

多传感器系统的灵敏度、选择性与精度*

陈金岭** 王保强 杨秀丽

(成都气象学院 成都 610041)

【摘要】 对多传感器系统预处理部分的灵敏度、选择性、精度及分离性作了全面分析,并引用矩阵范数证明了估计精度和分离性的上界。这些上界揭示了精度和分离性与设计阵的条件数 $[Cond(B)]$ 以及设计阵偏离值 W_B 和随机变量 X 之间的关系。这表明,欲提高多传感器系统的估计精度,可通过控制 $Cond(B)$ 、 W_B 和 X 来实现。

关键词 多传感器系统; 范数; 条件数; 精度; 选择性; 分离性

中图分类号 TP212

新技术的基础是信息技术。其三大支柱是传感、通信、计算机技术。而最关键的是信息获取—传感测量技术。

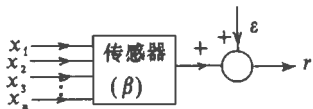
欲正确且及时地获取信息,在很多情况下需要多传感器把检测得到的物理量或化学量或生物量联合计算才能求得。这样的系统如大气信息检测、环境检测、气体或液体检测及故障诊断等等。不管哪种多传感器系统,一般都由前端预处理和后端数据处理两大部分组成。前者主要功能是数据采集并对信号进行预处理。这部分在各种不同的传感器系统中都不可缺少,且输出信号的质量直接影响整个系统的性能。

目前,国内对多传感器系统信号处理的方法还处于研究阶段,文献 [1~3] 从不同角度对多传感器系统的特性、信号处理方法作了探讨。本文引用矩阵范数和条件数论证了多传感器系统的输出特性,导出了选择性和精度以及分离性的上界表示式,为优化设计系统及信号处理提供了理论依据。

1 传感器的多元线性回归

1.1 传感器输出变量和输入变量的关系

在很多实际问题中,与某个变量有关的自变量不是一个,而是多个。假设图 1 所示传感器的输出 y 与被测变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的内在联系是线性的,用 U 表示变换特性(灵敏度),则 y 与 x 的数学模型为



$$y_i = U_0 + U_1 x_1 + U_2 x_2 + \dots + U_n x_n + X \quad (1)$$

式中 X 为干扰; U_0 为零漂; $i = 1, 2, 3, \dots, m$

图 1 传感器输出变量
与输入变量的关系

已知输出 y , 欲求输入变量 x , 应给出 U 。欲确定 U , 必须同条件下同时对 y 变量和 n 个自变量进行测量, 依次测得 m 组数据, 就可写出如下结构式

1996 年 11 月 11 日收稿, 1997 年 1 月 14 日修改定稿

* 国家气象局气象科学基金资助项目

** 男 58 岁 大学 教授

$$\begin{cases} y_1 = U_0 + U_1x_{11} + U_2x_{12} + \cdots + U_nx_{1n} + X_1 \\ y_2 = U_0 + U_1x_{21} + U_2x_{22} + \cdots + U_nx_{2n} + X_2 \\ \vdots \\ y_m = U_0 + U_1x_{m1} + U_2x_{m2} + \cdots + U_nx_{mn} + X_m \end{cases} \quad (2)$$

式(2)的矩阵形式为

$$Y = XU + X_0 U_0 \quad (3)$$

式中 Y 为 $m \times 1$ 个观测向量; X 为 $m \times n$ 个可精确测量的变量; U 为 $n \times 1$ 个待估计参数; X_0 为 $m \times 1$ 个随机变量

1.2 回归方程

设 $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ 分别是 $U_0, U_1, U_2, \dots, U_n$ 的最小二乘估计, 则回归方程为

$$\hat{Y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \quad (4)$$

由最小二乘法可知, b_0, b_1, \dots, b_n 应使全部观测值 Y_i 与回归值 \hat{Y}_i 的偏差平方和 Q 达到最小, 即使

$$Q = \sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_i (Y_i - b_0 - b_1x_{i1} - b_2x_{i2} - \cdots - b_nx_{in})^2 \text{ 为最小} \quad (5)$$

据数学极值原理, $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ 应是下列方程的解

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial b_0} = - \sum_i (Y_i - \hat{Y}_i) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial b_j} = - \sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)x_{ij} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

