第26卷 第1期 电子科技大学学报 Vol. 26 No. 1
1997年2月 Journal of UEST of China Feb. 1997

强大数定律收敛速度的一个推广

陈良均* 王定成
(电子科技大学应用数学系 成都 610054)

【摘要】 文献[1]在文献[2]的基础上讨论了 Banach空间中随机变元列$\{X_i\}$满足一定条件时的完全收敛性,但收敛速度问题未得到圆满解决。文中进一步指出 Banach空间中独立非同分布随机变元列的收敛速度,将薛留根的结果推广,得到了满意的结果。

关 键 词 巴拿赫空间; ;随机变量; 强大数定律; 收敛速度; 矩
中图分类号 O152.4

1 定 理

设$\{X_i\}$为任意 Banach空间中随机变元列,又设对某个$r\in(0,1)$,存在随机变元X,使得当$E\|X\|^r<\infty$,且$P\{\|X_i\|\geqslant x\}\leqslant P\{\|X\|\geqslant x\}$,对任何$x\geqslant x_0>0$及$i\geqslant 1$成立,则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=o(n^{-(1-\frac{1}{r})}),\ \text{a. s} \tag{1}$$

2 定理的证明

记$\hat{S}_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$,则对每一$n\geqslant 1$,存在$k=k(n)$,使得

$$2^k\leqslant n<2^{k+1}$$

于是

$$\|n^{-\frac{1}{r}}\hat{S}_n\|\leqslant\max_{2^k\leqslant m\leqslant 2^{k+1}}\|\hat{S}_m\|/2^{\frac{k}{r}} \tag{2}$$

又记$X_{ki}=X_iI(\|X_i\|^r<2^k)$,$\hat{S}_{kn}=\sum_{i=1}^{n}X_{ki}$,从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(\max_{2^k\leqslant m<2^{k+1}}\|\hat{S}_m\|\geqslant 2^{\frac{k}{r}}X)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}P(\bigcup_{i=1}^{2^{k+1}}\{\|X_i\|^r\geqslant 2^k\})+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}P\{\max_{2^k\leqslant m<2^{k+1}}\|\hat{S}_{km}\|\geqslant 2^{\frac{k}{r}}X\}\triangleq L_1+L_2 \tag{3}$$

首先估计L_1

当$k\geqslant[r\log_2x_0]$时,由定理条件,有

$$P(\|X_i\|\geqslant 2^{\frac{k}{r}})\leqslant P(\|X\|\geqslant 2^{\frac{k}{r}}) \tag{4}$$

1996年10月3日收稿
* 男 52岁 大学 副教授

取 $k_1=[r\log_2 x_0]$,当 $k\geqslant k_1$ 时

$$L_1\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{k+1}}P(\|X_i\|\geqslant 2^{\frac{k+1}{r}})\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{k_1-1}\sum_{i=1}^{2^{k+1}}P(\|X_i\|\geqslant 2^{\frac{k+1}{r}})+\sum_{k=k_1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{k+1}}P(\|X_i\|\geqslant 2^{\frac{k}{r}})\leqslant$$

$$C+\sum_{k=k_1}^{\infty}2^{k+1}P(\|X_i\|\geqslant 2^{\frac{k}{r}})\leqslant$$

$$C+\sum_{k=1}^{\infty}2^{k+1}\sum_{j=k}^{\infty}P(2^{\frac{j}{r}}\leqslant\|X\|<2^{\frac{j+1}{r}})\leqslant$$

$$C+\sum_{j=1}^{\infty}P(2^{\frac{j}{r}}\leqslant\|X\|<2^{\frac{j+1}{r}})\sum_{k=1}^{j}2^{k+1}=$$

$$C+C\sum_{j=1}^{\infty}2^{j}P(2^{\frac{j}{r}}\leqslant\|X\|<2^{\frac{j+1}{r}})\leqslant C+CE\|X\|^{r}<\infty\qquad(5)$$

式中 C为常数.

