参数频域识别的最优采样频率研究*

李众立**　　王成端
(西南工学院信息与控制工程系　绵阳　621002)

【摘要】 由给定的施力函数性质,导出了优化识别结构系统模态参数最优采样频率的判据,给出了相应的定理和公式。实际算例表明,频域内最优采样频率与激励的性质有关,而与系统的输出无关。

关　键　词　频域;　施力函数;　参数识别;　方差;　最优采样频率
中图分类号　TP271

在利用动态数据识别结构系统参数的频域方法中,如果能找到一些采样频率,使得在这些频率处能够以较小的采样数据获得参数误差方差最小的识别结果,对应的这些频率称为最优采样频率。对单自由度系统,最优采样频率的确定仅与给定施力函数的性质有关,而对多自由度系统,还与相应的模态向量有关,与要识别参数实际大小和系统输出无关[1]。本文主要研究施力函数已知的动态结构系统的最优采样频率问题,对施力函数未知的系统[2],由于其复杂性,将另文研究。

1　模型描述

对一多自由度系统,有

$$M\ddot{X}+C\dot{X}+KX=F,X(0)=0,\dot{X}(0)=0 \tag{1}$$

$$X=\{x_1,x_2,\cdots x_N\}^T,F=\{f_1,f_2,\cdots,f_N\}^T$$

式中　C为比例阻尼矩阵;M为质量矩阵;K为刚度矩阵;F为施力函数矩阵。对式(1)取傅氏变换

$$(K-\mathrm{k}^2M+\mathrm{ik}C)X(\mathrm{k})=F(\mathrm{k}) \tag{2}$$

式(2)两端左乘模态矩阵Φ^T,有

$$(\mathrm{diag}[K_r]-\mathrm{k}^2\mathrm{diag}[M_r]+\mathrm{ik}\,\mathrm{diag}[C_r]Q=\mathrm{diag}[F_r] \tag{3}$$

式中　diag[ ]表示对角矩阵,如$\Phi^TK\Phi=\mathrm{diag}[K_r]$,$\Phi=\{\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_N\}$,$\Phi_r=\{\mathrm{j}_1,\mathrm{j}_2,\cdots,\mathrm{j}_N\}_r^T$;$Q$为广义位移,$X(\mathrm{k})=\Phi Q$;$Q=[q_1(\mathrm{k}),q_2(\mathrm{k}),\cdots,q_N(\mathrm{k})]^T$,模态刚度$K_r=\Phi_r^TK\Phi_r$;模态质量$M_r=\Phi_r^TM\Phi_r$;模态阻尼$C_r=\Phi_r^TC\Phi_r$;模态施力$F_r=\Phi_r^TF(\mathrm{k})$。$K_r$、$M_r$、$C_r$等参数决定着结构系统的动态特性[3]。

对第r阶模态,有:$(-\mathrm{k}^2M_r+\mathrm{ik}C_r+K_r)q_r=F_r$。变形成为

$$\frac{1}{q_r}=\frac{-\mathrm{k}^2M_r}{F_r}+\frac{\mathrm{ik}C_r}{F_r}+\frac{K_r}{F_r} \tag{4}$$

将式(4)分成实部和虚部,可以改写为

$$\begin{bmatrix} U_r(\mathrm{k}) \\ V_r(\mathrm{k}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\mathrm{k}^2f_r(\mathrm{k}) & -\mathrm{k}g_r(\mathrm{k}) & f_r(\mathrm{k}) \\ -\mathrm{k}^2g_r(\mathrm{k}) & \mathrm{k}f_r(\mathrm{k}) & g_r(\mathrm{k}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_r \\ C_r \\ K_r \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} X_{ur}(\mathrm{k}) \\ X_{vr}(X) \end{bmatrix} \tag{5}$$

