关于一个线性算子群的问题

张利勋*
(电子科技大学应用数学系 成都 610054)

【摘要】 在一个线性算子群应用于二阶线性发展方程求解的思路基础上[1],归纳其中的生成算子为 n 阶矩阵形式,进一步提出了该生成算子的线性算子群,在巴拿赫空间中证明了这个线性算子群的基本特征,且是高阶线性发展方程求解理论的基础部分。当然,低阶线性发展方程的解为其特殊情况。

关 键 词 线性算子半群; 线性算子群; 生成算子; 线性发展方程
中图分类号 O 177. 1

线性算子半群理论在本世纪 40年代后期由 E. Hille与 E. Yosida分别建立[2],他们引入线性算子半群的生成算子的概念,研究生成算子的特征和线性算子半群的可微性,得到一次发展方程的解用线性算子半群表示出来的公式。J. A. Goldstein在 1969年给出一个二阶算子矩阵生成的线性算子群,并研究其基本特征,然后应用于二阶线性发展方程求解中,得到该方程的解[1]。本文归纳文献 [1, 2]中生成算子为一般情形,并提出该生成算子的线性算子群,在巴拿赫空间中证明了它具有的基本特征。这样,高阶线性发展方程的解可用公式表述了。

1 Banach空间

在 Banach空间 E 中,零点在预解集 $d(B)$中, B^n (n 为自然数)的定义域 $D(B^n)$, $D(B^n)\subseteq E$, B^n 是闭稠线性算子。

$$\|x\|_{B^n} = (\|x\|^2 + \|B^n x\|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall x \in D(B^n)$$

则 $D(B^n)$在范数 $\|\circ\|_{B^n}$下是 Banach空间。

记: $D(B^{n-1})\times D(B^{n-2})\times\cdots\times D(B)\times E = E_{n-1}$, $\forall y = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E_{n-1}$

$$\|y\|_{E_{n-1}} = \Big(\sum_{i=1}^{n-1}\|x_i\|^2_{B^{n-i}} + \|x_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

在该范数下, E_{n-1}是 Banach空间。

2 引理和定理

引理 1 $D(B^n)\times D(B^{n-1})\times\cdots\times D(B)$在 E_{n-1}中稠密。

引理 2 $Ix = x$, $\forall x \in E$

$$C_k = \begin{bmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{bmatrix}_{k\times k} \qquad B^n C_k = \begin{bmatrix} B^n & & & \\ & B^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & B^n \end{bmatrix}_{k\times k}$$

1996年 4月 9日收稿
* 男 26岁 硕士

$$N_k = \begin{bmatrix} 0 & C_{n-k} \\ B^n C_k & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

那么
$$N_k N_m = \begin{cases} N_{k+m} & (k+m<n) \\ B^n N_{k+m-n} & (k+m\geqslant n) \end{cases}$$

定理 设 $\{\exp(tB); t\in R^1\}$是以 B 为生成算子的线性算子群, $0\in P(B)$
$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & C_{n-1} \\ B^n & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$
M_n 具有定义域 $D(M_n)=D(B^n)\times D(B^{n-1})\times\cdots\times D(B)\subseteq E_{n-1}$,则 M_n 生成 E_{n-1}中线性算子群 $\{\exp(tM_n); t\in R^1\}$, $0\in \mathrm{d}(M_n)$
$$\exp(tM_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1} B^{-k}\exp[t\exp(\mathrm{i}\frac{2m\pi}{n})B - \mathrm{i}\frac{2km\pi}{n}]N_k$$
这里, $\mathrm{i}^2=-1$, C_{n-1}, N_k 是引理 2中的算子。

