两个生产厂商条件下的古诺模型研究*

唐小我**
(电子科技大学管理学院 成都 610054)

【摘要】 研究了两个厂商条件下古诺模型的均衡解和动态变化过程,证明了无论第一个厂商关于产量作何种初始选择,均衡解都存在且唯一;还证明了厂商的产量变化过程必然是单调变化过程,拓展了关于古诺模型研究的有关结论,为多个厂商条件下的古诺模型研究提供了分析思路。

关 键 词 古诺模型; 均衡解; 动态分析
中图分类号 F016; F019. 2

1 古诺模型的基本假定和几个相关命题

西方经济学将寡头市场定义为少数厂商完全控制一个行业的市场结构。寡头市场被认为是一种普遍存在的市场。寡头市场的极限是双头市场,整个行业为两家厂商所控制。法国经济学家古诺(Augustin Curnot)最早提出了一个数学模型,用以考察一个行业中仅有两个生产厂商的所谓双头垄断的情况。该模型后来被命名为古诺模型。古诺模型假定,寡头市场仅有两个生产厂商,他们生产同质的产品;两个厂商的总成本和边际成本都为 0(注:这一假定并不是实质性的,也可以假定两个厂商以相同的成本进行生产,并且在所能涉及的任何产量范围内,单位成本是固定不变的);两个厂商都掌握市场需求情况,他们都面临共同的线性需求曲线;各厂商根据对手采取的行动,并假定对手继续如此行事,来作出自己的决策。

现假定寡头市场上有两个厂商,记为厂商 A 和厂商 B,他们共同面临的线性需求曲线的方程为

$$P = a - bQ \tag{1}$$

式中 P 和 Q 分别为产品的价格和产量,a 和 b 均为正的常量。在式(1)中令 $P=0$,可得 $Q=a/b$。记 $d=a/b$,则 d 显然代表市场容量。

为便于下文的分析,我们先给出几个命题。

命题 1 当只有一个厂商时,使收益最大化的产量为 $Q=a/(2b)=d/2$,即最佳产量为市场容量的一半。

证明 总收益 $TR=PQ=(a-bQ)Q=aQ-bQ^2$。使 TR 最大化的条件为 $\frac{\mathrm{d}TR}{\mathrm{d}Q}=0$,即 $a-2bQ=0$,即 $Q=a/2b$。 证毕

命题 2 设厂商 A 的产量为 Q_A,则使厂商 B 的收益达到最大的产量为 $Q_B=(d-Q_A)/2$,即 Q_B 为剩余市场容量的一半。

证明 厂商 B 的总收益为 $TR_B=PQ_B=[a-b(Q_A+Q_B)]Q_B=(a-bQ_A)Q_B-bQ_B^2$。使 TR_B 达到最大的条件为 $\frac{\mathrm{d}TR_B}{\mathrm{d}Q_B}=0$,即 $a-bQ_A-2bQ_B=0$,即 $Q_B=\frac{a-bQ_A}{2b}=\frac{a}{2b}-\frac{Q_A}{2}=\frac{d}{2}-\frac{Q_A}{2}=\frac{1}{2}(d-Q_A)$。

证毕

1996年 1月 29日收稿, 1996年 4月 2日修改定稿
* 国家教委博士点基金资助项目
** 男 41岁 博士 教授

命题 3 在厂商 A 或厂商 B 的产量发生变化时,各厂商的最优决策行动按如下规则给出:

结论 1 设厂商 A 的产量减少(或增加)ΔQ_A,则厂商 B 的产量将增加(或减少)$\Delta Q_A/2$;

结论 2 设厂商 B 的产量增加(或减少)$\Delta Q_B/2$,则厂商 A 的产量将减少(或增加)$\Delta Q_B/2$

证明 下面仅就结论 1加以证明。

设厂商 A 的产量减少 ΔQ_A,则厂商 A 的产量将变为 $Q'_A = Q_A - \Delta Q_A$。设厂商 B 相应地调整其产量为 Q'_B,则根据命题 2,厂商 B 为获得最大收益应使 Q'_B 满足

