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$
0.114 701	0.026 913	0.135 299	-0.076 641
0.385 299	-0.326 641	-0.218 254	0.076 641
0.576 641	-0.488 852	-0.326 641	0.114 701
0.576 641	0.135 299	0.680 194	-0.385 299
0.385 299	0.680 194	-0.135 299	0.576 641
0.114 701	0.326 641	-0.488 852	-0.576 641
-0.076 641	-0.218 254	0.326 641	0.385 299
-0.076 641	-0.135 299	0.026 913	-0.114 701

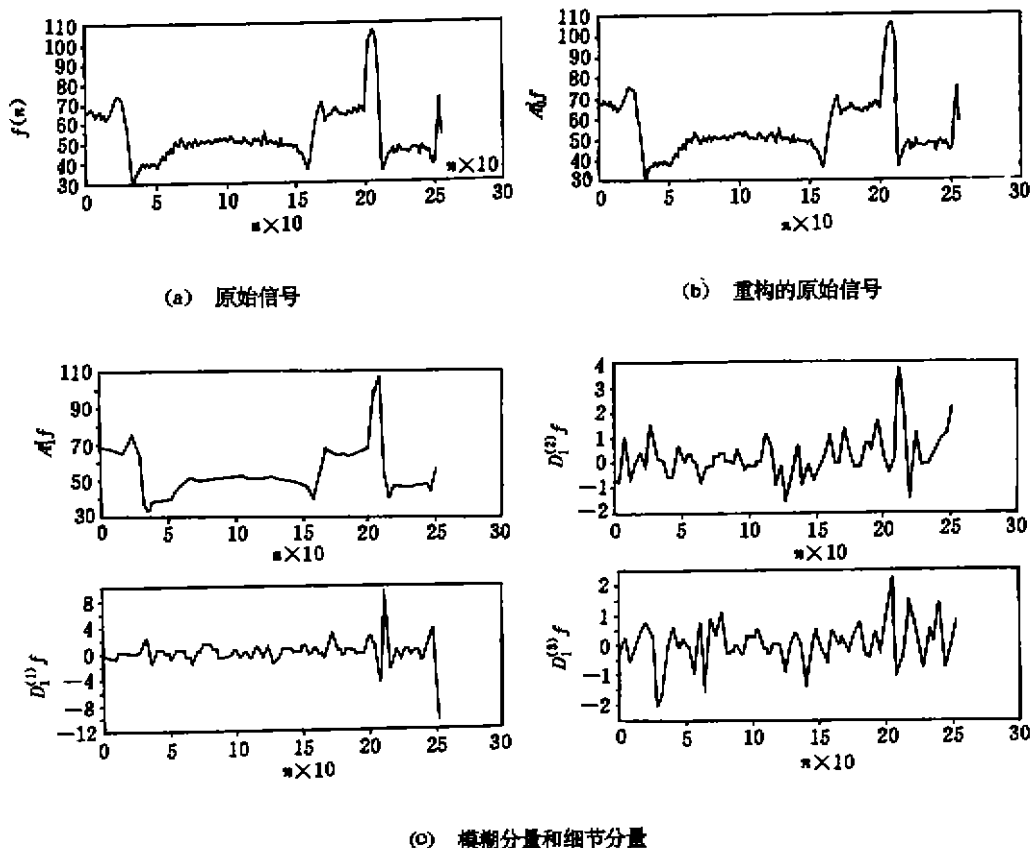


图3 一维离散信号的多通道多分辨率的分解重构

图4给出了一、二维图像处理的结果,图4a为原始图像( $256 \times 256 \times 8$  bits);图4b为分辨率 $J=2$ 时的模糊分量 $A_2 f$ 和细节信号 $D_2^0 f$ 、 $D_2^1 f$ ;图4c为重构的原始图像(注:为了方便照像,我们对细节信号的灰度级作了适当提高)。

从实验结果可以看出,1) 信号能按不同频带和不同的分辨率进行分解,实现了多通道多分辨率的分解处理,同时信号也能很好地进行重构;2) 由于信号是进行多通道分解,所以信号按不同频带分解的速度很快,这对研究信号的局部性,特别是对窄带高频信号的研究是非常有用的。



(a) 原始图像

(b)  $J=2$  时的模糊分量与细节信号

(c) 重构图像

图4 一、二维图像处理

## 参 考 文 献

- 1 Jawerth B, Sweldens, W. An overview of wavelet based multiresolution analysis. *SIAM* 1994, 36 : 377~412
- 2 Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm Pur App Math*, 1988, 41 : 909~996
- 3 Mallat S G. A theory for multiresolution signal decomposition; the wavelet representation. *IEEE Tran Patt Anal Mach Intell*, 1989, 11 : 674~693
- 4 Steffen P, Heller P, Gopinath R A. Theory of regular M-band wavelet Bases. *IEEE Trans Signal Processing*, 1993, 41 : 3 497~3 511
- 5 Zou H, Tewfik A H. Discrete orthoynonal M-band wavelet decomposition. In *Proc ICASSP, San Francisco*, 1992, 4(IV) : 605~608
- 6 Mallat S G. Multifrequency channel decompositim of images and wavelet models. *IEEE Tran Acoust Spec Sign Proc*, 1989, 37 : 2 091~2 110

## M-Channel Multiresolution Signal Decomposition

Tang Xianghong Gong Yu Gong Yaohuan

(Dept. of Electronic Tech., UEST of China Chengdu 610054)

**Abstract** Wavelet transform, especially the multiresolution representation is a very effective tool for analyzing the information contents of a signal. Based on Mallat's multiresolution analysis, this paper discusses the theoretical analysis of M-channel multiresolution signal decomposition, proposes a new algorithm for realizing the theory, studies the properties of an operator which approximates a signal at a given resolution, and describes experimental results. The results shows that the signals can be decomposed and reconstructed by M-channel multiresolution representation. The algorithm is proved to be simple, reliable and very useful for signal processing.

**Key words** signal analysis; mother wavelet; wavelet transform; channel; multiresolution analysis

编辑 徐安玉