第 26卷 第 1期　　电子科技大学学报　　Vol. 26 No. 1
1997年 2月　　Journal of UEST of China　　Feb. 1997

具有时滞的非线性系统的 k-全局稳定性*

钟守铭**　　王 毅

(电子科技大学应用数学系 成都 610054)

【摘要】 研究了具有时滞的非线性系统的稳定性问题,利用不等式分析技巧和常数变易法,给出了具有时滞的非线性系统的 k-全局指数稳定性的充分条件。并举例说明了所得结论的优越性。

关 键 词 时滞; 非线性; 稳定性; 不等式分析法; 常数变易法

中图分类号 O231

具有时滞非线性系统的稳定性研究,在近几年来已经引起了自动控制界和应用数学界的极大兴趣,已有不少的研究成果问世[1,2],特别是在神经网络理论中有很好的应用前景。本文研究如下的非线性时滞系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{j=1}^{n} [f_{ij}(x_j(t)) + g_{ij}(x_j(t-\tau_{ij}))] & t \geqslant t_0 \\ x_i(t) = \varphi_i(t) & t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

式中 $f_{ij}(\circ)$、$g_{ij}(\circ)$在 R 上连续且保证系统(1)的解的存在唯一性,$f_{ij}(0) = g_{ij}(0) = 0(i, j = 1, 2, \cdots, n)$。$\varphi_i(t)(i = 1, 2, \cdots, n)$在区间 $[t_0 - \tau, t_0]$上连续,$\tau_{ij} \geqslant 0$为常数且 $\tau = \max\limits_{1 \leqslant i, j \leqslant n}\{\tau_{ij}\}$,并记

$$\|\varphi\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\sup_{t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0} |\varphi_i(t)|\}$$

我们采用不等式分析技巧和常数变易法来研究系统(1)的稳定性,获得了系统(1)的零解 k-全局稳定性的充分条件。最后举出两个例子来说明所得结论的优越性。

首先给出 k-全局指数稳定的定义。

定义 1 系统(1)的解称为是 k-全局指数稳定的,如果存在 $\lambda > 0, M \geqslant 1$,当 $\|\varphi\| < k$时,有

$$|x_i(t)| \leqslant M\|\varphi\| \exp[-\lambda(t - t_0)] \qquad t \geqslant t_0 \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

下面给出两个引理。

引理 1 设 $P_i(t)(i = 1, 2, \cdots, n)$是定义在 $[t_0 - \tau, +\infty)$上的非负连续函数,在 $[t_0, +\infty)$上满足不等式

$$\dot{P}_i(t) \leqslant -r_i P_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} P_{jt} h_{ij}(P_{jt}) \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

其中 $r_i > 0, \tau \geqslant 0$均是常数,$P_{jt} = \sup\limits_{-\tau \leqslant \theta \leqslant 0}\{P_j(t + \theta)\}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$,$h_{ij}(\circ)$是非负不减连续函数,$a_{ij} \geqslant 0(i, j = 1, 2, \cdots, n)$是常数,若存在 $k > 0$,使得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_{ij}(k) < r_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

1996年 3月 27日收稿

* 国家自然科学基金资助项目

** 男 41岁 大学 副教授

则当 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} P_{it_0} = \|\varphi\| < k$ 时,存在 $\lambda > 0$,使得

$$P_i(t) \leqslant \|\varphi\| \exp[-\lambda(t - t_0)] \qquad t \geqslant t_0 \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

类似于文献[3]中定理 1的证明可推知引理 1成立。

引理 **2** 设 $P_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$是定义在 $[t_0 - \tau, +\infty)$上的非负连续函数,在 $[t_0, +\infty)$上满足不等式

$$D^- P_i(t) \leqslant \sum_{j=1}^{n} [f_{ij}(P_j(t)) + g_{ij}(P_{jt})] \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{5}$$

其中 $f_{ij}(\cdot)(i \neq j)$、$g_{ij}(\cdot)$是非负不减的连续函数,$f_{ii}(\cdot)$是连续函数,若对所有 $\alpha \in [0, 1]$及 $l > 0$为常数,均有

$$\begin{cases} f_{ij}(\alpha l) \leqslant \alpha f_{ij}(l) \\ g_{ij}(\alpha l) \leqslant \alpha g_{ij}(l) \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{6}$$

$P_{jt} = \sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\{P_j(t + \theta)\}$,若存在常数 $k > 0$,使得

$$\sum_{j=1}^{n} [f_{ij}(k) + g_{ij}(k)] < 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{7}$$