⒇　1996年 11月 4日收稿
*　中国工程物理研究院院外基金资助
**　男　48岁　大学　副教授

$U_r(\omega)$和$V_r(\omega)$由实测确定,并受到测量噪声$\xi_{ur}(\omega)$和$\xi_{vr}(\omega)$的影响;$1/q_r = U_r(\omega) + iV_r(\omega)$, $1/F_r = f_r(\omega) + ig_r(\omega)$。定义

$$\begin{cases} [a_j(\omega)] = \underline{a}_r(\omega) = [-\omega^2 f_r(\omega) \quad -\omega g_r(\omega) \quad f_r(\omega)]^T \\ [b_j(\omega)] = \underline{b}_r(\omega) = [-\omega^2 g_r(\omega) \quad \omega f_r(\omega) \quad g_r(\omega))]^T \end{cases} \tag{6}$$

对应于采样频率(激振频率)$\omega = \omega_i, i = 1, 2, \cdots, N$,式(5)可以表示为[4]

$$Z_r = H_r\theta_r + \xi_r \tag{7}$$

其中

$$\begin{cases} Z_r = [U_r(\omega_1) \quad V_r(\omega_1) \quad U_r(\omega_2) \quad V_r(\omega_2) \quad \cdots \quad U_r(\omega_n) \quad V_r(\omega_n)]^T \\ H_r = [\underline{a}_r(\omega_1) \quad \underline{b}_r(\omega_1) \quad \underline{a}_r(\omega_2) \quad \underline{b}_r(\omega_2) \quad \cdots \quad \underline{a}_r(\omega_n) \quad \underline{b}_r(\omega_n)]^T \\ \xi_r = [\xi_{ur}(\omega_1) \quad \xi_{vr}(\omega_1) \quad \xi_{ur}(\omega_2) \quad \xi_{vr}(\omega_2) \quad \cdots \quad \xi_{ur}(\omega_n) \quad \xi_{vr}(\omega_n)]^T \\ \theta_r = [M_r \quad C_r \quad K_r]^T \end{cases} \tag{8}$$

假定噪声的均值$E[\xi_r] = 0$,对应的方差阵:$R_r = E(\xi_r\xi_r^T) = \mathrm{diag}(\sigma_{1r}^2, \sigma_{1r}^2, \sigma_{2r}^2, \sigma_{2r}^2, \cdots, \sigma_{nr}^2, \sigma_{nr}^2)$这里,$\sigma_{kr} = \sigma_r(\omega_k), K = 1, 2, \cdots, n$。于是参数$\theta_r$识别误差的协方差阵为[5]

$$P_r = (H_r^T R_r^{-1} H_r)^{-1} \tag{9}$$

式中　P_r是3×3阶矩阵,其对角线元素P_{r11}、P_{r22}、P_{r33}分别是M_r、C_r和K_r识别误差的方差。则参数θ_r的最小二乘递推估计$\hat{\theta}_r(i)(i = 0, 1, 2, \cdots)$为[6]

$$\hat{\theta}_i(i) = \hat{\theta}_r(i-1) + K_r(i)[Z_r(i) - H_r^T(i)\hat{\theta}_r(i-1)] \tag{10}$$

$$K_r(i) = S_r(i-1)H_r(i)/[1 + H_r^T(i)S_r(i-1)H_r(i)] \tag{11}$$

$$S_r(i) = [I - K_r(i)H_r^T(i)]S_r(i-1) \tag{12}$$

式中　I为单位阵。

2　最优采样频率推证

为了在$\omega_k \in I_K$内确定ω_k,即最优采样频率,下面讨论P_{rii}的极值问题。

式(9)对ω_k求偏导,得

$$\frac{\partial P_r}{\partial\omega_k} = -P_k\left(\frac{\partial H_r^T}{\partial\omega_k}R_r^{-1}H_r + H_r^T R_r^{-1}\frac{\partial H_r}{\partial\omega_k} - H_r^T R_r^{-1}\frac{\partial R_r}{\partial\omega_k}R_r^{-1}H_r\right)P_r \tag{13}$$

$$\left(\frac{\partial P_r}{\partial\omega_x}\right)_{mm} = -2\left(P_r\frac{\partial H_r^T}{\partial\omega_x}R_r^{-1}H_rP_r\right)_{mm} + \left(P_rH_r^TR_r^{-1}\frac{\partial R_r}{\partial\omega_k}R_r^{-1}H_r\right)_{mm} \tag{14}$$

