双线性变结构系统的稳定性及滑动模态

郭天石*
(四川轻化工学院机械工程系 自贡 643033)

【摘要】 在常值变结构控制律的基础上选择与状态变量成比例的变结构控制律,使用李亚普诺夫函数方法,利用李亚普诺夫稳定性定理及滑动模态的存在及到达条件,研究一类单输入双线性系统的稳定性及滑动模态,得出了这类系统稳定性及产生滑动模态的定理。

关 键 词 双线性系统; 变结构; 比例控制; 稳定性; 滑动模态
中图分类号 TP271

1 问题的提出

研究单输入双线性系统[1] $$\dot{X} = AX + NXu + bu \tag{1}$$

式中 状态变量 $X \in R^n$; A、N 分别为 $(n \times n)$常值阵; b为 n维矢量; u为标量。

取变结构控制规律为 $$u = -k|x_i| \operatorname{sgn} S \quad k = \text{cons}\ t > 0 \tag{2}$$

设状态变量有界,即 $0 < x_{i\min} < |x_i| < x_{i\max}$。$S$为切换函数。显然,系统(1)的倍增控制项 NXu含有状态变量的二次幂,对状态变量不再是线性的,迭加控制 bu中含有状态变量的坐标。为了方便,我们仍然称系统(1)、(2)为双线性系统。下面研究这种系统的稳定性及滑动模态运动。

2 系统的稳定性

直接用李亚普诺夫方法求解所提出的问题。取李亚普诺夫函数为二次型

$$v = X^T VX \tag{3}$$

式中 V为一对称正定阵 $V^T = V > 0$, V为一正定函数。

不失一般性,设矩阵 A及 N稳定,即其特征值具有负实部。求出 v沿系统(1)、(2)解的时间导数

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \dot{X}^T VX + X^T V\dot{X} + (AX + NXu = bu)^T VX + X^T V(AX + NXu + bu) = \\ &X^T(A^T V + VA)X + X^T(N^T V + VN)Xu + (b^T VX + X^T Vb)u\end{aligned} \tag{4}$$

取切换函数[2] $$S = b^T VX \tag{5}$$

将式(5)及式(2)代入式(4)得

$$\dot{v} = X^T(A^T V + VA)X - kX^T(N^T V + VN)X|x_i| \operatorname{sgn} S - k(b^T VX + X^T Vb)|x_i| \operatorname{sgn} S \tag{6}$$

式中 对于第三项 $-k(b^T VX + X^T Vb)|x_i| \operatorname{sgn} S$,由于 $V^T = V$,所以 $b^T VX = X^T Vb$,即 $S^T = S$。因而

$$-k(b^T VX + X^T Vb)|x_i| \operatorname{sgn} S = -2|x_i| S \operatorname{sgn} S = -2|x_i||S| \leqslant 0 \tag{7}$$

这表明 $\dot{v}$的第三项半负定。现在考察 $\dot{v}$的前两项的符号。由于阵 A、N稳定,成立李亚普诺夫方程

$$A^T V + VA = -Q_1 \tag{8}$$

$$N^T V + VN = -Q_2 \tag{9}$$

1996年 10月 29日收稿

* 男 52岁 大学 副教授

给定任意的正定阵 $Q_1^T = Q_1 > 0$,式(8)可解出唯一正定阵 $V^T = V > 0$,适当选择 Q_1,可使解出的 V 保证式(9)的 Q_2 正定。于是,导数 $\dot{v}$ 的前两项可写成

$$-X^TQ_1X + kX^TQ_2X|x_i|\operatorname{sgn}S = -X^T(Q_1 - kQ_2|x_i|\operatorname{sgn}S)X \tag{10}$$

注意到 $$kQ_2|x_i|\operatorname{sgn}S = \begin{cases} kQ_2x_i & x_iS > 0 \\ -kQ_2x_i & x_iS < 0 \end{cases} \text{或} \ kQ_2|x_i|\operatorname{sgn}S = \begin{cases} kQ_2|x_i| & S > 0 \\ -kQ_2|x_i| & S < 0 \end{cases} \tag{11}$$

则式(10)可写成 $$-X^TQ_1X + kX^TQ_2X|x_i|\operatorname{sgn}S = -X^T(Q_1 \mp kQ_2x_i)X \tag{12}$$

当 $x_iS > 0$时,式(12)括号内取负号;当 $x_iS < 0$时,取正号。由于 Q_1、kQ_2 正定对称,只要满足条件

$$Q_1 - kQ_2|x_i| > 0 \tag{13}$$

则式(12)所表达的二次型负定,即导数 $\dot{v}$ 的前两项为负。式(7)已证 $\dot{v}$ 的第三项不大于零,从而导数 $\dot{v} < 0$,而函数 $v > 0$。由李亚普诺夫稳定性定理,系统(1)、(2)、(5)是李亚普诺夫渐近稳定的。

3 滑动模态运动

使用李亚普诺夫方法可以一次性解决变结构控制中滑动模态的存在、到达及其稳定性问题。构造李亚普诺夫函数

$$v_1 = \frac{1}{2}S^2 > 0 \tag{14}$$

计算 v_1 沿系统(1)、(2)、(5)解的时间导数

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 = S\dot{S} &= b^TVXb^TV(AX + NXu + bu) = \\ &Sb^TVAX - Sb^TVNXk|x_i|\operatorname{sgn}S - Sb^TVbk|x_i|\operatorname{sgn}S = \\ &Sb^TVAX - b^TVNXk|x_i||S| - b^TVbk|x_i||S|\end{aligned}$$