3 引理和定理的证明

引理 1的证明 (用数学归纳法) 如果 $D(M_k)$在 E_k 中稠密,证明 $D(M_{k+1})$在 E_{k+1}中稠密,即证明 $D(B^{k+1})$在 $D(B^k)$中稠密。$BD(B^{k+1})=D(B^k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$, $\forall x\in D(B^{k+1})$,存在元列 $\{x_n\}\subseteq D(B^k)$使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|Bx_n-Bx\|_{B^{k-1}}=0$
$$\lim_{n\to\infty}\|B^kx_n-B^kx\|=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\|Bx_n-Bx\|=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|\leqslant\|B^{-1}\|\lim_{n\to\infty}\|Bx_n-Bx\|=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_{B^k}=\lim_{n\to\infty}(\|x_n-x\|^2+\|B^kx_n-B^kx\|^2)^{\frac{1}{2}}=0$$

引理 2的结果只须简单验证即可。

定理的证明

令
$$T_t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1} B^{-k}\exp[t\exp(\mathrm{i}\frac{2m\pi}{n})B - \mathrm{i}\frac{2km\pi}{n}]N_k$$
$$T_0 = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}N_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}B^{-k}N_k\exp^m(-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}) = N_0 = C_n$$
由于 $B\exp(tB)x=\exp(tB)Bx$, $\forall x\in D(B)$; $\forall t,s\in R'$ 及 $y=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E_{n-1}$。
$$T_tT_sy^{\mathrm{f}} = \frac{1}{n^2}\sum_{k,j,m,h=0}^{n-1}B^{-k-j}\exp[t\exp(\mathrm{i}\frac{2m\pi}{n})B + s\exp(\mathrm{i}\frac{2h\pi}{n})B - \mathrm{i}\frac{km+jh}{n}2\pi]N_kN_jy^{\mathrm{f}} =$$
$$\frac{1}{n^2}\Big[\sum_{m,h,k=0}^{n-1}\Big(\sum_{j=0}^{k}B^{-k}\exp(-\mathrm{i}\frac{k-j}{n}2m\pi) + \sum_{j=k+1}^{n-1}B^{-n-k}\exp(-\mathrm{i}\frac{n+k-j}{n}2m\pi)B^n\Big]\times$$
$$N_ky^{\mathrm{f}}\exp\Big[t\exp(\mathrm{i}\frac{2m\pi}{n})B + s\exp(\mathrm{i}\frac{2h\pi}{n})B - \mathrm{i}\frac{2jh\pi}{n}\Big] =$$
$$\frac{1}{n^2}\sum_{k,m,j=0}^{n-1}B^{-k}\exp[(t+s)\exp(\mathrm{i}\frac{2m\pi}{n})B]N_ky^{\mathrm{f}} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\substack{m,h=0\\ m\neq h}}^{n-1}B^{-k}N_ky^{\mathrm{f}}\exp\Big[t\exp(\mathrm{i}\frac{2m\pi}{n})B +$$
$$s\exp(\mathrm{i}\frac{2h\pi}{n})B - \mathrm{i}\frac{2km\pi}{n}\Big]\sum_{j=0}^{n-1}\exp^j(-\mathrm{i}\frac{h-m}{n}2\pi) =$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k,m=0}^{n-1}B^{-k}\exp\Big[(t+s)\exp(\mathrm{i}\frac{2m\pi}{n})B\Big]N_ky^{\mathrm{f}} = T_{t+s}y^{\mathrm{f}}$$

记
$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\exp\Big[t\exp(\mathrm{i}\frac{2m\pi}{n})B - \mathrm{i}\frac{2km}{n}\pi\Big]$$

