第 26卷 第 3期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol. 26 No. 3
1997年 6月　　Journal of UEST of China　　Jun. 1997

一类组合计数问题

蒲和平*
(电子科技大学应用数学系 成都 610054)

【摘要】 考察了满足一定限制条件的长度为 n 具有 m 个水平的数列计数问题,给出了它们的递归式和显表达式;改进了钥匙编码组合计数中的一个结果并得到几个组合恒等式。

关 键 词 编码数; 生成函数; 递归式; 显式
中图分类号 O 157

文献[1,2]研究了钥匙编码提出的组合计数,所涉及的编码是最大游程长小于 l 的 m 元集作可重复 n 排列问题。在应用中我们还常常需要考虑最小游程长的编码问题。本文主要就此类计数展开一些讨论。我们沿用文献[1,2]中的记号并给出一些相关概念如下。

定义 1 m 元集 $\{1,2,\cdots,m\}$,可重复作 n 元排列,所有不同数列所成的集记为 $K(n,m)$。

定义 2 对 $K(n,m)$ 中的一个数列,同一数字相邻的数段叫该数列的一个游程。一个游程中所含元的个数叫游程长。

定义 3 $K(n,m,l)$ 为 $K(n,m)$ 中最大游程长小于 l 的数列之集;$\overline{K}(n,m,l)$ 为 $K(n,m)$ 中最小游程长大于或等于 l 的数列之集;$\overline{G}(n,m,l)$ 为 $K(n,m)$ 中最小游程长恰为 l 的数列之集。

定义 4 设 A 为一集合,$f(A)$ 规定为 A 中数列的个数。

约定:本文中出现的 n,m,l 均为正整数。对整数 T,U,若 $T<0$ 或 $U<0$ 以及 $T<U$ 时,$\binom{T}{U}=0$

1 递归表达式

定理 **1**

$$f(\overline{G}(n,m,l)) = (m-1)\left[\sum_{j=l}^{n-l} f(\overline{G}(n-l,m,j)) + \sum_{k=l+1}^{n-l} f(\overline{G}(n-k,m,l))\right] \qquad l \leqslant \frac{n-1}{2} \tag{1}$$

特别地

$$f\left(\overline{G}\left(n,m,\left[\frac{n}{2}\right]\right)\right) = \begin{cases} m(m-1) & n\text{为偶数} \\ 2m(m-1) & n\text{为大于 3的奇数} \end{cases} \tag{2}$$

$$f(\overline{G}(n,m,n)) = m \tag{3}$$

$$f(\overline{G}(n,m,l)) = 0 \qquad n > l > \frac{n}{2}\text{ 或 } l > n \tag{4}$$

证明 $\overline{G}(n,m,l)$ 中的数列可分为两类:末游程长是 l;末游程长大于 l。

若末游程长是 l,则去掉末游程后剩下的 $(n-l)$ 项的数列,其最小游程长必不小于 l,其个数是

1996年 6月 27日收稿
* 男 38岁 硕士 副教授

$\sum_{j=l}^{n-l} f(\overline{G}(n-l,m,j))$，注意到末游程与相邻的游程数字相异，且 $l\leqslant n-l$，故得个数是

$$(m-1)\sum_{j=l}^{n-l} f(\overline{G}(n-l,m,j)) \qquad l\leqslant \frac{n}{2}$$

若末游程长大于 l，不妨设是 $k(>l)$，则去掉末游程后，剩下的 $(n-k)$ 项数列的最小游程长是 l，其个数是 $\sum_{k=l+1}^{n-l} f(\overline{G}(n-k,m,l))$，注意到相邻游程的数字相异，且 $l+1\leqslant n-l$，故得个数是

$$(m-1)\sum_{k=l+1}^{n-l} f(\overline{G}(n-k,m,l)) \qquad l\leqslant \frac{n-1}{2}$$

上面两式相加便得递归式(1)。

由构造方法，显见式(2)~(4)成立。由定义及式(3)、(4)容易得到下面的关系式

定理 2 $f(\overline{K}(n,m,l)) = \sum_{j=l}^{[\frac{n}{2}]} f(\overline{G}(n,m,j)) + m \qquad l\leqslant n$ (5)

