第 26卷 第 2期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol. 26 No. 2
1997年 4月　　Journal of UEST of China　　Apr. 1997

二度价格歧视情形下垄断厂商收益最大化条件*

唐小我**
(电子科技大学管理学院　成都　610054)

【摘要】 采用定量分析方法研究垄断厂商采用二度价格歧视条件下的收益变化,给出了收益最大化的条件,并给出了垄断厂商可能获得的最大收益。有关结论对厂商和消费者都有重要意义。

关　键　词　二度价格歧视;　垄断;　收益最大化
中图分类号　F038.2;　F016

1　三段定价条件下的垄断厂商收益分析

二度价格歧视是指垄断厂商把商品购买量划分为两个或两个以上的等级,对不同等级的购买量索取不同的价格。二度价格歧视较多地出现在社会公用事业中。现以电力公司为例对二度价格歧视作一个简单分析。假定每个家庭对电力的需求是相同的。家庭每月对电力的需求如图 1所示。在图 1中,D表示需求曲线;P表示价格;Q表示用电量。垄断厂商定价方法如下:当用电量为 Q_1(或不足 Q_1时),每千瓦时电的价格为 P_1;当用电量超过 Q_1达到 Q_2或不足 Q_2时,超过 Q_1部分的价格为 P_2;用电量超过 Q_2部分的价格为 P_3。如果每个家庭月用电量为 Q_3,则每个家庭所缴的总电费为 $f_1= P_1Q_1+ P_2(Q_2- Q_1)+ P_3(Q_3- Q_2)$。$f_1$实际上就是垄断厂商的总收益。如果电力公司只获准收取一种价格,则当用电量为 Q_3时,每千瓦时电的价格为 P_3。此时垄断厂商的总收益为 $f_2= P_3Q_3$。记 $f= f_1- f_2$,则 f表示垄断厂商从消费者处获得的消费者剩余,这部分消费者剩余就是垄断厂商因采用二度价格歧视所获得的收益。

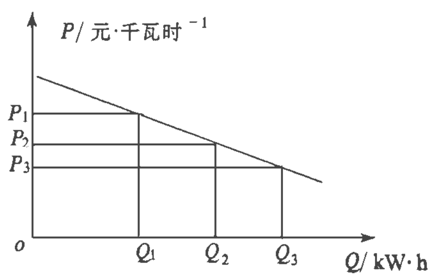

图 1　三段定价情形下的二度价格歧视

采用二度价格歧视的垄断厂商可以获得更多的收益,文献[1~3]都对此作过定性分析。但垄断厂商究竟可以多获得多少收益,至今还未见有任何定量分析的文献。本文将对此问题进行深入研究,给出一些新的结论。

假定每个家庭对电力的需求函数为

$$P = a - bQ \tag{1}$$

则垄断厂商多获得的收益为

$$f = f_1 - f_2 = P_1Q_1 + P_2Q_2 - P_2Q_1 - P_3Q_2 \tag{2}$$

将 $P_i= a- bQ_i (i= 1, 2, 3)$代入式(2)并化简可得

$$f = b(- Q_1^2 - Q_2^2 + Q_1Q_2 + Q_2Q_3) \tag{3}$$

在家庭每月总用电量 Q_3既定的条件下,f将取决于 Q_1和 Q_2,即取决于价目表的制定。下面来分析 f取极大值时,Q_1和 Q_2的取值。f取极大值时,Q_1和 Q_2必须满足如下一阶条件

① 1996年 3月 19日收稿
* 国家教委博士点基金资助项目
** 男　41岁　博士　教授

$$\frac{\partial f}{\partial Q_1} = -2bQ_1 + bQ_2 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Q_2} = -2bQ_2 + bQ_1 + bQ_3 = 0 \tag{5}$$

联立求解式 (4)和式 (5)可得 $Q_1 = \frac{1}{3}Q_3$, $Q_2 = \frac{2}{3}Q_3$。由上述计算结果可知, f 取最大值的必要条件 (可以证明该条件也为充分条件)为 Q_1、Q_2 和 Q_3 在需求量轴上呈等距分布。这一结论可以推广到 n 段定价的情形。