式(6)称为正规方程组。将式(4)代入式(6), 可导出式(6)的系数矩阵为对称阵, 用 A 表示

$$A = X'X \quad (7)$$

x' 为 x 的转置矩阵。式(6)右端常数项矩阵 D 亦可用矩阵 x 和 y 表示

$$D = x'y \quad (8)$$

这样式(6)的矩阵形式可写成

$$(x'x)b = x'y \quad \text{或} \quad Ab = D \quad (9)$$

若系数矩阵 A 非奇异, 则

$$b = A^{-1}D = (x'x)^{-1}x'y \quad (10)$$

我们就可用式(10)所表示的回归方程来逼近图 1 输出量 y 与输入变量 x_1, x_2, \dots, x_n 之间的关系

2 多传感器的输入变量与输出变量之间的关系

图 2 为多传感器微机检测系统的框图。多路开关以前称为前端预处理部分, 其主要功能是采集数据并完成信号预处理。这部分所以重要且不可缺少, 是因为它的质量在很大程度上决定了整个系统的性能指标。本文仅讨论前端预处理部分的输入信息与输出信号之间的关系。讨论的对象是由 $n > 1$ 个组成的被测要素, 用 K_i 表示要素种类, C 表示要素的量, 或浓度、或强度。传感器的类型可以是同类的, 亦可以是类型各异的。

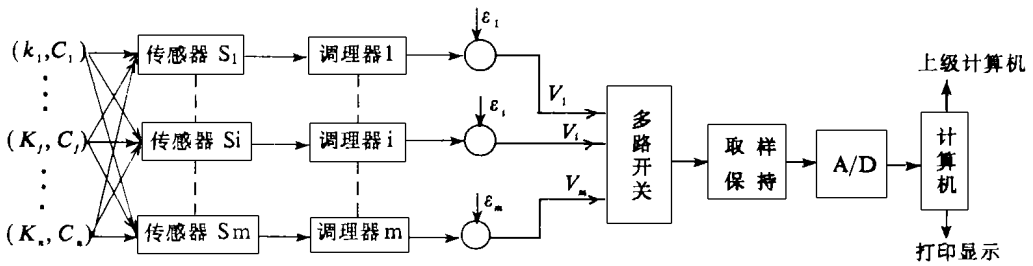


图 2 多传感器微机检测系统框图

假设图 2 每路调理器输出 V 至少与两个以上被测要素有关, 且 V_i 与 C_j 之间的回归系数由式 (10) 已经确定, 则 V 与 C 之间的结构如下

$$\begin{cases} V_1 = b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + \cdots + b_{1j}C_j + \cdots + b_{1n}C_n + V_{01} + X_1 \\ V_2 = b_{21}C_1 + b_{22}C_2 + \cdots + b_{2j}C_j + \cdots + b_{2n}C_n + V_{02} + X_2 \\ \vdots \\ V_i = b_{i1}C_1 + b_{i2}C_2 + \cdots + b_{ij}C_j + \cdots + b_{in}C_n + V_{0i} + X_i \\ \vdots \\ V_m = b_{m1}C_1 + b_{m2}C_2 + \cdots + b_{mj}C_j + \cdots + b_{mn}C_n + V_{0m} + X_m \end{cases} \quad (11)$$

式中 $j = 1, 2, 3, \dots, n$, b_{ij} 是由传感器和调理器 (由前放、滤波器、线性电路、补偿电路等组成) 所决定的变换特性灵敏度; V_{0i} 为零漂; X_i 为随机干扰变量。

$$\text{式 (11) 写成矩阵形式} \quad \hat{V} = BC + X \quad (12)$$

其中

$$\hat{V} = (V - V_0) = \begin{bmatrix} V_1 - V_{01} \\ V_2 - V_{02} \\ \vdots \\ V_i - V_{0i} \\ \vdots \\ V_m - V_{0m} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$C = (C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_j \ \cdots \ C_n)^t$$

$$X = (X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_i \ \cdots \ X_m)^t$$

3 灵敏度、选择性与精度

3.1 灵敏度

部分灵敏度定义为

$$b_{ij} = \frac{\text{输出 } V_i \text{ 的变化量}}{\text{第 } j \text{ 个被测要素 } C_j \text{ 的变化量}} = \frac{WV_i(C_1, C_2, \dots, C_n)}{WC_j} \quad (14)$$

所有部分灵敏度构成的矩阵定义为系统总灵敏度,它就是式(13)系数矩阵 B 。

根据 Kaiser 定义^[4],一个理想特定的传感器系统,每个传感器仅对被测要素中的一种产生敏感,则系数矩阵 B 被简化为 j 列,否则,传感器 S_i 的灵敏度由矩阵 B 的第 i 行确定。当满足

$$|b_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{ij}| \quad (15)$$

灵敏度的归一化表示为

$$h_i = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{b_{ij}}{b_{ii}} \right| \quad (16)$$

若 $Q \ll 0$,则传感器 S_i 是非确定的。当 $h_i = 1$, S_i 与 K_i 有完全确定关系,这意味着传感器 S_i 仅对 K_i 产生敏感,不存在交叉敏感。在此理想情况下,所有交叉灵敏度 $b_{ij} = 0$ 。