$f(\overline{G}(n,m,l)) = f(\overline{K}(n,m,l) - f(\overline{K}(n,m,l+1))$ (6)

关于 $f(\overline{K}(n,m,l))$ 的递归关系，我们有以下结论

定理 3 $f(\overline{K}(n,m,l)) = (m-1)\sum_{j=l}^{n-l} f(\overline{K}(n-j,m,l)) + m \qquad l\leqslant n$ (7)

$f(\overline{K}(n,m,l)) = 0 \qquad l>n$ (8)

证明 当 $l\leqslant n$ 时，设 $\overline{K}(n,m,l)$ 中数列的末程长为 $j(l\leqslant j\leqslant n)$，现将 j 的取值范围分为两段来考虑：

1) 若 $j\leqslant n-l$，其对应数列至少有两个游程，去掉末游程后所得的 $(n-j)$ 项数列个数为 $f(\overline{K}(n-j,m,l))$，注意到末游程与相邻游程数字相异，得该范围内的数列个数为

$$(m-1)\sum_{j=l}^{n-l} f(\overline{K}(n-j,m,l))$$

2) 若 $j>n-l$，其对应数列只有一个游程，即只可能出现 $j=n$ 的情形，该类数列个数为 m。

由上面 1)、2)可知式(7)成立。

当 $l>n$ 时，式(8)显然。

2 显表达式

为了得到 $f(\overline{K}(n,m,l))$ 的显表达式，我们先给出以下结论。

引理 $f(\overline{K}(n,m,l))$ 的生成函数为 $A(x) = mx^l/[1-x-(m-1)x^l]$

证明 由定理 3得

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(\overline{K}(n,m,l))x^n = \sum_{n=l}^{\infty} f(\overline{K}(n,m,l))x^n = \\ & m\sum_{n=l}^{\infty} x^n + (m-1)\sum_{n=l+1}^{\infty}\sum_{j=l}^{n-l} f(\overline{K}(n-j,m,l))x^n = \\ & m\sum_{n=l}^{\infty} x^n + (m-1)\sum_{n=j+1}^{\infty}\sum_{j=l}^{n-l} f(\overline{K}(n-j,m,l))x^n = \\ & m\sum_{n=l}^{\infty} x^n + (m-1)\sum_{j=l}^{\infty} x^j\sum_{n=j+l}^{\infty} f(\overline{K}(n-j,m,l))x^{n-j} = \\ & \frac{mx^l}{1-x} + (m-1)A(x)\frac{x^l}{1-x} \end{aligned}$$

故
$$A(x)=mx^l/[1-x-(m-1)x^l]$$

定理 **4**
$$f(\overline{K}(n,m,l))=m\sum_{k=0}^{[\frac{n-l}{l}]}(m-1)^k\binom{n-l-(l-1)k}{k} \tag{9}$$

证明　由引理得
$$A(x)=\frac{mx^l}{1-x-(m-1)x^l}=mx^l\sum_{j=0}^{\infty}[x+(m-1)x^l]^j=$$
$$m\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(m-1)^k x^{j+l+(l-1)k}=$$
$$m\sum_{n=l}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{n-l}{l-1}]}\binom{n-l-(l-1)k}{k}(m-1)^k x^n$$

故
$$f(\overline{K}(n,m,l))=m\sum_{k=0}^{[\frac{n-l}{l-1}]}(m-1)^k\binom{n-l-(l-1)k}{k}$$

注意到求和中应有 $n-l-(l-1)k\geqslant k$,即 $k\leqslant\frac{n-l}{l}$,故式(9)成立。

注意: 在定理 4中令 $l=1$,有
$$f(\overline{K}(n,m,1))=m\sum_{k=0}^{n-1}(m-1)^k\binom{n-1}{k}=m[(m-1)+1]^{n-1}=m^n$$
这便是 m 元集无限制条件的可重复 n 排列情形。

