第 26卷 第 2期　　电子科技大学学报　　Vol. 26 No. 2
1997年 4月　　Journal of UEST of China　　Apr. 1997

双线性比例变结构系统的循环进位控制

郭天石*
(四川轻化工学院机械工程系　自贡　643033)

【摘要】 提出了时间采样循环控制和状态变量循环控制的双进位控制算法,控制中状态变量的每个分量都对系统作用相同的时间,控制顺次轮流与状态变量的每个分量成比例。将一类特殊的双线性系统中的非线性简化成能精确递推求解的线性系统。引入旋转算子表达比例变结构的切换。提出了变结构变模态切换和数字模拟的结合控制,并给出这种控制策略的结构图。

关　键　词　双线性系统;　比例;　变结构;　循环进位控制
中图分类号　TP271

1 模　型

研究标准型单输入双线性系统[1]

$$\dot{X} = AX + PXu + bu \qquad Y = \mathrm{T}^T X \tag{1}$$

式中　状态变量 $X \in R^n$; A、P 分别为 $(n \times n)$常值阵; b为 n维矢量; u为标量; Y为输出; A、P、b、T 分别取如下形式

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{T}_{22} & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathrm{T}_{nn} \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ p_{21} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & p_{32} & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \cdots & p_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$b^T = [b_1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \qquad \mathrm{T}^T = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad \mathrm{T}_n]$$

取比例变结构控制律为[2]

$$u = -k|x_i| \operatorname{sgn} S \qquad k = \text{const} > 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

$$S = c_1 x_1 + c_2 x + \cdots + x_n \tag{3}$$

式中　S为切换函数。显然,式(1)的倍增控制项 PXu含有状态变量的二次幂,对状态变量不再是线性的,迭加控制项 bu中含有状态变量的坐标。为了方便,我们仍然称系统(1)、(2)为双线性系统。不失一般性,假定阵 A、P稳定,即它们的特征值具有负实部。本文研究了这种系统的控制策略。

2 控制策略

由于所给系统(1)为标准型双线性系统,其输出 $y = \mathrm{T}_n x_n$,仅与状态变量的一个分量成比例。如果采用输出反馈,则控制 $u = -k|x_n| \operatorname{sgn} S$,也仅与状态变量的一个分量成比例。我们希望采用状态反馈,使控制 u可以与状态变量的每一个分量成比例,对这种控制策略提出如下两条要求:

---

① 1996年 10月 29日收稿
* 男　52岁　大学　副教授

1) 使控制 $u=-k|x_i|\,\mathrm{sgn}S(i=1,2,\cdots,n)$中状态变量的每个分量 x_i 都对系统作用相同的时间;

2) 使控制 u 顺次轮流与状态变量的每个分量 x_i 成比例。

注意到变结构控制 $u=-k|x_i|\,\mathrm{sgn}S$,有

$$k|x_i|\,\mathrm{sgn}S=\begin{cases}kx_i & x_iS>0\\ -kx_i & x_iS<0\end{cases}\quad\text{或}\quad k|x_i|\,\mathrm{sgn}S=\begin{cases}k|x_i| & S>0\\ -k|x_i| & S<0\end{cases}\tag{4}$$

首先,设 $i=1$,即 $u=-k|x_1|\,\mathrm{sgn}S$ 且控制 u 的初值 $u=-k|x_1(t_0)|\,\mathrm{sgn}S=\pm kx_1(t_0)$已知,记为$\pm kx_1^*$,展开式(1)、(2)得

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}x_1\pm kx_1^*\\ \dot{x}_2=a_{22}x_2\pm kp_{21}x_1x_1^*\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \dot{x}_n=a_{nn}x_n\pm kp_{nn-1}x_{n-1}x_1^*\end{cases}\tag{5}$$

由式(5)中的第一个方程可解出 $x_1(t)$,由 $x_1(t_1)$与 t_0时刻的初值 x_1^* 通过第二个方程可解出 $x_2(t_1)$,继续递推由式(5)的最后一个方程可解出 $x_n(t_1)$。再将 $x_1(t_1)$代入控制 u,作为控制的新值顺次由式(5)解出 $x_1(t_2),x_2(t_2),\cdots,x_n(t_2)$。直到解出 $x_i(t_n),(i=1,2,\cdots,n)$。通过这种循环递推,可以求出任意时刻的 $X(t)$,从而求出 $y=T_n x_n$,其相应的结构图如图 1所示。