对$\omega_k \in I_K$,假定$\underline{a}_r(\omega)$、$\underline{b}_r(\omega)$、$\sigma_r(\omega)$是连续函数,则:$\frac{\partial H_r^T}{\partial\omega_k} = [0\cdots 0\ \dot{\underline{a}}_r(\omega_k)\ \dot{b}_r(\omega_k)\ 0\cdots 0]$。因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{rmm}}{\partial\omega_x} = &-\frac{2}{\sigma_{kr}^2}\{P_r[\dot{\underline{a}}_r(\omega_k)\underline{a}_r^T(\omega_k) + \dot{\underline{b}}_r(\omega_k)\underline{b}_r^T(\omega_k)]P_r\}_{mm} + \\ &\frac{2\sigma_{kr}}{\sigma_{kr}^3}\{P_r[\underline{a}_r(\omega_k)\underline{a}_r^T(\omega_k) + \underline{b}_r(\omega_k)\underline{b}_r^T(\omega_k)]P_r\}_{mm} \end{aligned} \tag{15}$$

根据P_{rmm}出现极值的条件,由式(15)得

$$\begin{aligned} &\sum_j P_{rmj}\dot{a}_{rj}(\omega_k)\Big[\sum_s P_{rsm}a_{rs}(\omega_k)\Big] + \sum_j P_{rmj}\dot{b}_{rj}(\omega_k)\Big[\sum_s P_{rsm}b_{rs}(\omega_k)\Big] - \\ &\frac{\dot{\sigma}_{kr}}{\sigma_{kr}}\Big[\Big(\sum_j P_{rmj}a_{rj}(\omega_k)\Big)^2\Big(\sum_j P_{rmj}b_{rj}(\omega_k)\Big)^2\Big] = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

预备定理 如果存在一个实数 $\omega_k \in I_K$ 使 $f_r(\omega_k)$和 $g_r(\omega_k)$不为零,对任意 $m \in [1,2,3]$,有

$$\sum_s P_{rsm} a_{rs}(\omega_k) = 0 \tag{17}$$

那么对 m,有:$\sum_s P_{rsm} b_{rs}(\omega_k) = 0$,反之亦然。

证明 如果有一系列 ω_s 值,$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k, \cdots, \omega_N$,这里 ω_k 满足式(17)。利用关系式(8)和式(9),有:$P_r^{-1} = \sum_{s=1}^{N}\left[\dfrac{a_r(\omega_s)\, a_r^T(\omega_s) + b_r(\omega_s)\, b_r^T(\omega_s)\, b_r^T(\omega_s)}{\sigma_{sr}^2}\right]$,即

$$P_r^{-1} = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{N} \dfrac{\omega_s^4 a_r^2(\omega_s)}{\sigma_{sr}^2} & 0 & -\sum_{s=1}^{N} \dfrac{\omega_s^2 a_r^2(\omega_s)}{\sigma_{sr}^2} \\ 0 & \sum_{s=1}^{N} \dfrac{\omega_s^2 a_r^2(\omega_s)}{\sigma_{sr}^2} & 0 \\ -\sum_{s=1}^{N} \dfrac{\omega_s^2 a_r^2(\omega_s)}{\sigma_{sr}^2} & 0 & \sum_{s=1}^{N} \dfrac{a_r^2(\omega_s)}{\sigma_{sr}^2} \end{bmatrix} \tag{18}$$

这里 $a_r^2(\omega) = f_r^2(\omega_s) + g_r^2(\omega_s)$;$P_r^{-1}$ 的行列式值 Δ 为

$$\Delta = \sum_{s=1}^{N} \frac{\omega_s^2 a_r^2(\omega_s)}{\sigma_{sr}^2} \left\{ \sum_{s=1}^{N} \frac{a_r^2(\omega_s)}{\sigma_{sr}^2} \sum_{s=1}^{N} \frac{\omega_s^4 a_r^2(\omega_s)}{\sigma_{sr}^2} - \left[\sum_{s=1}^{N} \frac{\omega_s^2 a_r^2(\omega_s)}{\sigma_{sr}^2} \right]^2 \right\} \tag{19}$$