$$Q'_B = \frac{1}{2}(d - Q'_A) = \frac{1}{2}[d - (Q_A - \Delta Q_A)] =$$

$$\frac{1}{2}(d - Q_A) + \frac{1}{2}Q_A = Q_B + \frac{1}{2}Q_A$$

设厂商 A 的产量增加 ΔQ_A,类似地可以证明必有 $Q'_B = Q_B - \frac{1}{2}Q_A$ 证毕

2 第一个厂商作最佳初始选择条件下的均衡解

设厂商 A 首先进入市场,为使收益最大化,根据命题 1,他选择的产量应为 $Q_A(1) = \frac{a}{2b} = \frac{d}{2}$ 厂商 B 进入市场时,根据命题 2,为使收益最大化,他选择的产量应为 $Q_B(1) = \frac{1}{2}[d - Q_A(1)] = \frac{1}{4}d$ 当厂商 B 进入市场后,其产量由 0变为 $\frac{1}{4}d$,产量的增加量为 $\frac{1}{4}d$ 根据命题 3的结论 2,厂商 A 的产量将减少 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}d$ 因此厂商 A 的产量将调整为 $Q_A(2) = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}\frac{1}{4}d$ A 厂商的产量减少 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}d$ 后,根据命题 3的结论 1,厂商 B 的产量将增加 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{4}d = (\frac{1}{4})^2 d$,即厂商 B 的产量将调整为 $Q_B(2) = \frac{1}{4}d + (\frac{1}{4})^2 d$ 经类似分析可以得知,厂商 A 和厂商 B 的产量将再次分别调整到 $Q_A(3) = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}\frac{1}{4}d - \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^2 d$, $Q_B(3) = \frac{1}{4}d + (\frac{1}{4})^2 d + (\frac{1}{4})^3 d$ 一般地,第 n 次调整后,厂商 A 和厂商 B 的产量将分别调整为

$$Q_A(n) = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}\frac{1}{4}d - \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^2 d - \cdots - \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^n d \tag{2}$$

$$Q_B(n) = \frac{1}{4}d + (\frac{1}{4})^2 d + (\frac{1}{4})^3 d + \cdots + (\frac{1}{4})^n d \tag{3}$$

经过无数次调整后,厂商 A 和厂商 B 的产量将调整到均衡产量 Q_A 和 Q_B Q_A 和 Q_B 由式(4)给出

$$Q_A = \lim_{n\to\infty} Q_A(n) = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}d\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^n = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}d\frac{1}{3} = \frac{1}{3}d \tag{4}$$

$$Q_B = \lim_{n\to\infty} Q_B(n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^n d = \frac{1}{3}d \tag{5}$$

上述计算结果表明,当第一个厂商首次进入市场选择收益最大化产量 $Q_A(1) = \frac{d}{2}$ 时,两个厂商的均衡产量相等,都为市场容量的三分之一。

3 第一个厂商作任意初始选择条件下的均衡解和动态变化分析

在求古诺模型的均衡解时,文献[1,2]均假定第一家厂商首次进入市场时,选择的产量为市场

容量的一半,即选择 $Q_1(1)=d/2$。事实上,第一家厂商在首次进入市场时,可以在 $(0,d)$范围内任选择初始产量,不同的选择都将导致同样的均衡解。下面我们用差分方程方法分析古诺模型,得出一些新的结论。

假设第一个厂商(设为厂商 A)首次进入市场的产量为 $Q_1(1)$。根据命题 2,第二个厂商(设为厂商 B)首次进入市场时的产量为 $Q_2(1)=[d-Q_1(1)]/2$。随后,厂商 A的产量将调整为 $Q_1(2)=[d-Q_2(1)]/2$,厂商 B的产量将调整为 $Q_2(2)=[d-Q_1(2)]/2$。经过 m次调整后,厂商 A和厂商 B的产量将分别调整为

$$Q_1(m)=\frac{1}{2}[d-Q_2(m-1)]=\frac{d}{2}-\frac{1}{2}Q_2(m-1) \tag{6}$$

$$Q_2(m)=\frac{1}{2}[d-Q_1(m)]=\frac{d}{2}-\frac{1}{2}Q_1(m) \tag{7}$$

将式(6)和式(7)写成向量形式可得

$$\begin{bmatrix} Q_1(m) \\ Q_2(m) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1(m) \\ Q_2(m) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1(m-1) \\ Q_2(m-1) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1(m) \\ Q_2(m) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1(m-1) \\ Q_2(m-1) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} Q_1(m) \\ Q_2(m) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1(m-1) \\ Q_2(m-1) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1(m-1) \\ Q_2(m-1) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{4} \end{bmatrix} \tag{8}$$