则当 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}[\sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\{P_j(t + \theta)\}] = \|\varphi\| < k$ 时,存在 $\lambda > 0$,使得

$$P_i(t) < k \exp[-\lambda(t - t_0)] \qquad t \geqslant t_0, i = 1, 2, \cdots n \tag{8}$$

证明 由式(7)可知,存在充分小的 $\lambda > 0$,使得

$$\sum_{j=1}^{n} [f_{ij}(k) + g_{ij}(k \exp\lambda\tau)] + k\lambda < 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

若式(8)不成立,由于 $P_i(t) \leqslant \|\varphi\| < k(\forall t \in [t_0 - \tau, t_0])$,故当 $t \in [t_0 - \tau, t_0]$时,有式(8)成立,因而必存在 $t_1 > t_0$,及存在某个 i_0,使得

$$P_{i0}(t_1) = k \exp[-\lambda(t_1 - t_0)], P_{i0}(t) < k \exp[-\lambda(t - t_0)] \qquad t \in [t_0 - \tau, t_1)$$

及

$$P_j(t) \leqslant k \exp[-\lambda(t - t_0)] \qquad t \in [t_0 - \tau, t_1], j \neq i_0, j = 1, 2, \cdots, n$$

于是可知

$$D^- P_{i0}(t_1) \geqslant -\lambda k \exp[-\lambda(t_1 - t_0)] \tag{10}$$

另一方面,由式(5)、(6)及式(9),注意到 $f_{ij}(\cdot)(i \neq j)$和 $g_{ij}(\cdot)$的不减性,有

$$\begin{aligned} D^- P_{i0}(t_1) \leqslant & \sum_{j=1}^{n} [f_{ij}(k \exp[-\lambda(t_1 - t_0)]) + g_{ij}(\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\{P_i(t + \theta)\})] \leqslant \\ & \sum_{j=1}^{n} [f_{ij}(k) + g_{ij}(k \exp\lambda\tau)] \exp[-\lambda(t_1 - t_0)] < \\ & -\lambda k \exp[-\lambda(t_1 - t_0)] \end{aligned}$$

与式(10)矛盾,故不等式(8)成立。

1 主要结果

定理 **1** 如果系统(1)满足:

1) 若 $f_{ii}(x_i) = -r_i x_i + \bar{f}_{ii}(x_i)$, $f_{ij}(x_j) = \bar{f}_{ij}(x_j)$ $(i \neq j)$,其中 $r_i > 0$为常数; $i, j = 1, 2, \cdots, n$;

2) 若 $|\bar{f}_{ij}(x_j)| \leqslant |x_j| f^*_{ij}(|x_j|)$, $|g_{ij}(x_j)| \leqslant |x_j| g^*_{ij}(|x_j|)$,其中 $f^*_{ij}(\cdot)$、$g_{ij}(\cdot)$均是非负不减的连续函数; $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$;

3) 若存在常数 $k > 0$,使得

$$\sum_{j=1}^{n}[f_{ij}^{*}(k)+g_{ij}^{*}(k)]<r_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

则系统(1)的零解是 k-全局指数稳定的。

证明　将条件 1)代入系统(1),有

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-r_ix_i+\sum_{j=1}^{n}\left[\bar{f}_{ij}(x_j(t))+g_{ij}(x_j(t-\tau_{ij}))\right] \qquad i=1,2,\cdots,n$$

利用常数变易法后,两边再取绝对值,注意到条件 2)有

$$|x_i(t)|\leqslant\|\varphi\|\exp[-r_i(t-t_0)]+\sum_{j=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\exp[-r_i(t-s)][|x_j(s)|f_{ij}^{*}(|x_j(s)|)+$$
$$|x_j(s-\tau_{ij})|g_{ij}^{*}(|x_j(s-\tau_{ij})|)]\mathrm{d}s$$

令

$$P_i(t)=\begin{cases}\|\varphi\|\exp[-r_i(t-t_0)]+\sum\limits_{j=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\exp[-r_i(t-s)]\times \\ \quad[|x_j(s)|f_{ij}^{*}(|x_j(s)|)+|x_j(s-\tau_{ij})|g_{ij}^{*}(|x_j(s-\tau_{ij})|)]\mathrm{d}s & t\geqslant t_0 \\ \|\varphi\| & t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0\end{cases} \qquad i=1,2,\cdots,n$$