3.2 选择性

采用广义对角占优矩阵来定义多传感器系统的选择性是合理的。对角占优矩阵的对角元素 $|b_{ii}|$ 相对同行其余元素绝对值之和处于占优,描述它的特性可借其最大特征值 λ_{\max} 。现在,我们利用矩阵 B 的 Jacobi 矩阵来确定 λ_{\max} ^[4]。

式(13)矩阵 B 的对角阵的逆矩阵和对角元素为零的矩阵分别为

$$B_{\bar{d}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{|b_{11}|} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{|b_{22}|} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{|b_{33}|} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & |b_{12}| & |b_{13}| & \dots \\ |b_{21}| & 0 & |b_{23}| & \dots \\ |b_{31}| & |b_{32}| & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

矩阵 B 的 Jacobi 矩阵为

$$B_{\bar{d}}^{-1} \tilde{\mathcal{B}} = 1 - \text{diag}(B_{\bar{d}}^{-1}) \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & | \frac{b_{12}}{b_{11}} | & | \frac{b_{13}}{b_{11}} | & \dots \\ | \frac{b_{21}}{b_{22}} | & 0 & | \frac{b_{23}}{b_{22}} | & \dots \\ | \frac{b_{31}}{b_{33}} | & | \frac{b_{32}}{b_{33}} | & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (17)$$

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 为 $B_{\bar{d}}^{-1} \tilde{\mathcal{B}}$ 特征值,则 $B_{\bar{d}}^{-1} \tilde{\mathcal{B}}$ 的谱半径为

$$S(B_{\bar{d}}^{-1} \tilde{\mathcal{B}}) = \max_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i|$$

矩阵理论中有定理,任一矩阵 A 的谱半径 $S(A)$ 不大于 A 的任一种范数^[5],即对任一矩阵范数 $\| \cdot \|$,则满足 $S(A) \leq \| A \|$ 。因此,由式(17)可得

$$\| B_{\bar{d}}^{-1} \tilde{\mathcal{B}} \|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{b_{ij}}{b_{ii}} \right| < 1$$

又 $B_{\bar{d}}^{-1} \tilde{\mathcal{B}}$ 的特征值最大值 λ_{\max} 有

$$|\lambda_{\max}| \leq \|B_d^{-1}B\|_{\infty} = \max_{\substack{i \leq m \\ j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{b_{ji}}{b_{ii}} \right| < 1 \quad (18)$$

现在,就可以定义选择性的通用表达式为

$$Q = 1 - |\lambda_{\max}| \quad 0 \leq Q \leq 1 \quad (19)$$

式(19)表明,若传感器有交叉敏感存在,则选择性介于无选择性和理想选择性之间,因而可以作为系统选择性高低的判据。式(19)还说明,欲提高系统的选择性,可通过优化设计调理器,来控制 λ_{\max} 的实现。

3.3 精度和分离性

从数值观点看,仅有关于 $\hat{V}^+ BC$ 的解集这种完整的特性是不够的,因为有限的精度运算及数据的不精确,若 B 和 \hat{V} 有“小扰动”,对 C 将产生怎样的影响? 为了回答这一问题,我们将研究式(12)的性态

矩阵的谱范数定义为 $B^T B$ 的最大特征根的平方根,因 $\|B\|$ 表示 $\|B\|$ 能较好地度量系统的精度^[6]。先假定系统矩阵 B 是精确的,且非奇异,而 \hat{V} 有误差,表示为 $\hat{V}^+ W\hat{V}$,则式(12)变为

$$\hat{V}^+ W\hat{V} = B(C + W_C) + X$$

与上面所述的 $\hat{V} = BC$ 比较,得 $W_C = B^{-1}(W\hat{V} - X)$,由此, $\|W_C\| \leq \|B^{-1}\| \{ \|W\hat{V}\| + \|X\| \}$; $\|\hat{V}\| \leq \|B\| \|C\|$ 。

可得

$$\|W_C\| \cdot \|\hat{V}\| \leq \|B\| \|B^{-1}\| \|C\| \{ \|W\hat{V}\| + \|X\| \} \quad (20)$$

相对误差为

$$\frac{\|W_C\|}{\|C\|} \leq \|B\| \|B^{-1}\| \left\{ \frac{\|W\hat{V}\|}{\|\hat{V}\|} + \frac{\|X\|}{\|\hat{V}\|} \right\} \quad (21)$$

