第 26卷 第 4期 电子科技大学学报 Vol. 26 No. 4
1997年 8月 Journal of UEST of China Aug. 1997

受凝聚映象扰动的极大增生算子的拓扑度

何明星*
(四川工业学院基础部 成都 611744)

【摘要】 拓扑度理论对于研究算子方程解的存在性、唯一性、连续依赖性等问题具有重要的理论价值[1]。文献[2,3]利用拓扑度方法探讨了一般算子方程 $y\in(A+C)x$ 解的问题,文中在此基础上给出了极大增生算子 A 受凝聚映象 C 扰动时的拓扑度,从而为解算子方程 $y\in(A+C)x$ 提供了又一个有力的研究工具。

关 键 词 m-增生算子; 凝聚映象; 扰动; 拓扑度; 算子方程
中图分类号 O177.91

1 记号及预备知识

设 X 表示实 Banach空间,X^* 表示 X 的对偶空间。

$d_H(E,F)$ 表示 X 中两子集 E、F 的 Hausdorff 距离,即 $d_H(E,F)=\max\left\{\sup\limits_{x\in E}d(x,F),\sup\limits_{x\in F}d(x,E)\right\}$

$T: D\subset X\to X$ 称为非扩张的,如果 $\|Tx-Ty\|\leqslant\|x-y\|$,$x\in D,y\in D$。

$C: D\subseteq X\to X$ 称为凝聚的,如果 $\forall K\subset D$,$V(C(K))<V(K)$,除非 $V(K)=0$,这里 V 为 X 中某种非紧致度。

$A: D(A)\subset X\to 2^X$ 称为增生的,如果任取 $x,y\in D(A)$,$u\in Ax$,$v\in Ay$ 存在 $f\in J(x-y)$,使得 $\langle u-v,j\rangle\geqslant 0$,$J: X\to 2^{X^*}$,为对偶映射,定义为

$$J(x)=\{x^*\in X|\ \|x^*\|=\|x\|,\langle x,x^*\rangle=\|x\|^2\})$$

$A: D(A)\subset X\to 2^X$ 称为 m-增生的,如果 A 是增生的,且存在 $\lambda>0$,使得 $R(A+\lambda I)=X$。此时对 $\forall\lambda>0$ 都有 $R(A+\lambda I)=X$,并且对 $\forall\lambda>0$,可定义单值映射 $(A+\lambda I)^{-1}: X\to D(A)$,它是非扩张的。

对于凝聚映象场的拓扑度,我们采用已有的定义[4],用 $\deg^\Gamma(I-C,G,y)$ 表示 $I-C$ 在有界开集 G 上对于 y 点的拓扑度。

2 $\deg(\lambda I+A-C,D(A)\cap G,y)$

设 λ 是正实数,$G\subset X$ 为有界开集。

定义 1 设 $A: D(A)\to 2^X$ 为 m-增生,$C: \bar{G}\to X$ 凝聚,$y\in X$ 且 $y\notin(\lambda I+A-C)(D(A)\cap\partial G)$,如果 $D(A)\cap G\neq\emptyset$,定义广义度 $\deg(\lambda I+A-C,D(A)\cap G,y)=\deg^\Gamma(I-(\lambda I+A)^{-1}(C+y),G,0)$;如果 $D(A)\cap G=\emptyset$,定义 $\deg(\lambda I+A-C,\emptyset,y)=0$

注 1 $(\lambda I+A)^{-1}(C-y): \bar{G}\to X$ 是凝聚映象,因为 $(\lambda I+A)^{-1}$ 非扩张,因而 1-集压缩,且 C 又是凝聚映象。

⒇ 1996年 10月 14日收稿,1996年 12月 30日修改定稿
* 男 32岁 硕士 讲师

注 **2** 定义 1的合理性可由引理 1保证。

引理 **1** 设 $A: D(A)\to 2^X$ 是 $m-$增生的，$C: \overline{G}\to X$ 凝聚。设 $E\subset \overline{G}$，如果 $y\notin (\lambda I+A-C)(D(A)\cap E)$，则 $0\notin (I-(\lambda I+A)^{-1}(C+y))(E)$。