由定理 2定理 4我们不仅可得到 $f(\overline{G}(n,m,l))$的显表达式,也容易验证以下性质。

定理 **5**
$$f(\overline{G}(2l,m,l))=f(\overline{G}(2,m,1))=m(m-1)$$
$$f(\overline{G}(2l+1,m,l))=2f(\overline{G}(2,m,1))=2m(m-1)\qquad l\geqslant 2$$
$$f(\overline{G}(3l,m,l))=f(\overline{G}(3,m,1))=m(m-1)(m+1)$$
$$f(\overline{G}(4l,m,l))=f(\overline{G}(4,m,1))+3(l-1)m(m-1)^2=$$
$$m^2(m-1)(m+1)+3(l-1)m(m-1)^2$$

我们记 $\overline{G}^{(r)}(n,m,l)$为 $\overline{G}(n,m,l)$中恰有 $r\left(1\leqslant r\leqslant\frac{n}{l}\right)$个最小游程长的数列之集,则有以下结论成立。

定理 **6**
$$f(\overline{G}^{(r)}(n,m,l))=\sum_{k=r+1}^{[\frac{n+r}{l+1}]}m(m-1)^{k-1}\binom{k}{r}\binom{n-kl-1}{k-r-1}\qquad 1\leqslant r<\frac{n}{l} \tag{10}$$
$$f(\overline{G}^{(r)}(n,m,l))=m(m-1)^{\frac{n}{l}-1}\qquad r=\frac{n}{l} \tag{11}$$

证明　记 $\overline{G}_k^{(r)}(n,m,l)$为 $\overline{G}^{(r)}(n,m,l)$中恰有 $k\left(r\leqslant k\leqslant\frac{n}{l}\right)$个游程的数列之集。

当 $r<\frac{n}{l}$时,有 $f(\overline{G}^{(r)}(n,m,l))=\sum_{k=r}^{[\frac{n}{l}]}f(\overline{G}_k^{(r)}(n,m,l))$。

将长度 n 作 k 部分有序分拆,最小部分长度为 l 且最小部分个数为 $r(r\leqslant k)$,则共有 $\binom{k}{r}\binom{n-kl-1}{k-r-1}$种分拆方式。再注意相邻游程数字相异,得
$$f(\overline{G}_k^{(r)}(n,m,l))=m(m-1)^{k-1}\binom{k}{r}\binom{n-kl-1}{k-r-1}$$

则
$$f(\overline{G}^{(r)}(n,m,l))=\sum_{k=r}^{[\frac{n}{l}]}m(m-1)^{k-1}\binom{k}{r}\binom{n-kl-1}{k-r-1}$$

注意求和中有$\begin{cases} n-kl-1 \geqslant k-r-1 \\ k-r-1 \geqslant 0 \end{cases}$,即 $r+1 \leqslant k \leqslant \dfrac{n+r}{l+1}$,故式(10)成立。

当 $r=\dfrac{n}{l}$ 时,式(11)显然。

由定理6我们还可得到 $f(\overline{G}(n,m,l))$ 的另一显表达式如下。

定理7 $f(\overline{G}(n,m,l))=\sum\limits_{r=1}^{[\frac{n}{l}]} f(\overline{G}^{(r)}(n,m,l))$。

类似定理4的证明,我们对文献[2]中 $f(\mathrm{K}(n,m,l))$ 的显表达式得到了以下改进结果。

定理8

$$f(\mathrm{K}(n,m,l))=\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{l}]}(-1)^k m^{n-(k+1)l+1}\times (m-1)^k\left[m^{l-1}\binom{n-(l-1)k-1}{k}-\binom{n-(l-1)(k+1)-1}{k}\right] \tag{12}$$

证明 由文献[2]定理5, $F_{m(l)}(x) \triangleq \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\mathrm{K}(n,m,l))x^{n-1}=m(1-x^{l-1})/[1-mx+(m-1)x^l]$

得

$$F_{m(l)}(x)=m(1-x^{l-1})\sum_{j=0}^{\infty}[mx-(m-1)x^l]^j=$$
$$(1-x^{l-1})\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}m^{j-k+1}(m-1)^k x^{(l-1)k+j}$$

于是

$$f(\mathrm{K}(n,m,l))=\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{l-1}]}(-1)^k m^{n-lk}(m-1)^k\binom{n-(l-1)k-1}{k}-$$
$$\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{l-1}]-1}(-1)^k m^{n-l(k+1)+1}(m-1)^k\binom{n-(l-1)(k+1)-1}{k}=$$
$$\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{l-1}]}(-1)^k m^{n-l(k+1)+1}(m-1)^k\left[m^{l-1}\binom{n-(l-1)k-1}{k}-\binom{n-(l-1)(k+1)-1}{k}\right]$$