$$T_t y^{f} = \begin{bmatrix} A_0 x_j + \sum_{k=2}^{n-j+1} B^{1-k} A_{k-1} x_{j-1+k} + \sum_{k=n-j+2}^{n} B^{n-k+1} A_{k-1} x_{k+j-n-1} \\ \cdots \\ A_0 x_n + \sum_{k=2}^{n} B^{n-k+1} A_{k-1} x_{k-1} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$\begin{aligned} \| T_t y^{f} \|_{E_{n-1}} = {} & [\| A_0 x_1 + \sum_{k=2}^{n} B^{1-k} A_{k-1} x_k \|^2_{B^{n-1}} + \sum_{j=2}^{n-1} (\| A_0 x_j + \sum_{k=2}^{n-1+j} B^{1-k} A_{k-1} x_{j-1+k} + \\ & \sum_{k=n-j+2}^{n} B^{n-k+1} A_{k-1} x_{k+j-n-1} \|^2_{B^{n-j}}) + \| A_0 x_n + \sum_{k=2}^{n} B^{n-k+1} A_{k-1} x_{k-1} \|^2]^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ & \| A_0 \| [\sum_{j=1}^{n} (\| x_j \| + \| B^{n-i} x_j \|) + \| x_n \|] + \sum_{k=2}^{n-1} \| A_{k-1} \| \{ (1 + \\ & \| B^{1-k} \|) [\sum_{j=1}^{n-k} (\| x_{k+j-1} \| + \| B^{n-k-j+1} x_{k+j-1} \|) + \| x_n \|] + \\ & (1 + \| B^{n-k+1} \|) \sum_{j=n-k+2}^{n-1} (\| x_{j+k-n-1} \| + \| B^{n-(j+k-n-1)} x_{j+k-n-1} \|) + \\ & \| x_{k-1} \| + \| B^{n-k+1} x_{k-1} \| \} + \| A_{n-1} \| [(1 + \| B^{1-n} \|) \| x_n \| + \\ & (1 + \| B \|) \sum_{j=1}^{n-1} (\| x_{j-1} \| + \| B^{n-j+1} x_{j-1} \|) + \| x_{n-1} \| + \| B x_{n-1} \|] \leqslant \\ & 2n \sum_{m=1}^{n} \| A_{m-1} \| \max\{1 + \| B^{1-m} \|, 1 + \| B^{n-m+1} \| \} \| y^{f} \|_{E_{n-1}} \end{aligned}$$

从 $\{\exp(tB); t \in R^1\}$ 的强连续知，$\{T_t; t \in R^1\}$ 是强连续。
综上得 $\{T_t; t \in R^1\}$ 是线性算子群，下面求生成算子

$$t^{-1}(T_t y^{f} - y^{f}) = t^{-1} \begin{bmatrix} A_0 x_j - x_j + \sum_{k=2}^{n-j+1} B^{1-k} A_{k-1} x_{j-1+k} + \sum_{k=n-j+2}^{n} B^{n-k+1} A_{k-1} x_{k+j-n-1} \\ A_0 x_n - x_n + \sum_{k=2}^{n} B^{n-k+1} A_{k-1} x_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$(j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} t^{-1} (A_0 x_j - x_j) = {} & \lim_{t \to 0} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} t^{-1} \{ \exp[t \exp(\mathrm{i} \frac{2m\pi}{n}) B] x_j - x_j \} = \\ & \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \exp(\mathrm{i} \frac{2m\pi}{n}) B x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

$$\lim_{t \to 0} t^{-1} B^{-1} A_1 x_j = \lim_{t \to 0} B^{-1} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \exp(-\mathrm{i} \frac{2m\pi}{n}) t^{-1} \{ \exp[t \exp(\mathrm{i} \frac{2m\pi}{n}) B] x_j - x_j \} = x_j$$

$$(j = 2, 3, \cdots, n)$$

$$\lim_{t \to 0} t^{-1} B^{n-1} A_1 x_1 = B^n \lim_{t \to 0} t^{-1} B^{-1} A_1 x_1 = B^n x_1$$

$$\lim_{t \to 0} t^{-1} B^j A_k x = 0 (R = 2, 3, \cdots, n-1, j \text{ 是整数}; x \in E)$$

$$\lim_{t \to 0} t^{-1} (T_t y^{f} - y^{f}) = (x_2, x_3, \cdots, x_n, B^n x_1)^{f} = M_n y^{f}$$

所以

$$D(M_n) \subseteq \{ y | y \in E_{n-1}, \lim_{t \to 0} t^{-1} (T_t y^{f} - y^{f}) \text{ 在 } E_{n-1} \text{ 中存在} \}$$