证明　若不然，则存在 $x\in E$，使得 $(I-(\lambda I+A)^{-1}(C+y))(x)=0$，于是 $x=(\lambda I+A)^{-1}(Cx+y)\in D(A)$，且 $y\in(\lambda I+A-C)x\subset(\lambda I+A-C)(D(A)\cap E)$。矛盾。　证毕

定理 **1** 设 $A: D(A)\to 2^X$ 是 m一增生的，$C: \overline{G}\to X$ 凝聚。$y\in X$，$D(A)\cap G\neq \emptyset$，$y\notin(\lambda I+A-C)(D(A)\cap\partial G)$，则

1) 若 $\deg(\lambda I+A-C, D(A)\cap G, y)\neq 0$，则 $y\in(\lambda I+A-C)(D(A)\cap G)$;

2) 若 G 含两不交开集 G_1, G_2，$y\notin(\lambda I+A-C)(D(A)\cap(\overline{G}\setminus(G_1\cup G_2)))$，则 $\deg(\lambda I+A-C, D(A)\cap G, y)=\deg(\lambda I+A-C, D(A)\cap G_1, y)+\deg(\lambda I+A-C, D(A)\cap G_2, y)$;

3) 如果 $y\notin(\lambda I+A)(D(A)\cap G)$，则 $\deg(\lambda I+A, D(A)\cap G, y)=1$；如果 $y\in G$，则 $\deg(I, G, y)=1$;

4) $\deg(\lambda I+A-C, D(A)\cap G, y)=\deg(\lambda I+A-C, D(A)\cap G, 0)$

证明　1) $\deg(\lambda I+A-C, D(A)\cap G, y)\neq 0$，即 $\deg_\Gamma(I-(\lambda I+A)^{-1}(C+y), G, 0)\neq 0$，因而存在 $x\in G$，使得 $x=(\lambda I+A)^{-1}(Cx+y)\in D(A)$，所以 $y\in(\lambda I+A-C)x$。

2) 不失一般性，设 $D(A)\cap G_i\neq\emptyset$，明显地 $y\notin(\lambda I+A-C)(D(A)\cap\partial G_i)(i=1,2)$。因此 $\deg(\lambda I+A-C, D(A)\cap G_i, y)$ 有定义。根据假设及引理 1，$0\notin(I-(\lambda I+A)^{-1}(C+y))(\overline{G}\setminus(G_1\cup G_2))$，因此

$$\begin{aligned}\deg_\Gamma(I-(\lambda I+A)^{-1}(C+y), G, 0) = {}&\deg_\Gamma(I-(\lambda I+A)^{-1}(C+y), G_1, 0)+\\&\deg_\Gamma(I-(\lambda I+A)^{-1}(C+y), G_2, 0)\end{aligned}$$

由定义 1得结论成立。

3) 由 $y\in(\lambda I+A)(D(A)\cap G)$ 得 $(\lambda I+A)^{-1}(y)\in G$，则

$$\deg(\lambda I+A, D(A)\cap G, y)=\deg_\Gamma(I-(\lambda I+A)^{-1}(y), G, 0)=1$$

特别地，$\frac{1}{2}I$ 是 m-增生算子，$D(\frac{1}{2}I)=X$。因此，如果 $y\in G$，便有 $\deg(I, G, y)=1$

4) 由定义显然可得。

定理 **2** 设 $D\subset X$，$A-C: [0,1]\times(D\cap\overline{G})\to 2^X$ 满足下列条件:

1) $A_t: D\to 2^X$ 是 $m-$增生的，且 $D(A_t)=D$，$\forall t\in[0,1]$;

2) $E\subset D$ 有界，$t_0\in[0,1]$，$\forall \varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)\cap[0,1]$ 时，使得 $d_H(A_t(x), A_{t_0}(x))<\varepsilon$ 对所有 $x\in E$ 成立。

3) $C_t=C(t,\cdot): \overline{G}\to X$ 凝聚，$t\in[0,1]$;

4) 设 $t_0\in[0,1]$，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)\cap[0,1]$ 时，使得

$$\sup\{\|C_t(x)-C_{t_0}(x)\|: x\in\overline{G}\}<\varepsilon$$

再设 $\{y(t): 0\leqslant t\leqslant 1\}$ 是 X 中的连续曲线，且对任意 $t\in[0,1]$ 有 $y(t)\notin(\lambda I+A_t-C_t)(D\cap\partial G)$。则 $\deg(\lambda I+A_t-C_t, D\cap G, y(t))$ 当 $t\in[0,1]$ 时与 t 无关。