2 n段定价条件下的垄断厂商收益分析

设每个家庭的月用电量为 Q_n。垄断厂商的定价方法如下: 首先将 $(0, Q_n]$分为 n段,即 $(0, Q_n] = (0, Q_1] \cup (Q_1, Q_2] \cup (Q_2, Q_3] \cup \cdots \cup (Q_{i-1}, Q_i] \cup \cdots \cup (Q_{n-1}, Q_n]$,第 i段上的价格为 $P_i = a - bQ_i$。采用如此定价方法后,垄断厂商多获得的收益为

$$\begin{aligned} f(n) = {} & (P_1 - P_n)Q_1 + (P_2 - P_n)(Q_2 - Q_1) + (P_3 - P_n)(Q_3 - Q_2) + \cdots + \\ & (P_i i - P_n)(Q_i - Q_{i-1}) + \cdots + (P_{n-1} - P_n)(Q_{n-1} - Q_{n-2}) = \\ & b(Q_n - Q_1)Q_1 + b(Q_n - Q_2)(Q_2 - Q_1) + b(Q_n - Q_3)(Q_3 - Q_2) + \cdots + \\ & b(Q_n - Q_i)(Q_i - Q_{i-1} + \cdots + b(Q_n - Q_{n-1})(Q_{n-1}Q_{n-2}) \end{aligned} \tag{6}$$

将式 (6)化简后可得

$$f(n) = -b\sum_{i=1}^{n-1} Q_i^2 + b\sum_{i=2}^{n} Q_{i-1}Q_i \tag{7}$$

在 Q_n为既定的条件下,垄断厂商可以确定 Q_i $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$使 $f(n)$达到最大。使 $f(n)$达到最大的必要条件为 $\frac{\partial f(n)}{\partial Q_i} = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$即

$$\frac{\partial f(n)}{\partial Q_1} = b(Q_2 - 2Q_1) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial f(n)}{\partial Q_i} = b(Q_{i-1} + Q_{i+1} - 2Q_i) = 0 \qquad i = 2, 3, \cdots, n-1 \tag{9}$$

记 $n-1$阶矩阵 A, $n-1$维列向量 B和 C如下

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$B = [Q_1, Q_2, \cdots, Q_{n-2}, Q_{n-1}]^T \tag{11}$$

$$C = [0, 0, \cdots, 0, Q_n] \tag{12}$$

则式 (8)和式 (9)可以表示为如下矩阵方程

$$AB = C \tag{13}$$

可以证明 A的行列式为 $|A| = n$, A的第 $n-1$行各元素的代数余子式 $A_{n-1,j}$分别为 $A_{n-1,1} = 1$, $A_{n-1,2} = 2$, $A_{n-1,3} = 3, \cdots, A_{n-1,j} = j, \cdots, A_{n-1,n-1} = n-1$。因 $|A| = n \neq 0$,故 A为可逆矩阵,从而由式

(13)可得 $B=A^{-1}C=\frac{A^*}{|A|}C$,式中 A^* 为 A 的伴随矩阵。考虑到 C 中除第 $n-1$ 个元素不为零而其余元素都为零,即可得到

$$B=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{n-1,1} & Q_n \\ A_{n-1,2} & Q_n \\ A_{n-1,3} & Q_n \\ \vdots & \\ A_{n-1,n-1} & Q_n \end{bmatrix}=\frac{1}{n}\begin{bmatrix} Q_n \\ 2Q_n \\ 3Q_n \\ \vdots \\ (n-1)Q_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{n}Q_n \\ \frac{2}{n}Q_n \\ \frac{3}{n}Q_n \\ \vdots \\ \frac{n-1}{n}Q_n \end{bmatrix} \tag{14}$$

式(14)表明 Q_i 为

$$Q_i=\frac{i}{n}Q_n \qquad i=1,2,\cdots,n-1 \tag{15}$$

式(15)表明,$f(n)$取最大值的必要条件(可以证明该条件也为充分条件)为 Q_1、Q_2、Q_3、…、Q_{i-1}、Q_i、Q_{i+1}、…、Q_{n-1}、Q_n 在需求量轴上呈等距分布。