反之，设 $\lim_{t \to 0} t^{-1} (T_t y^{f} - y^{f}) = (V_1, V_2, \cdots, V_{n-1}, V_n)^{f}$。

由 T_t 的定义和上述求强极限的结果有

$$(V_1, V_2, \cdots, V_{n-1}, V_n)^{f} = (x_2 + \lim_{t \to 0} t^{-1} B^{1-n} A_{n-1} x_n, \cdots, \lim_{t \to 0} t^{-1} B^{-1} A_1 x_n, \lim_{t \to 0} t^{-1} A_1 B^{n-1} x_1 +$$

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}(A_0 x_n - x_n))^{\mathrm{f}}$$

因为 $V_{n-1}\in D(B)$,且 $V_{n-1}=\lim_{t\to 0} t^{-1}A_1B^{-1}x_n = x_n$,所以 $x_n\in D(B)$, $\lim_{t\to 0} t^{-1}B^{j-n}A_{n-j}x_n = 0$,其中 $j=1,2,\cdots,n$

令 $D_1=\{x\mid x\in E, \lim_{t\to 0} t^{-1}A_1 x$ 在 E 中存在}。显然 $D(B)\subseteq D_1$; $\forall x\in D_1$, $\sinh[t\exp(\mathrm{i}\frac{2m\pi}{n})B]x$ 在 $t=0$处强可导,所以 $\cosh[2t\exp(\mathrm{i}\frac{2m\pi}{n})B]x = 2\sinh^2[t\exp(\mathrm{i}\frac{2m\pi}{n})B]x + x$ 在 $t=0$处强可导,$\exp[t\exp(\mathrm{i}\frac{2m\pi}{n})B]x = \cosh[t\exp(\mathrm{i}\frac{2m\pi}{n})B]x + \sinh[t\exp(\mathrm{i}\frac{2m\pi}{n})B])]x$ 在 $t=0$处强可导,即 $x\in D(B)$; $D(B)\supseteq D_1$。

由 $V_n=\lim_{t\to 0} t^{-1}A_1B^{n-1}x_1$ 知 $B^{n-1}x_1\in D(B)$,于是 $x_1\in D(B^n)$,所以$(V_1, V_2,\cdots,V_n)^{\mathrm{f}}=(x_2,x_3,\cdots,x_n,B^n x_1)^{\mathrm{f}}$, $y^{\mathrm{f}}\in D(M_n)$

$$D(M_n)=\{y\mid y\in E_{n-1}, \lim_{t\to 0} t^{-1}(T_t y^{\mathrm{f}} - y^{\mathrm{f}}) = M_n y^{\mathrm{f}}\}$$

令

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & & & & B^{-n} \\ I & & & & \\ & I & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$\forall x\in D(M_n)$, $QM_n x^{\mathrm{f}} = x^{\mathrm{f}}$; $\forall x\in E_{n-1}$, $M_n Q x^{\mathrm{f}} = x^{\mathrm{f}}$,且易证 $\|Qx^{\mathrm{f}}\|^2_{E_{n-1}}\leqslant \max\{1,\|B^{-n}\|^2+\|B^{-1}\|\}\|x^{\mathrm{f}}\|^2_{E_{n-1}}$,因此算子 $M_n^{-1}=Q$是有界算子,即 $O\in \mathrm{d}(M_n)$。

感谢导师王康宁教授的关怀和指导。

参 考 文 献

1 Goldstein J A. Semigroups and second-order differential equations. J. Func Anal, 1969, 4: 50- 70
2 王康宁. 分布参数控制系统. 北京: 科学出版社, 1986

Question About A Linear Operation Group

Chang Lishun
(Dept. of Applied Mathematies, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract Based on idea of a linear operation group applied to the solution to secon-order linear evolution equation, the linear operation group is developed by the generating operator of the equation popularized n-order matrix and it's basic characters are also proved in Banach space, which are the key to the solvability of high-order linear evolution equations. The solution to low-order linear evolution equations is the special case of the linear operation group.

Key words linear operation semigroup; linear operation group; generating operator; linear evolution equation

编辑 徐培红