证明　不妨假设 $D\cap G\neq\emptyset$，$y(t)=0$ 令 $S_t=(\lambda I+A_t)^{-1}C_t$，可以证明 $\forall t_0\in[0,1]$，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $\forall t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)\cap[0,1]$ 有

$$\sup\{\|S_t(x)-S_{t_0}(x)\|: x\in\overline{G}\}<\varepsilon$$

事实上

$$\begin{aligned}\|S_t(x)-S_{t_0}(x)\|\leqslant{}&\|(\lambda I+A_t)^{-1}C_t(x)-(\lambda I+A_t)^{-1}C_{t_0}(x)\|+\\&\|(\lambda I+A_t)^{-1}C_{t_0}(x)-(\lambda I+A_{t_0})^{-1}C_{t_0}(x)\|\leqslant\\&\|C_t(x)-C_{t_0}(x)\|+\|u_t-u_{t_0}\|\end{aligned}$$

这里 $u_t=(\lambda I+A_t)^{-1}C_0(x)$, $u_{t_0}=(\lambda I+A_{t_0})^{-1}C_0(x)$, 有 $(\lambda I+A_t)u_t=(\lambda I+A_{t_0})u_{t_0}$

从而
$$\lambda(u_t-u_{t_0})\in-(A_tu_t-A_{t_0}u_{t_0})$$

设 $a_t\in A_tu_t$, $a_{t_0}\in A_{t_0}u_{t_0}$, 使得 $\lambda(u_t-u_{t_0})=-(a_t-a_{t_0})$。对 $b\in A_tu_{t_0}$, 选 $j\in J(u_t-u_{t_0})$, 使得 $\langle a_t-b,j\rangle\geqslant 0$, 因此

$$\lambda\|u_t-u_{t_0}\|^2=\lambda\langle u_t-u_{t_0},j\rangle=-\langle a_t-a_{t_0},j\rangle=-\langle a_t-b,j\rangle-\langle b-a_{t_0},j\rangle\leqslant$$
$$-\langle b-a_{t_0},j\rangle\leqslant\|b-a_{t_0}\|\,\|u_t-u_{t_0}\|$$

不失一般性, 可设 $\|u_t-u_{t_0}\|\neq 0$, 从而推出 $\|u_t-u_{t_0}\|\leqslant\frac{1}{\lambda}\|b-a_{t_0}\|$。

由条件 2)可知, 存在 $\delta_1>0$, 使得 $d_H(A_tu_{t_0},A_{t_0}u_{t_0})<\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall u_{t_0}\in(\lambda I+A_{t_0})^{-1}C_0(\bar{G})$和 $\forall t\in(t_0-\delta_1,t_0+\delta_1)\cap[0,1]$。因此可适当选取上面的 $b\in A_tu_{t_0}$以满足 $\|b-a_{t_0}\|<\frac{\varepsilon}{2}$。

由条件 4), 存在 $\delta_2>0$, 使得 $\forall t\in(t_0-\delta_2,t_0+\delta_2)$, 有
$$\sup\{\|C_t(x)-C_{t_0}(x)\|:x\in\bar{G}\}<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则上述推断成立。

由引理 1, $0\notin(I-S_t)(\partial G)$, 由凝聚映象拓扑度的同伦不变性知: 当 $t\in[0,1]$时 $\deg_\Gamma(I-S_t,G,0)$与 t无关。从而 $\deg(\lambda I+A_t-C_t,D\cap G,0)$与 t无关。

3 $\deg(A-C,D(A)\cap G,y)$

引理 2 设 $A:D(A)\to 2^X$是 $m-$增生的, $C:\bar{G}\to X$凝聚, 设 $y\in X$, $y\notin cl[(A-C)(D(A)\cap\partial G)]$, $D(A)\cap\partial G\neq\emptyset$, 则存在 $\lambda_0>0$, 使得 $\forall\lambda\in(0,\lambda_0]$, $y\notin(\lambda I+A-C)(D(A)\cap\partial G)$且 $\deg(\lambda I+A-C,D(A)\cap G,y)$与 $\lambda\in(0,\lambda_0]$无关。