作线性变换

$$\begin{aligned} AX &= \lambda IX \\ NX &= \_\, IX \end{aligned} \tag{16}$$

由于阵 A 和 N 稳定,因而其特征值 λ 及 $\_$ 具有负实部,即 $\mathrm{Re}\lambda < 0$和 $\mathrm{Re}\_ < 0$,将式(16)代入式(15)得

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 = &Sb^TV\lambda IX - b^TV\_\,II\,k|x_i||S| - kb^TVb|x_i||S| = \\ &\lambda Sb^TVX - \_\,b^TVXk|x_i||S| - kb^TVb|x_i||S| = \\ &\lambda S^2 - k\_\,|x_i|S|S| - kb^TVb|x_i||S|\end{aligned} \tag{17}$$

将式(17)配成关于 $S|S|$ 的完整二次型。为此在式(17)中引入 $\pm S^2$, $\mathrm{T} = \mathrm{const} > 0$及 $\pm kb^TVb|S|^2$,得

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 = &\lambda S^2 + \mathrm{T}S^2 - k\_\,|x_i|S|S| - kb^TVb|S|^2 - \mathrm{T}S^2 + kb^TVb|S|^2 - kb^TVb|x_i||S| = \\ &-[-(\lambda + \mathrm{T})S^2 + k\_\,|x_i|S|S| + kb^TVb|S|^2] - (\mathrm{T} - kb^TVb)S^2 - kb^TVb|x_i||S|\end{aligned} \tag{18}$$

这里使用了 $|S|^2 = S^2$。注意到 $b^TVb > 0$, $k > 0$,所以 $-kb^TVb|x_i||S| \leqslant 0$

考察二次型

$$-(\lambda + \mathrm{T})S^2 + k\_\,|x_i|S|S| + kb^TVb|S|^2 \tag{19}$$

正定的条件如果满足

$$\begin{vmatrix} -(\lambda + \mathrm{T}) & \frac{1}{2}k\_\,|x_i| \\ \frac{1}{2}k\_\,|x_i| & kb^TVb \end{vmatrix} = -k(\lambda + \mathrm{T})b^TVb - \frac{1}{4}k^2\_^{\,2}x_i^2 > 0 \quad \lambda + \mathrm{T} < 0 \tag{20}$$

则二次型式(19)正定。$\dot{v}_1$ 中的第一项为负;再选取 T和 k,使满足条件

$$T - kb^T Vb > 0 \qquad T > kb^T Vb \tag{21}$$

注意到 $T + \lambda < 0$,又因为 $\lambda < 0$,所以 $T - |\lambda|_{\min} < 0$, $T < |\lambda|_{\min}$,于是得

$$kb^T Vb < T < |\lambda|_{\min} \qquad k < (b^T Vb)^{-1} |\lambda|_{\min} \tag{22}$$

式中 $b^T Vb$非奇异。这样,式(18)中第二项 $-(T - kb^T Vb)S^2 < 0$,从而使 $\dot{v}_1$为负。最终有

$$\dot{v}_1 = S\dot{S} < 0 \tag{23}$$

这正是滑动模态的到达及存在条件,由此得出结论:当满足条件(20)、(22)时,双线性变结构系统(1)、(2)、(5)将于有限时间到达切换面 $S = 0$,并在其上产生稳定的滑模运动。

4 关于控制律 $u = -k|x_i| \operatorname{sgn} S$

由于这种控制律直接与被控坐标成比例,直接反映被控坐标的变化,特别是取被控坐标为失调信号时,当失调信号较大,其控制作用较强;而当失调信号较小时,其控制作用减弱,较之采用常值切换控制 $u = -k \operatorname{sgn} S$,有利于降低抖振[3]。

在具体实施这种比例控制律时,既可以选择状态变量的一个固定分量作为控制信号,也可以切换地选取状态变量的若干分量作为控制信号,对于后一种控制策略,将另文阐述。

5 结 束 语

采用比例控制的双线性变结构系统,其增强控制项含有状态变量的二次幂,实际上是严重的非线性系统。使用李亚普诺夫直接方法得出了系统渐近稳定条件,也得出了在切换面上产生稳定滑模运动的条件。

参 考 文 献

1 Bruni C. Bilinear systems: an appealing class of "nearly linear" systems in theory and applications. IEEE Trans on Auto Contr, 1974, AC-19: 334~348

2 高为炳.变结构控制理论基础.北京:中国科学技术出版社,1990

3 郭天石,柏建国.直流电气传动的滑模变结构控制.智能控制与智能自动化.北京:科学出版社,1993,2 229~2 236

Stability and Sliding Mode of Proportional Variable Structure Control System with Bilinear

Guo Tianshi

(Dept. of Mechanics Engineering, SILICT Zigong 643033)

Abstract Upon the basis of the law about varible structure control with constant value, the control law of variable structure proportional to the state variables is chosen and Liapunov function method is employed. By applying Liapunov theorem and the conditions of existence and destination for sliding mode, the stability and sliding mode of a bilinear system with single input are studied. The theorem about stability and sliding mode for this kind of system is achieved.

Key words bilinear system; variable structure; proportional control; stability; sliding mode

编辑 叶 红