下面估计 L_2. 当 $k\geqslant k_2=[r\log_2 x_0]+1$时,由分部积分公式,有

$$E\|X_i\|I[\|X_i\|^{r}<2^{k}]=-\int_{0<x<2^{\frac{k}{r}}}x\,\mathrm{d}P(\|X_i\|\geqslant x)\leqslant$$

$$-\int_{0<x<x_0}x\,\mathrm{d}P(\|X_i\|\geqslant x)-\int_{x_0\leqslant x<2^{\frac{k}{r}}}x\,\mathrm{d}P(\|X_i\|\geqslant x)\leqslant$$

$$x_0+x_0P(\|X_i\|\geqslant x)+\int_{x_0}^{2^{\frac{k}{r}}}P(\|X_i\|\geqslant x)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$x_0+x_0P(\|X\|\geqslant x)+\int_{x_0}^{2^{\frac{k}{r}}}P(\|X\|\geqslant x)\mathrm{d}x=$$

$$x_0+2^{\frac{k}{r}}P(\|X\|\geqslant 2^{\frac{k}{r}})-\int_{x_0}^{2^{\frac{k}{r}}}x\,\mathrm{d}P(\|X\|\geqslant x)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$x_0+2^{\frac{k}{r}}P(\|X\|\geqslant 2^{\frac{k}{r}})+E\|X\|I(\|X\|^{r}<2^{k})\qquad(6)$$

因此,由 Mapkob不等式与式(6)得

$$L_2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}E\max_{2^{k}\leqslant m<2^{k+1}}\|\hat{S}_{km}\|/(2^{\frac{k}{r}}\varepsilon)\leqslant$$

$$\sum_{k=k_2}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{k+1}}E\|X_i\|I(\|X_i\|^{r}<2^{k})/(2^{\frac{k}{r}}\varepsilon)+$$

$$\sum_{k=1}^{k_2-1}E\max_{2^{k}\leqslant m<2^{k+1}}\|\hat{S}_{km}\|/(2^{\frac{k}{r}}\varepsilon)=$$

$$\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\left\{x_0\sum_{k=k_2}^{\infty}2^{(1-\frac{1}{r})k}+\sum_{k=k_2}^{\infty}2^{k}P(\|X\|\geqslant 2^{\frac{k}{r}}\right\}+$$

$$\sum_{k=k_2}^{\infty}2^{(1-\frac{1}{r})k}E\|X\|I[\|X\|^{r}<2^{k}]+C\triangleq$$

$$\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)(x_0L_3+L_4+L_5)+C\qquad(7)$$

易知 $L_3<\infty$,再仿照式(5)的证明,易知

$$L_4<\infty\qquad(8)$$

对于 L_5 有

$$L_5=\sum_{k=k_3}^{\infty}2^{(1-\frac{1}{r})k}\sum_{j=1}^{k}E\|X\|I(2^{j-1}\leqslant\|X\|^r<2^j)+$$

$$\sum_{k=k_2}^{\infty}2^{(1-\frac{1}{r})k}E\|X\|I(0\leqslant\|X\|^r<1)\leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}E\|X\|I(2^{j-1}\leqslant\|X\|^r<2^j)\sum_{k=j}^{\infty}2^{(1-\frac{1}{r})k}+C\leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}2^{(1-\frac{1}{r})j}E\|X\|I(2^{j-1}\leqslant\|X\|^r<2^j)+C\leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}E\|X\|^rI(2^{j-1}\leqslant\|X\|^r<2^j)+C\leqslant E\|X\|^r+C<\infty \tag{9}$$

综合式(3)~(9),得

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(\max_{2^k\leqslant m<2^{k+1}}\|\hat{S}_m\|\geqslant 2^{\frac{k}{r}}X)<\infty$$

故 $\max_{2^k\leqslant m<2^{k+1}}\|\hat{S}_m\|/2^{\frac{k}{r}}\to 0$ a.s 当 $k\to\infty$ 带入式(2)可得

$$n^{-\frac{1}{r}}\hat{S}_n\to 0\quad \text{a.s}\qquad 当\ n\to\infty$$

即式(1)成立。 证毕

参 考 文 献

1 王定成,陈良均. Banach空间 φ-mixing序列的完全收敛性. 电子科技大学学报, 1996, 25(2): 216~219

2 薛留根. 混合序列强大数定律的收敛速度. 系统科学与数学. 1994, 14(3): 213~221

3 Loeve M. Probability Theory. VanNostrand, 1960: 242~248

A Development of Strong Large Number Law's Convergent Rates

Chen Liangjun Wang Dingcheng

(Dept. of Applied Mathematics, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract Based on the previous documentary, when the real random variable sequence satisfies the definite condition, the complete convergence is discussed. And this condition is the order of their finite moment which is less than one, but the problem of the convergent rate can't be finished absolutely. In this paper, the convergent rates of the random variabe sequence are point out. At last, when the order of their finite moment is less than one, the result obtained by Xue Liugen is generalized to Banach space and the results are also shown in this paper.

Key words Banach space; random variables; strong law of large numbers; convergence rate; moment

编辑 叶 红