由 Cauchy-Schwartz不等式,总有 $\Delta > 0$,这里是显然的,因为 P_r 是一个协方差矩阵。与式(19)对应令 $\Delta = B(AC - B^2)$,则协方差矩阵为

$$P_r = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} AB & 0 & B^2 \\ 0 & CA - B^2 & 0 \\ B^2 & 0 & BC \end{bmatrix} \tag{20}$$

根据关系式(6)和式(20),结果得证。

定理 1 对一给定模态施力函数 $F_r(\omega)$,对任一 $m \in \{1,2,3\}$,存在某些频率 ω_k,使要估计的第 m 个参数误差的方差 P_{rmm}在这些频率处测量时,不产生任何增量。如果 $\omega_k \in I_K$ 且满足式(17),则有 $\omega = \omega_k$ 即为这样的频率。证明略。

应用该定理可推得

$$P_{rmj}^{+} = P_{rmj}^{-},\ j = 1,2,3 \tag{21}$$

$$\sum P_{rmj}^{+} a_{rj} = \sum P_{rmj}^{+} b_{rj} = 0 \tag{22}$$

式中 P_r^- 和 P_r^+ 分别表示第 r 阶模态在频率 ω_k 处前和后测量的协方差阵,P_{rmj}^-和 P_{rmj}^+为矩阵 P_r^- 和 P_r^+ 的元素。

推论 1 对满足$\sum P_{rmj} a_{rj}(\omega_k) = 0(m = 1, 3)$的频率 ω_k,则在 $\omega = \omega_k$ 处进行采样,第 m 个参量误差的方差及其协方差不会受到影响。

此结论可直接由式(21)得到。由推论 1,对任一给定的 m,这些 ω_k 并不依赖于参数 M_r、C_r、K_r,也不依赖于要测量的响应,它们仅由施力函数的性质决定。

推论 2 如果 $g_r(\omega_k) \neq 0$和 $f_r(\omega_k) \neq 0$,则除了 $\omega_k = 0$外,不存在 $\omega_k \in I_K$,使:$\sum P_{r2j} a_{rj}(\omega_k) = 0$,这里假设协方差矩阵是非奇异阵。

证明 对 $m = 2$,由式(18)有 $AC - B^2 \neq = 0$,因为协方差矩阵的行列式值不为零,要使它为零,只有 $\omega_k = 0$时才成立。

推论 3 如果 $g_r(\omega_k) \neq 0$和 $f_r(\omega_k) \neq 0$,则总是存在一个 ω_k, $\omega_k \in (0, \infty)$,使得$\sum P_{rmj} a_{rj}(\omega_k) =$

$0(m=1,3)$。

证明　对 $m=1$,利用式(20),推得 $\omega_k^2=B/A$,$B>0$,$A>0$。故 $\omega_k=(B/A)^{1/2}$。

对 $m=3$,利用式(18),推得 $\omega_k^2=C/B$,所以此时 $\omega_k=(C/B)^{1/2}$。故得证。

定理 2　要使方差 P_{rmm}极小,则当 $f_r(\omega_k)\neq 0$时,最优采样频率 $\omega=\omega_k$,$\omega_k\in I_K$,需满足

$$\sum P_{rmj}\dot{a}_{rj}(\omega_k)+\frac{g_r(\omega_k)}{f_r(\omega_k)}\sum P_{rsm}\dot{b}_{rs}(\omega_k)-\frac{\dot{\varepsilon}_{kr}}{\varepsilon_{kr}}\left[1+\left(\frac{g_r(\omega_k)}{f_r(\omega_k)}\right)^2\right]\sum P_{rmj}a_{rj}=0,m=1,3 \tag{23a}$$

当 $f_r(\omega_k)=0$,需满足

$$\sum P_{rsm}\dot{b}_{rs}(\omega_x)-\frac{\dot{\varepsilon}_{kr}}{\varepsilon_{xr}}\sum P_{rsm}b_{rs}(\omega_x)=0,m=1,3 \tag{23b}$$