记 $Q(m)=\begin{bmatrix} Q_1(m) \\ Q_2(m) \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{4} \end{bmatrix}$,则式(8)可以写成

$$Q(m)=DQ(m-1)+E \tag{9}$$

由式(9)可得

$$Q(m)=D^{m-1}Q(1)+D^{m-2}E+D^{m-3}E+\cdots+D^2E+DE+E=$$

$$D^{m-1}Q(1)+\sum_{i=0}^{m-2}D^iE \tag{10}$$

容易证明 $D^i=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^{i-1} \\ 0 & (\frac{1}{4})^i \end{bmatrix}$,从而有

$$D^{m-1}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^{m-2} \\ 0 & (\frac{1}{4})^{m-1} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\sum_{i=0}^{m-2} D^i = I + \sum_{i=1}^{m-2} D^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{m-2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^{i-1} \\ 0 & (\frac{1}{4})^i \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3}[1-(\frac{1}{4})^{m-2}] \\ 0 & 1+\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{4})^{m-2}] \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\sum_{i=0}^{m-2} D^i E = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3}[1-(\frac{1}{4})^{m-2}] \\ 0 & 1+\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{4})^{m-2}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{4} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}d+\frac{1}{6}(\frac{1}{4})^{m-2}d \\ \frac{1}{3}d-\frac{1}{12}(\frac{1}{4})^{m-2}d \end{bmatrix} \tag{13}$$

将式(1)和式(13)代入式(10)可得

$$Q(m) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^{m-2} \\ 0 & (\frac{1}{4})^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(1) \\ Q_2(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}d+\frac{1}{6}(\frac{1}{4})^{m-2}d \\ \frac{1}{3}d-\frac{1}{12}(\frac{1}{4})^{m-2}d \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^{m-2}Q_2(1)+\frac{1}{3}d+\frac{1}{6}(\frac{1}{4})^{m-2}d \\ (\frac{1}{4})^{m-1}Q_2(1)+\frac{1}{3}d-\frac{1}{12}(\frac{1}{4})^{m-2}d \end{bmatrix}$$

即

$$Q_1(m) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^{m-2}Q_2(1)+\frac{1}{3}d+\frac{1}{6}(\frac{1}{4})^{m-2}d \tag{14}$$

$$Q_2(m) = (\frac{1}{4})^{m-1}Q_2(1)+\frac{1}{3}d-\frac{1}{12}(\frac{1}{4})^{m-2}d \tag{15}$$

将 $Q_2(1)=[d-Q_1(1)]/2$ 代入式(14)和式(15)可得

$$Q_1(m) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^{m-2}\frac{1}{2}[d-Q_1(1)]+\frac{1}{3}d+\frac{1}{6}(\frac{1}{4})^{m-2}d =$$

$$(\frac{1}{4})^{m-1}[Q_1(1)-\frac{1}{3}d]+\frac{1}{3}d \tag{16}$$

$$Q_2(m) = (\frac{1}{4})^{m-1}\frac{1}{2}[d-Q_1(1)]-\frac{1}{12}(\frac{1}{4})^{m-2}d+\frac{1}{3}d =$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^{m-1}[\frac{1}{3}d-Q_1(1)]+\frac{1}{3}d \tag{17}$$

式(16)和式(17)给出了厂商 A 和厂商 B 的产量的变动规律。令 m 趋于无穷大,如果由式(16)和式(17)所确定的 $Q_1(m)$ 和 $Q_2(m)$ 的极限存在,则均衡解存在,且极限就是均衡产量。对于给定的需求曲线方程 $P=a-bQ$, a, b 是常量,从而市场容量 $d=a/b$ 也是一个常量。对于任意给定的第一家厂商的初始选择产量 $Q_1(1)\in(0,d)$, $Q_1(1)-\frac{1}{3}d$ 是常量,从而由式(16)和式(17)可以得到

$$\lim_{m\to\infty} Q_1(m) = \lim_{m\to\infty}\left\{(\frac{1}{4})^{m-1}[Q_1(1)-\frac{1}{3}d]+\frac{1}{3}d\right\} =$$

$$[Q_1(1)-\frac{1}{3}d]\lim_{m\to\infty}(\frac{1}{4})^{m-1}+\frac{1}{3}d =$$

$$[Q_1(1)-\frac{1}{3}d]\cdot 0+\frac{1}{3}d=\frac{1}{3}d \tag{18}$$

$$\lim_{m\to\infty}Q_2(m)=\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^{m-1}[\frac{1}{3}d-Q_1(1)]+\frac{1}{3}d\right\}=$$
$$\frac{1}{2}[\frac{1}{3}d-Q_1(1)]\lim_{m\to\infty}(\frac{1}{4})^{m-1}+\frac{1}{3}d=$$
$$\frac{1}{2}[\frac{1}{3}d-Q_1(1)]0+\frac{1}{3}d=\frac{1}{3}d \tag{19}$$