显然有

$$|x_i(t)|\leqslant P_i(t) \qquad t\geqslant t_0-\tau,\ i=1,2,\cdots,n$$

当 $t\geqslant t_0$ 时,两边对 $P_i(t)$ 求导,有

$$\dot{P}_i(t)\leqslant-r_iP_i(t)+\sum_{j=1}^{n}[P_j(t)f_{ij}^{*}(P_j(t))+P_j(t-\tau_{ij})g_{ij}^{*}(P_j(t-\tau_{ij}))]$$

由 $f_{ij}^{*}(\cdot)$、$g_{ij}^{*}(\cdot)$ 非负不减性及 $P_{jt}=\sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\{P_j(t+\theta)\}$ 可知

$$\dot{P}_i(t)\leqslant-r_iP_i(t)+\sum_{j=1}^{n}P_{jt}[f_{ij}^{*}(P_{jt})+g_{ij}^{*}(P_{jt})] \qquad i=1,2,\cdots,n$$

由条件 2)、3)可知,引理 1的条件均成立,故当 $\|\varphi\|<k$ 时,存在 $\varepsilon>0$,使得

$$|x_i(t)|\leqslant P_i(t)\leqslant\|\varphi\|\exp[-\varepsilon(t-t_0)] \qquad t\geqslant t_0,\ i=1,2,\cdots,n$$

由定义 1可知,系统(1)的零解是 k-全局指数稳定的。

定理 2　如果系统(1)满足:

1) $x_if_{ii}(x_i)<0(x_i\neq 0)$,且 $f_{ii}(x_i)\mathrm{sgn}(x_i)=f_{ii}^{*}(|x_i|)$, $i=1,2,\cdots,n$;

2) $|f_{ij}(x_j)|\leqslant f_{ij}^{*}(|x_j(t)|)(i\neq j)$, $|g_{ij}(x_j)|\leqslant g_{ij}^{*}(|x_j|)$, $(i,j=1,2,\cdots,n)$,其中 $f_{ij}^{*}(\cdot)(i\neq j)$、$g_{ij}^{*}(\cdot)$ 是非负单调不减连续函数;

3) 对所有的 $\alpha\in[0,1]$ 及 $l>0$ 为常数,有

$$\begin{aligned}f_{ij}^{*}(\alpha l)&\leqslant\alpha f_{ij}^{*}(l)\\ g_{ij}^{*}(\alpha l)&\leqslant\alpha g_{ij}(l)\end{aligned} \qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

4) 若存在 $k>0$,使得

$$\sum_{j=1}^{n}[f_{ij}^{*}(k)+g_{ij}^{*}(k)]<0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

则系统(1)的零解是 k-全局指数稳定的。

证明　令

$$P_i(t)=|x_i(t)| \qquad i=1,2,\cdots,n$$

对 $P_i(t)$ 两端求 Dini 导数,有

$$D^- P_i(t) = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\operatorname{sgn}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} [f_{ij}(x_j) + g_{ij}(x_j(t-\tau_{ij}))]\operatorname{sgn}(x_i) \leqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n} [f^*_{ij}(P_j(t)) + g^*_{ij}(P_{jt})] \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

由条件 1)~ 4)可知,引理 2的所有条件成立,故当 $\|\varphi\| < k$ 时,存在 $\lambda > 0$,使得

$$|x_i(t)| = P_i(t) < k\exp[-\lambda(t-t_0)] \qquad t \geqslant t_0, i = 1,2,\cdots,n$$

若 $\|\varphi\| = 0$ 时,有解 $x_i(t) = 0$,显然此解满足结论。

若 $\|\varphi\| \neq 0$ 时,令 $M = \frac{K}{\|\varphi\|} > 1$,于是有

$$|x_i(t)| < M\|\varphi\|\exp[-\lambda(t-t_0)] \qquad t \geqslant t_0, i = 1,2,\cdots,n$$

由定义 1可知,系统(1)的零解是 k-全局指数稳定的。

2 举 例

考虑如下具有时滞的非线性系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -x_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} [x_j^2(t) + 3x_j^2(t-\tau_{ij})\sin x_j(t-\tau_{ij})] & t \geqslant t_0 \\ x_i(t) = \varphi_i(t) & t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 \end{cases} \qquad i = 1,2,\cdots,n \quad (11)$$

其中 $\tau = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\{\tau_{ij}\}$,此时显然有

$$f^*_{ij}(|x_j|) = |x_j|$$
$$g^*_{ij}(|x_j|) = 3|x_j|$$

若当 $0 < k < \frac{1}{4n}$ 时,有

$$\sum_{j=1}^{n} [f^*_{ij}(k) + g^*_{ij}(k)] = 4nk < 1 = r_i \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