证明　应用方程(16)即可得证。对于 $g_r(\omega_x)\neq 0$和 $g_r(\omega_x)=0$的情况,可以得到类似结论。

式(23a)和(23b)就是优化识别模态质量 M_r和模态刚度 K_r的最优采样频率 ω_k的判据。对第 K个采样点的最优 ω_k,一般仅依赖于包含 P_{rmj}和 P_{rsm}的所有预先采样点的频率位置。

定理 3　要使模态阻尼 C_r误差的方差极小,则最优采样频率 $\omega=\omega_x$,$\omega_k\in I_K$,要满足如下关系式

$$\left[1-\frac{\omega_k\dot{\varepsilon}_{kr}}{\varepsilon_{xr}}\right][g_r^2(\omega_x)+f_r^2(\omega_k)]=-\frac{\omega_k}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[g_r^2(\omega)+f_r^2(\omega)]\Big|_{\omega=\omega_k} \tag{24}$$

证明　设协方差矩阵是严格正定的,应用式(16),方程(24)即得证。

定理 3表明,在识别模态阻尼时,第 K个优化采样点并不依赖于事先的采样频率,而仅由 $f_r(\omega)$和 $g_r(\omega)$的性质所控制。如果 $\dot{\varepsilon}_{xr}=0$,则在 $\omega_x\in[1,\infty]$内不能由式(34)得出识别 C_r的 ω_k。

3　数值仿真

考虑一个三自由度系统,已知其模态矩阵 Φ和给定的施力函数 $F(t)$,即

$$\Phi=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&0&-1\\1&-1&1\end{bmatrix},F(t)=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}f(t),f(t)=\begin{cases}0,t<0\\e^{-t},t\geqslant 0\end{cases} \tag{25}$$

则对 $F(t)$两端取 Fourier变换,有

$$F(\omega)=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega} \tag{26}$$

如果在 $\omega=\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}$点处已进行了采样,下一个要采样的点即为 ω_k。设 P_{rk}^-表示完成$(K-1)$个采样点后第 r阶模态参数误差的协方差矩阵,P_{rk}表示完成 K个采样点后第 r阶模态参数误差的协方差矩阵,$\omega_i\in[1,\infty)$,并设 $\varepsilon_{kr}=\varepsilon_0$,这样 $\dot{\varepsilon}_{kr}=0$。

当 $r=1$,即第一阶模态时,模态力为 $F_1(\omega)=\Phi_1^T F(\omega)=\{1\quad 2\quad 1\}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega}=\frac{4}{1+\mathrm{i}\omega}$,$\frac{1}{F_1}=\frac{1}{4}+\frac{\omega}{4}\mathrm{i}$,故有 $f_1=\frac{1}{4}$,$g_1=\frac{\omega}{4}$,$a_1^2=\frac{1}{16}(1+\omega^2)$,矢量 $\underline{a}_1=\frac{1}{4}[-\omega^2\quad -\omega^2\quad 1]^T$和 $\underline{b}_1=\frac{1}{4}[-\omega^3\quad \omega\quad \omega\}]^T$。其电算结果如表 1和表 2所示。

当 $r=2$,即第二阶模态时,模态力为

$$F_2((0)=\{1\quad 0\quad -1\}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega}=0$$

此时本文方法失效,因为本文的研究前提是动态系统,施力函数不为零。

表 1 识别第一阶模态质量参数的最优采样频率

采样点数 K	采样频率 k_k /rad° s^{-1}	协方差矩阵 P^{+}_{1k}
4	1. 148	$16e_0^2\begin{bmatrix} 0.00474 & 0 & 0.02825 \\ 0 & 0.00870 & 0 \\ 0.02825 & 0 & 0.230 \end{bmatrix}$
5	1. 677	$16e_0^2\begin{bmatrix} 0.00087 & 0 & 0.000905 \\ 0 & 0.00253 & 0 \\ 0.00905 & 0 & 0.121 \end{bmatrix}$
6	2. 171	$16e_0^2\begin{bmatrix} 0.00022 & 0 & 0.00359 \\ 0 & 0.00094 & 0 \\ 0.00359 & 0 & 0.073 \end{bmatrix}$