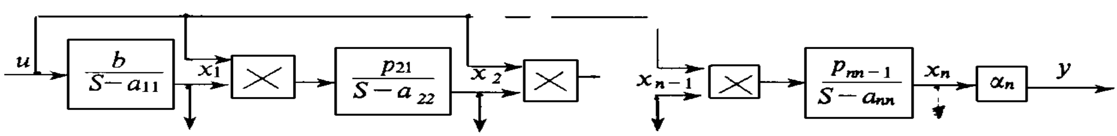

图 1 递推求解结构图

= = 当解出 $x_2(t_n),x_3(t_n),\cdots x_n(t_n)$时,将 $x_2(t_n)$作为控制 u 中 x_2 的初值,开始第二轮循环。控制 u 中状态变量的分量发生进位切换,变成 $i=2,u=-k|x_2|\,\mathrm{sgn}S$ 在 x_2 作用期间,系统依旧顺次解出各时刻的状态变量值,完成第二轮循环。控制 u 再度进位成与 x_3成比例,如此循环下去,当控制 u 进位成与 x_n 成比例且由 x_n 作用一轮后,系统的控制完成了一个大循环,返回到 $u=-k|x_1|\,\mathrm{sgn}S$,此后重复上述过程。

由图 1可见,在这种控制策略下,系统(1)或(5)由 n 个一阶环节组成,使原始系统的非线性得到简化,而且可以在给定的初始条件下获得精确解。注意到由于已设阵 A 稳定,所以对角阵 A 的元素 $a_{ii}<0$。

这种控制策略的优点在于,与状态变量的分量成比例的倍增控制和迭加控制共同作用获得下一个状态变量分量,可以获得状态变量的各个分量,这对于采用状态反馈是很适宜的。

3 旋转移位算子

上述控制策略中的两种转换,即每个状态变量的 n个时刻采样值的转换,和状态变量各个分量的顺次进位转换,可以通过两个相同的环形移位寄存器来实现。在表述上,定义一个旋转移位算子比较方便。旋转移位算子 $R^i,(i=0,1,\cdots,n)$,作用于行矢 $\lambda=[\lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \cdots\ \ \lambda_n]$将使行矢右旋 i 次,每次旋转使行矢的各分量分别右移一列,最后一列则转移至行矢的首列,即

$$R^j[\lambda] = R^i[\lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \cdots\ \ \lambda_n] = [\lambda_{n-i+1}\ \ \cdots\ \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } i+1\text{列}}}{\lambda_n}\ \ \lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \cdots\ \ \lambda_{n-i}] \tag{6}$$

例如

$$\begin{cases} R^0[\lambda] = R^0[\lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \cdots\ \ \lambda_n] = [\lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \cdots\ \ \lambda_n] \\ R^1[\lambda] = R^1[\lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \cdots\ \ \lambda_n] = [\lambda_n\ \ \lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \cdots\ \ \lambda_{n-1}] \\ \cdots\ \ \cdots\ \ \cdots \\ R^{n-1}[\lambda] = [\lambda_2\ \ \lambda_3\ \ \cdots\ \ \lambda_{n-1}\ \ \lambda_n\ \ \lambda_1] \\ R^n[\lambda] = [\lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \cdots\ \ \lambda_n] \end{cases} \tag{7}$$

特别地，用 R^i 作用于行矢 $I_{1\times n} = [1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0]$将使该行矢的第 $(i+1)$列元素为 1,其余各列元素为 0。于是有

$$x_i = R^{i-1}[I_{1\times n}]X \tag{8}$$

如果将时间序列 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 顺次排列成一个列矩阵 $T = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdots \\ t_n \end{bmatrix}$，则可类似地将任一时刻 t_i 表为

$$t_i = R^{i-1}[I_{1\times n}]T \tag{9}$$

于是，比例变结构控制律可表为

$$u = -k|x_i|\operatorname{sgn}S = -k|R^{i-1}[I_{1\times n}]X|\operatorname{sgn}S \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{10}$$