式(18)和式(19)表明,无论第一家厂商在首次进入市场时的产量 $Q_1(1)$是否为市场容量的二分之一,只要产量 $Q_1(1)$满足 $0<Q_1(1)<d$,古诺模型的均衡解都存且唯一,且两个厂商的均衡产量相等,都等于 $d/3$,即都等于市场容量的三分之一。

下面我们再来考察古诺模型中厂商产量的动态变化过程。

由式(16)和式(17)可以得到

$$Q_1(m+1)=(\frac{1}{4})^m[Q_1(1)-\frac{1}{3}d]+\frac{1}{3}d$$

$$Q_2(m+1)=\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^m[\frac{1}{3}d-Q_1(1)]+\frac{1}{3}d$$

从而有

$$Q_1(m+1)-Q_1(m)=[(\frac{1}{4})^m-(\frac{1}{4})^{m-1}][Q_1(1)-\frac{1}{3}d]=$$
$$3(\frac{1}{4})^m[\frac{1}{3}d-Q_1(1)] \tag{20}$$

$$Q_2(m+1)-Q_2(m)=\frac{1}{2}[(\frac{1}{4})^m-(\frac{1}{4})^{m-1}][\frac{1}{3}d-Q_1(1)]=$$
$$\frac{3}{2}(\frac{1}{4})^m[Q_1(1)-\frac{1}{3}d] \tag{21}$$

由式(6)和式(17)可以看出 $Q_1(1)$对两个厂商的产量变化规律有影响。

当 $Q_1(1)$小于均衡产量,即 $Q_1(1)<d/3$时,由式(20)和式(21)可以得到

$$Q_1(m+1)-Q_1(m)>0 \tag{22}$$
$$Q_2(m+1)-Q_2(m)<0 \tag{23}$$

式(22)表明,第一个厂商的产量将是严格单调递增的,而式(23)表明第二个厂商的产量将是严格单调递减的。

当 $Q_1(1)$大于均衡产量,即 $Q_1(1)>\frac{d}{3}$时,由式(20)和式(21)可以得到

$$Q_1(m+1)-Q_1(m)<0 \tag{24}$$
$$Q_2(m+1)-Q_2(m)>0 \tag{25}$$

式(25)表明,第一个厂商的产量将是严格单调递减的,而式(26)表明第二个厂商的产量将是严格单调递增的。

当 $Q_1(1)$等于均衡产量,即 $Q_1(1)=\frac{d}{3}$时,由式(20)和式(21)可以得到

$$Q_1(m+1)=Q_1(m)=\frac{1}{3}d \tag{26}$$

$$Q_2(m+1)=Q_2(m)=\frac{1}{3}d \tag{27}$$

式(26)和式(27)表明,第一个厂商和第二个厂商的产量不变,都保持在均衡产量水平。换言之,两个厂商的产量没有动态变化过程,一开始就达到了均衡状态。

综上所述,我们可以得到以下结论

1) 在两个生产厂商的条件下,无论第一个厂商关于产量作何种初始选择,古诺模型的均衡解存在且唯一;

2) 在第一个厂商作产量的初始选择 $Q_1(1)=\frac{1}{3}d$ 时,两个厂商一开始就达到了均衡。在第一个厂商作产量的初始选择 $Q_1(1)\neq\frac{d}{3}$ 时,两个厂商产量的均衡过程是一个无穷过程,产量序列都是严格单调序列,且一个厂商的产量序列是严格单调递减(递增),则另一个厂商的产量序列必然是严格单调递增(递减)。

4 结束语

本文利用差分方程方法分析了两个厂商条件下的古诺模型的均衡解和产量序列动态变化过程,得出了一些新的结论。本文的研究方法和研究成果可以推广到任意有限多个厂商条件下古诺模型的研究。关于这一推广,作者将另文加以研究。

参 考 文 献

1 梁东黎,刘 东.微观经济学.南京:南京大学出版社,1991

2 高鸿业,吴易风.现代西方经济学(下册).北京:经济科学出版社,1990

Study on Cournot Model with Two Firms

Tang Xiaowo

(Management College, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract This paper studies the equilibrium solution of Cournot model and the dynamic changes of the outputs of the firms concerned. It is proved that the equilibrium solution exists and is uniqe for any inital output choice of the first firm. It is also proved that the outputs of the two firms concerned strictly monotonicly decrease or increase. The results lay a good foundation for the further study of Cournot model with several firms.

Key words Cournot model; equilibrium solution; dynamic analysis

编辑 叶 红