表 2 识别第一阶模态刚度参数的最优采样频率

采样点数 K	采样频率 k_k /rad° s^{-1}	协方差矩阵 P^{+}_{1k}
4	1. 376	$16e_0^2\begin{bmatrix} 0.00479 & 0 & 0.02830 \\ 0 & 0.00851 & 0 \\ 0.02830 & 0 & 0.21 \end{bmatrix}$
5	1. 934	$16e_0^2\begin{bmatrix} 0.00087 & 0 & 0.00906 \\ 0 & 0.00249 & 0 \\ 0.00906 & 0 & 0.1198 \end{bmatrix}$
6	3. 524	$16e_0^2\begin{bmatrix} 0.00025 & 0 & 0.00416 \\ 0 & 0.00083 & 0 \\ 0.00416 & 0 & 0.0817 \end{bmatrix}$

当 $r=3$,即第三阶模态时,模态力为

$$F_3 = (k) = \{1 \quad -1 \quad 1\}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{1+ \ ik} = \frac{1}{1+ \ ik} = \frac{F_1}{4}$$

经过计算,该阶模态的最优采样频率完全同第一阶模态的最优采样频率值,只是协方差矩阵是 e_0^2 倍而不是 $16e_0^2$ 倍。

从表 1和表 2看出,随着采样点数 K 的增加,P_{r11}和 P_{r33}明显减小,其余方差也随之下降,故采样选取的点数越多,则最终将逼近一个最优采样频率使识别参数误差的方差极小。特别当各阶模态力相差常数倍时,各阶最优采样频率与最小模态力作用时的那一阶采样频率相同,而其协方差矩阵相差常数倒数的平方倍。

4 结 论

1) 本文的理论和公式对频域参数识别具有重要的意义。对于给定在频率 k_i, $i=1,2,\cdots,k-1$ 采集数据的情况下,可预测下一个采样频率 k_k。在这一频率,采集的数据可以使希望估计的参数置

信度更高。

2) 对于识别参数 M_r 和 K_r,最优采样频率 k_k 依赖于前面的采样频率 $k_1, k_2, \cdots, k_{k-1}$,而识别参数 C_r 时,最优采样频率并不依赖于前面的采样频率,而仅由施力函数的性质所控制。

3) 在频域内,最优采样频率 k_k 与要识别参数的具体数值和系统的实际输出 $X(t)$ 无关。

4) 只有当测量噪声 X的 $\dot{e}_{kr} \neq 0$ 时,才能根据施力函数性质用式 (24)得出优化识别阻尼 C_r 的最优采样频率。

5) 通过自由振动系统,采用已有方法识别出模态矩阵 Q,从而求得模态力。一般模态力不同,则最优采样频率不同。但如果各阶模态力相差常数倍时,则各阶模态的最优采样频率相同。

6) 根据方差的精度要求,总能找到适量的预先采样频率点数,逼近一个最优采样频率 k_k 使要识别参数的误差的方差极小。

参 考 文 献

1 Udwadia F E. Optimal spacing of response data for identification of linear structural system. Proc of the 1985 piping conference 98, PVP(6): 91~95

2 刑誉峰.用模态法识别结构弹性碰撞载荷的可行性.力学学报, 1995, (5): 560~566

3 Beauchamp K G. Data acquistion for signal analysis. London: George Allen& Unwin, 1980

4 韩曾晋.现代控制理论和应用.北京:北京出版社, 1987

5 傅志方.振动模态分析与参数辨识.北京:机械工业出版社, 1990

6 White B A. Eigenstructure assignment: a survey. Proc Instn Mech Engrs, Part I. J of systems and control Engineering, 1995, 209(I1): 1~12

Study on Optimal Sampling Frequency of Parameter Identification in Frequency Domain

Li Zhongli Wang Chengduan

(Dept. of Information and Control Eng., SWIT of China Mianyang 621002)

Abstract The criteria of the optimal sampling frequency is deduced by optimally indentfing the modal parameters according to the nature of the forcing fuction, and the related principles and formulae are given. The computation example shows that the optimal sampling frequency is independent of the system response, and solely depend on the nature of the excitation.

Key words frequency domain; forcing function; parameter identification; variance; optimal sampling frequency

编辑 叶 红