下面来计算 $f(n)$的最大值 $f_{\max}(n)$。

$$\begin{aligned} f_{\max}(n) &= -b\sum_{i=1}^{n-1}Q_i^2+b\sum_{i=2}^{n}Q_{i-1}Q_i= \\ &-b\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}Q_n\right)^2+b\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{i-1}{n}Q_n\frac{i}{n}Q_n\right)= \\ &\frac{n-1}{2n}bQ_n^2 \end{aligned} \tag{16}$$

由式(16)可知,$f_{\max}(n)$是 n 的严格单调递增函数,即价格段分得越多,垄断厂商将获得越大的收益。在极端情形下,当 $n\to\infty$ 时,有

$$f_{\max}(\infty)=\lim_{n\to\infty}f_{\max}(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}bQ_n^2=\frac{1}{2}bQ_n^2 \tag{17}$$

下面我们来考察 $f_{\max}(\infty)=\frac{1}{2}bQ_n^2$ 的经济含义。假设不允许垄断厂商实行二度价格歧视,则厂商只能制定一种价格,即 $n=1$。由式(16)可得 $f_{\max}(1)=0$,即厂商未获得更多的收益。此时消费者的消费者剩余为图 2中三角形 ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}$。

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}(AB)(BC)=\frac{1}{2}(OA-OB)BC= \\ &\frac{1}{2}[a-(a-bQ_n)]Q_n= \\ &\frac{1}{2}bQ_n^2 \end{aligned} \tag{18}$$

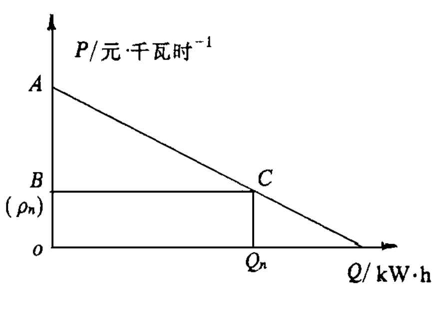

图 2　$f_{\max}(\infty)$的经济含义

比较式(17)和式(18)可得

$$f_{\max}(\infty)=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bQ_n^2 \tag{19}$$

式(19)表明,$f_{\max}(\infty)=\frac{1}{2}bQ_n^2$ 即为非价格歧视条件下,消费者的全部消费者剩余。我们还可以进一步得到如下结论

$$0 < f(n) \leqslant f_{\max}(n) < f_{\max}(\infty) = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} b Q_n^2 \quad (n > 1) \tag{20}$$

式 (20)表明,垄断厂商采用二度价格歧视的定价方法在一般情形下总可以将部分消费者剩余转化为自己的收益;在极端情形下,可将全部消费者剩余转化为自己的收益。在后一情形下,二度价格歧视实际上达到了一度价格歧视的效果。这一结论在需求量只能取正整数时同样成立。下面对此作一简单说明。

在需求量只能取正整数 (如一支铅笔, n 支铅笔)时, $Q_n = n$。由式 (15)可得 $Q_i = \frac{i}{n} n = i$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$。再由式 (16)可得

$$f_{\max}(n) = \frac{n-1}{2n} b n^2 = \frac{(n-1) n b}{2} \tag{21}$$

式中 $f_{\max}(n)$即为垄断厂商获得的消费者剩余。

在一度价格歧视情形下,垄断厂商获得的消费者剩余 $F(n)$ (这里 n为购买的数量)为

$$\begin{aligned} F(n) &= \sum_{i=1}^{n} (P_i - P_n) = \\ &\sum_{i=1}^{n} [(a - bi) - (a - bn)] = \\ &\frac{(n-1) n b}{2} \end{aligned} \tag{22}$$