其相应的结构图如图 2所示。

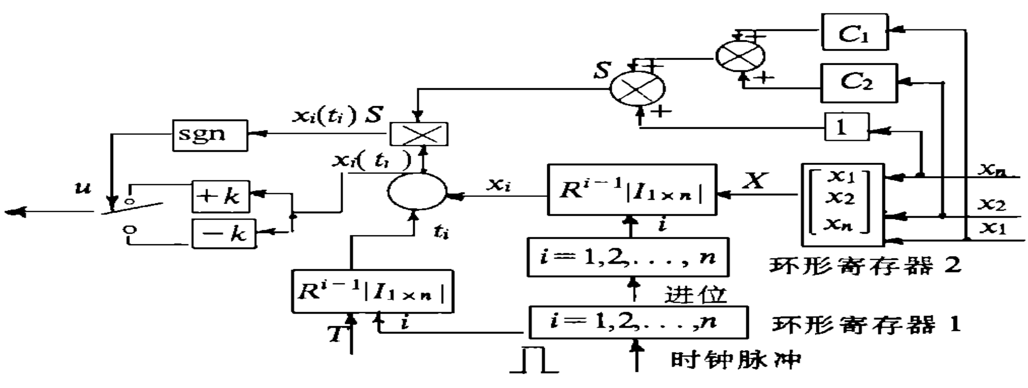

图 2　比例变结构控制生成结构图

4　关于比例变结构控制律 $u= -k|x_i|\operatorname{sgn}S$

图 2中的符号函数 sgn实际上是求取 $x_i(t_i)S$的符号，产生控制律 $u=\pm kx_i(t_i)$。当 $x_i(t_i)s>0$时，得 $u=-kx_i(t_i)$；当 $x_i(t_i)s<0$时，得 $u= tkx_i(t_i)$。与状态变量分量成比例的变结构控制律的正负可以不依赖于状态变量的绝对值符号，这一点从式(4)的左半部分也可看出。从变结构的角度看，系统(1)微分方程的右边由于控制 u的变号而呈现不连续，系统发生通常意义下的两种结构之间的切换。不仅如此，在每种结构中还包含了若干种模态之间的切换。在任一种结构中系统受到与当时刻状态变量的某一分量的值成比例的控制作用，形成一种模态，随着时间的推移，状态变量的分量

和该分量的取值都发生变化,构成了多种模态,可以把上述控制策略称为“变结构变模态控制”。 当然,这些模态最终都是处在稳定的滑动模态之下,有关双线性比例变结构控制系统的稳定性及滑动模态的存在和到达已有专文阐述。

这种变结构变模态控制的特点还在于,模态的切换实际上是由统一的时钟脉冲产生的。如果时钟脉冲的频率与系统的响应相匹配,则这种控制所引起的模态切换类似于数字控制;如果时钟脉冲的频率显著低于系统的最低响应频率,则模态的切换除受时脉冲的指令外,在一种模态之中,即在 $\Delta t = t_i - t_{i-1}$内,控制 $u = \pm kx_i(t)$,这是一种模拟控制,系统在这种控制下又具有模拟系统的特点。这种离散与连续、数字与模拟的结合蕴涵在一个系统之中,类似于物理学中对固体能带的描述。 这种数字与模拟的结合控制是通过时钟脉冲作用于旋转算子来方便实现的。 特别是对于那些速度很快的系统,这种数字与模拟的结合控制应当是有优点的,关于这方面的问题将另文阐述。

5 结 束 语

通过对一类特殊的标准型双线性系统施加变结构比例控制,使系统实现变结构模态切换,多种模态和结构的切换是通过时钟脉冲作用于旋转算子完成的。提出了这样一种控制图景:系统由两个结构组成,每个结构包含有多个模态,模态之间的切换既具有离散的数字特征,又具有连续的模拟特征,依靠改变外加时钟脉冲的频率可以实现这种数字控制与模拟控制的变换。

参 考 文 献

1 华向明.双线性系统建模与控制.上海:华东化工学院出版社,1990
2 高为炳.变结构控制理论基础.北京:中国科学技术出版社,1990

Cyclic Carry Control of Proportional Variable Structure System with Bilinear

Guo Tianshi
(Dept. of Mechanics Engineering, SILICT Zigong 643033)

Abstract Calculation of double carry control, a cyclic control for both time sample and state variable is presented. The nonlinearity in a special bilinear system is simplified to a linear system which could be solved exactly. The rotation operator is introduced to manifest the change of proportional variable structure. The combination control of mode change in variable structure and digit simulation is expressed. The structure diagram for the control design is shown.

Key words bilinear system; proportion; variable structure; cyclic carry control

编辑 徐培红