故由定理 1可知,系统(11)的零解是 k-全局指数稳定的。

考虑如下具有时滞的非线性系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -x_1^{1/3} + x_2^2 + x_1^2(t-\tau_{11})\sin x_1(t-\tau_{11}) + x_2^2(t-\tau_{12})\cos x_2(t-\tau_{12}) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_2^{1/3} + x_1^2 + x_1^2(t-\tau_{21})\sin x_1(t-\tau_{21}) + x_2^2(t-\tau_{22})\cos x_2(t-\tau_{22}) \end{cases} \qquad t \geqslant t_0 \quad (12)$$
$$x_i(t) = \varphi_i(t) \qquad t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 \qquad i = 1,2$$

其中 $\tau = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}\{\tau_{ij}\}$,而且有

$$f^*_{ij}(|x_i|) = -x_i^{1/3}\operatorname{sgn}(x_i) = -|x_i|^{1/3} (i = 1,2)$$
$$f^*_{ij}(|x_j|) = x_j^2 (i \neq j)$$
$$|g_{ij}(x_j)| \leqslant x_j^2 = g^*_{ij}(|x_j|) \qquad i,j = 1,2$$

显然 $f^*_{ij}(\circ)$、$g^*_{ij}(\circ)$满足定理 2的条件 2)、3),若 $0 < k < 3^{-\frac{3}{5}}$ 时,由定理 2可知,系统(12)的零解是 k-全局指数稳定的。

参 考 文 献

1 Hmamed A. On the stability of time-delay system: new result. Int J Control, 1986, 43: 321～324

2 Mori T, Noldus E, Kvcoahara M. A way to stabilize linear systems with delay state. Automatic, 1983, 19: 571

3 张 毅, 章 毅, 王慕秋. 非线性时滞微分不等式及其应用. 科学通报, 1993, 38(16): 1 455～1 458

k-Global Stability of Nonlinear System with Time-delay

Zhong Shouming Wang Yi

(Dept. of Applied Mathematics, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract In this paper, the problem of stability for the nonlinear system with time-delay is studied, Applying the inequality analytic method and the method of variation of parameters, the sufficient conditions of k-global exponential stability for the nonlinear system with time-delay are obtained. Examples are employed to illustrate the theory.

Key words time-delay; nonlinear; stability; inequality analytic method; the method of variation of parameters

编辑 徐培红

。科研成果介绍。

毫米波宽带低噪声放大器

主研人员: 薛良金 徐 静 罗慎独 延 波 薛 泉 刘述章

低噪声放大器是提高接收机灵敏度的关键部件。该成果使用 HP公司 HEMT器件,采用微带混合集成电路结构,设计、制作了宽带低噪声放大器。样品经检测认定,在 26.5～40 GHz频带内,增益 13.68 dB < Ga < 16.73 dB,噪声系数: 7.1 dB < NF < 8.8 dB, 1 dB压缩点: 12.5 dBm

高压 VDMOS开关电源及设计专用软件

主研人员: 吴 忠 程仁杰 石 文

高压 VDMOS开关电源为相移 PWM磁饱和零电压、零电流、全桥式交流—直流变换器实验样机。其开关频率为恒频 250 kHz,输入电压 180～250 V(AC),输出电压 42～56 V(DC),输出功率 1 000 W,输出纹波 100 mV,整机效率 90%。该实验样机利用谐振原理使用开关波形上、下沿发生谐振,从原理上克服了经典 PWM变换器和零电压谐振变换器的缺点,同时利用磁饱和特性,解决了普通相移 PWM变换器零电压范围小、占空比损失较大、电路环流大等不足。该机中所有功率 MOS开关均为低电压方波模式的零电压开关或零点流开关,降低了 VDMOS开关电压应力,减小了高频工作状态下 VDMOS开关的损耗,克服了变换器主要寄生参数(变压器漏感及漏源电容)的不利影响。利用相移 PWM磁饱和零电压或零电流谐振开关原理可形成一类新型变换器簇,便于采用简捷的恒频 PWM控制技术。

开关电源设计专用软件 SCAP、SACB、MCAD,可大大减轻设计人员的工作量、缩短样机的调试周期,从而缩短产品的开发周期,节省新产品开发费用,是开关电源设计人员有效的辅助工具。

相移 PWM磁饱和谐振开关交流—直流变换器设计先进、性能优良、采用的电路拓扑结构新颖,是达到高频小型化目的一种优选电路。该样机所采用的相移 PWM、软开关、零电压、零电流、磁饱和综合技术做成的开关电源主要技术属国内领先,达到国际 90年代先进水平。

。科 卞。