假设 \hat{V} 是精确的,而 B 有误差,则变为

$$\hat{V} = (B + W_B)(C + W_C) + X$$

设 $B + W_B$ 非奇异,此式与前述 $\hat{V} = BC$ 相比较,绝对误差为

$$W_C = (B + W_B)^{-1}(-C W_B - X)$$

由此得

$$\|W_C\| \leq \|(B + W_B)^{-1}\| \{ \|C\| \|W_B\| + \|X\| \} \quad (22)$$

再由 $\hat{V} = BC$ 可得

$$\|C\| \leq \|B^{-1}\| \|\hat{V}\| \quad (23)$$

式(22)与式(23)两边相乘得

$$\|W_C\| \|\hat{V}\| \leq \|B\| \|C\| \|(B + W_B)^{-1}\| \{ \|C\| \|W_B\| + \|X\| \} \quad (24)$$

相对误差

$$\frac{\|W_C\|}{\|C\|} \leq \|B\| \|(B + W_B)^{-1}\| \left\{ \|B^{-1}\| \|W_B\| + \frac{\|X\|}{\|\hat{V}\|} \right\} \quad (25)$$

矩阵理论中有证明,在式(25)中

$$\|(B + W_B)^{-1}\| \leq \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \|B^{-1}\| \|W_B\|} = \frac{\|B^{-1}\|}{1 - K} \quad (26)$$

式中 $K = \|B^{-1}\| \|W_B\| < 1$ 式(26)代入式(25),最后可得

$$d = \frac{\|W_C\|}{\|C\|} \leq \frac{1}{1 - K} \|B\| \|B^{-1}\| \left\{ \|B^{-1}\| \|W_B\| + \frac{\|X\|}{\|\hat{V}\|} \right\} \quad (27)$$

式(27)说明,线性方程组解的相对误差与原始资料误差之间的关系,可以由 $\|B\| \|B^{-1}\|$ 乘

以 $\|B^{-1}\| \|WB\|$ 和 $\frac{\|X\|}{\|\hat{V}\|}$ 来表示

对于非奇异矩阵 B 的条件数记作

$$\text{Cond}(B) = \|B\| \|B^{-1}\| \quad (28)$$

式 (27) 的倒数定义为分离性, 即

$$T = \frac{1}{d} = \frac{\|C\|}{\|WC\|} = \frac{1 - K}{\text{Cond}(B) \left\{ \|B^{-1}\| \|WB\| + \frac{\|X\|}{\|\hat{V}\|} \right\}} \quad (29)$$

式 (29) 表明, 分离性与 $\text{Cond}(B)$ 、矩阵 B 的偏离值 W 以及随机干扰 X 与观测值 \hat{V} 的比值有关。条件数 $\text{Cond}(B)$ 越小, 精度越高, 并具有高的选择性和分离性。因此, 分离性 T 可作为有选择性或无选择性传感器系统的通用精度的判据。

4 结 论

从多传感器系统输出特性结构式 (11) 导出了系统数矩阵 B 的 Jacobi 矩阵的特征最大值 λ_{\max} , 用其定义的传感器系统选择性通用式 (19), 可作为系统选择性高低的判据。此外, 通过精心设计预处理电路以减少 λ_{\max} , 可以提高系统选择性。

分离性通过条件数 $\text{Cond}(B)$ 把精度和选择性联系起来, 给出了精度上界与 $\text{Cond}(B)$ 、偏离值 W 及干扰量 X 之间的关系。当选择性 $Q \rightarrow 1$ 时, 具有最小的 $\text{Cond}(B)$, 意味着分离性最高。分离性还有助于估计系统的非线性。

参 考 文 献

- 1 黄俊钦. 几种多传感器系统及其信号处理方法. 传感器技术, 1991, 1: 7~ 13
- 2 吴成东, 刘宗富. 多传感器数据最优融合. 传感器技术, 1994, 3: 21~ 24
- 3 梅芳, 王士卿. 气体传感器阵列. 传感器技术, 1995, 2: 6~ 9
- 4 Zipsier L. Selectivity of sensor systems. Sensor and Actuators, 1993, A: 286~ 289
- 5 格罗布 G H, 万罗字 C F 著, 邓健新, 刘秀兰译. 矩阵计算. 大连: 大连理工大学出版社, 1988
- 6 杨 虎, 王松桂. 条件数、谱范数与估计精度. 应用概率统计, 1991, 7(4): 338~ 342

Sensitivity, Selectivity and Accuracy of Multi-sensor System

Chen Jinling Wang Baoqiang Yang Xiuli

(Department of Electronic Technology, CIM Chengdu 610041)

Abstract The sensitivity, selectivity, accuracy and separability for the image pre-processing circuit of multi-sensor system are analysed completely and the upper bounds of the accuracy and separability are obtained using the matrix norm. Those bounds expose the relations among the accuracy and separability, the condition number ($\text{Cond}(b)$) and deviation W of the design matrix and the disturbing random variable X . Which shows that the estimate of the accuracy can be restricted to a certain level by the control of $\text{Cond}(b)$, W and X .

Key words multi-sensor system; matrix norm; condition number; accuracy; selectivity; separability