注意到求和中应有 $n-(l-1)k-1 \geqslant k$,即 $k \leqslant \dfrac{n-1}{l}$,故式(12)得证。

推论

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k m^{n-2k-1}(m-1)^k\left[m\binom{n-k}{k}-\binom{n-k-1}{k}\right]=(m-1)^n \tag{13}$$

$$\sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]}(-1)^{k+1}2^{n-2k}\frac{n+1}{k}\binom{n-k}{k-1}=2^n-1 \tag{14}$$

证明 易知 $f(\mathrm{K}(n,m,2))=m(m-1)^{n-1}$,在式(12)中取 $l=2$ 得

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^k m^{n-2k-1}(m-1)^k\left[m\binom{n-k-1}{k}-\binom{n-k-2}{k}\right]=m(m-1)^{n-1}$$

以 n 替换 $n-1$ 化简即得式(13)。在式(13)中取 $m=2$ 得

右边$=1$

左边$=\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k 2^{n-2k-1}\left[2\binom{n-k}{k}-\binom{n-k-1}{k}\right]=\sum\limits_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k 2^{n-2k-1}\dfrac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}+2^{n-1}$

故
$$\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^{k+1}2^{n-2k-1}\frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}=2^{n-1}-1$$
以 $n+1$替换 n即得式(14)。

3 算　例

作为公式的运用，下面手算几个例子。

1) 求 $f(\bar{K}(6,3,2))$。由定理 3

$$f(\bar{K}(6,3,2))=2\sum_{j=2}^{4}f(\bar{K}(6-j,3,2))+3=$$
$$2[3f(\bar{K}(2,3,2))+f(\bar{K}(3,3,2))+3]+3=$$
$$2(3\times3+3+3)+3=33$$

由定理 4
$$f(\bar{K}(6,3,2))=3\sum_{k=0}^{2}2^{k}\binom{4-k}{k}=33$$

2) 求 $f(\bar{G}^{(1)}(6,3,2))$。由定理 6
$$f(\bar{G}^{(1)}(6,3,2))=\sum_{k=2}^{2}3\times2^{k-1}\binom{k}{1}\binom{5-2k}{k-2}=12$$

3) 求 $f(\bar{G}(6,3,2))$。由定理 1
$$f(\bar{G}(6,3,2)=2[\sum_{j=2}^{4}f(\bar{G}(4,3,j))+\sum_{k=3}^{4}f(\bar{G}(6-k,3,2))]=$$
$$2(3\times2+0+3+0+3)=24$$

由定理 5　$f(\bar{G}(6,3,2))=f(\bar{G}(3,3,1))=3\times2\times4=24$

由定理 2、定理 4
$$f(\bar{G}(6,3,2))=f(\bar{K}(6,3,2))-f(\bar{K}(6,3,3))=33-9=24$$

由定理 7　$f(\bar{G}(6,3,2))=\sum_{r=1}^{3}f(\bar{G}^{(r)}(6,3,2))=12+0+12=24$

4) 求 $f(K(6,3,2))$。由定理 8
$$f(K(6,3,2))=\sum_{k=0}^{2}(-1)^{k}3^{5-2k}2^{k}\left[3\binom{5-k}{k}-\binom{4-k}{k}\right]=96$$

参　考　文　献

1　罗乔林．一个组合数学问题及其在钥匙编码问题的应用．应用数学学报，1984，1(7)：119～123

2　柳柏濂．关于钥匙编码的组合计数．应用数学学报，1986，1(9)：50～59

A Class of Combinatorial Counting Problems

Pu Heping

(Dept. of Applied Mathlmatics, UEST of China　Chlngdu　610054)

Abstract　In this paper, soml problems of counting the number of m level digital sequlnces of length n that satisfy some constraints are considered and their recursive formulas and explicit formulations arl given. A result of combinatorial lnumlration of kly codlwords is improved and some combinatorial identical relations are got.

Kly words　coded number; generating function; recursive formula; explicit formula

编辑　徐安玉