式 (21)和式 (22)表明, $f_{\max}(n) = F(n)$。这说明二度价格歧视与一度价格歧视的效果完全一样。

下面我们来考察二度价格歧视情形下垄断厂商 (获得的总收益 $P(n)$。$P(n)$应为垄断厂商在非价格歧视条件下获得的收益 $P_n Q_n$ 与获得的消费者剩余 $f(n)$之和。即 $P(n) = P_n Q_n + f(n)$。如果垄断厂商按式 (15)确定价格段,则获得最大收益 $g(n)$

$$\begin{aligned} g(n) &= P_n Q_n + \frac{n-1}{2n} b Q_n^2 = \\ &(a - bQ_n) Q_n + \frac{n-1}{2n} b Q_n^2 = \\ &-\frac{n+1}{2n} b Q_n^2 + a Q_n \end{aligned} \tag{23}$$

在前述分析中,消费者的需求量 Q_n 是被假定为既定不变的。现假定 Q_n 是可变的,则 $g(n)$是 Q_n 的二次函数。$g(n)$取最大值 $g(n)_{\max}$的条件为 $Q_n = \frac{n}{n+1} \frac{a}{b}$,而 $g(n)_{\max} = \frac{n}{2(n+1)} \frac{a^2}{b}$。这表明,在 n段定价条件下,采用二度价格歧视垄断厂商可能获得的最大收益不超过 $\frac{n}{2(n+1)} \frac{a^2}{b}$。

3 结 束 语

本文给出了二度价格歧视条件下垄断厂商收益最大化的条件。该条件很简单,垄断厂商便于实施,消费者便于识别。垄断厂商收益最大化意味着消费者剩余损失最大化。因此,垄断厂商最终是否能成功地采用使收益最大化的定价方式,取决于垄断厂商垄断力量和消费者联合拒购能力的相对大小。如果消费者联合起来拒购垄断厂商的商品,则垄断厂商不可能获得预期的最大收益。如果政府出面干预垄断厂商的价格制定,也会减少垄断厂商的收益。

附　录

关于 $Q_i = \frac{i}{n} Q_n$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$为 $f(n)$极大值点充分条件的证明

证明 由 $\frac{\partial f(n)}{\partial Q_1}=b(Q_2-2Q_1)$ 和 $\frac{\partial f(n)}{\partial Q_i}=b(Q_{i-1}+Q_{i+1}-2Q_i)$ 可得 $\frac{\partial^2 f(n)}{\partial Q_i\partial Q_i}=-2b, i=1,2,\cdots,n-1$; $\frac{\partial^2 f(n)}{\partial Q_1\partial Q_2}=b$; $\frac{\partial^2 f(n)}{\partial Q_i\partial Q_{i-1}}=\frac{\partial^2 f(n)}{\partial Q_i\partial Q_{i+1}}=b, i=2,\cdots,n-2$; $\frac{\partial^2 f(n)}{\partial Q_{n-1}\partial Q_{n-2}}=b$; $f(n)$的其余二阶偏导数全为零。从而 $f(n)$的海森矩阵 H为

$$H=\begin{bmatrix} -2b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & -2b & b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & -2b & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & -2b & b & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b\ -2b & b \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & b\ -2b \end{bmatrix}$$

由式(10)可得 $H=-bA$。A的 1~$n-1$阶顺序主子式的值分别为 $2,3,\cdots,n$,故 A为正定矩阵,从而 H为负定矩阵(注 $b>0$)。于是 $Q_i=\frac{i}{n}Q_n$为 $f(n)$极大值点的充分条件。 证毕

参 考 文 献

1 李 .现代西方微观经济学概论.北京:高等教育出版社,1991

2 梁东黎,刘东.微观经济学.南京:南京大学出版社,1991

3 宋承先.现代西方经济学(微观经济学).上海:复旦大学出版社,1994

Study of Maximum Condition of Monopoly Revenue in Case of Second Degree Price Discrimination

Tang Xiaowo

(Management College, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract In this paper, the problem of maximizing monopoly revenue under the condition that the second degree price discrimination is allowed, is studied. The maximum condtion of monopoly revenue and the maximum revenue a monopolist may earn are given. The relevant computing formulas are very simple and the process of maximing the monopoly revenue is easy to carry out. Some new results presented in this paper are of importonce to both firms and consumers.

Key words second degree price discrimination; monopoly; revenue maximization

编辑 黄 辛