证明 令 $b=\sup\{\|x\|:x\in\partial G\}>0$, $d=d(y,cl[(A-C)(D(A)\cap\partial G)])>0$, 选 $\lambda_0>0$, 使得 $\lambda_0b<\frac{d}{2}$, 若存在 $\lambda\in(0,\lambda_0]$及 $x\in D(A)\cap\partial G$, 使得 $y\in(\lambda I+A-C)(x)$, 则 $d=d(y,cl[(A-C)(D(A)\cap\partial G)])\leqslant\|\lambda x\|<\frac{d}{2}$, 矛盾。

现取定 $\lambda\in(0,\lambda_0]$, 令 $A_t(x)=(t(\lambda_0-\lambda)I+A)x$, $C_t(x)=C(x)$, $\forall t\in[0,1]$, 用定理 2可得
$$\deg(\lambda I+A-C,D(A)\cap G,y)=\deg(\lambda_0I+A-C,D(A)\cap G,y)$$
证毕

定义 2 设 $A:D(A)\to 2^X$是 $m-$增生的, $C:\bar{G}\to X$凝聚, $y\in X$且 $y\notin cl[(A-C)(D(A)\cap\partial G)]$, 定义广义拓扑度 $\deg(A-C,D(A)\cap G,y)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\deg(\lambda I+A-C,D(A)\cap G,y)$

由引理 2知该定义是有意义的。

定理 3 设 $A:D(A)\to 2^X$是 $m-$增生的, $C:\bar{G}\to X$凝聚, $y\in X$, 又设 $D(A)\cap G\neq\emptyset$, $y\notin cl[(A-C)(D(A)\cap\partial G)]$, 则有

1) $\deg(A-C,D(A)\cap G,y)\neq 0$, 则 $y\in cl[(A-C)(D(A)\cap G)]$

2) $G_1\subset G$, $G_2\subset G$为开集, $G_1\cap G_2=\emptyset$, $y\notin cl[(A-C)(D(A)\cap(\bar{G}\setminus(G_1\cup G_2)))]$, 则
$$\deg(A-C,D(A)\cap G,y)=\deg(A-C,D(A)\cap G_1,y)+\deg(A-C,D(A)\cap G_2,y)$$

3) 若 $y\in(\lambda I+A)(D(A)\cap G)$, 那么 $\deg(\lambda I+A,D(A)\cap G,y)=1$。特别地, 当 $y\in G$时, $\deg(I,G,y)=1$

4) $\deg(A-C,D(A)\cap G,y)=\deg(A-C-y,D(A)\cap G,0)$

证明 1) 由定义, 存在 $\lambda_0>0$, 使得 $\forall\lambda\in(0,\lambda_0]$, 有 $\deg(\lambda I+A-C,D(A)\cap G,y)\neq 0$。于是 $\forall\lambda$

$\in (0,\lambda_0]$,存在 $x_\lambda \in D(A)\cap G$,使得 $y\in(\lambda I+A-C)x_\lambda$,这样 $d(y,(A-C)(D(A)\cap G))\leqslant\lambda\|x_\lambda\|$。

令 $\lambda\to 0$,注意 $\{\|x_\lambda\|\}$一致有界,可得 $y\in cl[(A-C)(D(A)\cap G)]$。

2)~ 4)显然成立(证明从略)。

定理 4 设 $D\subset X$, $A-C$: $[0,1]\times(D\cap\bar{G})\to 2^X$ 满足以下条件

1) $A_t=A(t,\circ)$: $D\to 2^X$ 是 m-增生的,$D(A_t)=D(\forall t\in[0,1])$;

2) $E\subset D$有界,$t_0\in[0,1]$,$\forall\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得$\forall x\in E$,当 $t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)\cap[0,1]$, $d_H(A_t(x),A_{t_0}(x))<\varepsilon$;

3) $C_t=C(t,\circ)$: $\bar{G}\to X$ 对 $\forall t\in[0,1]$是凝聚的;

4) 设 $t_0\in[0,1]$,$\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)\cap[0,1]$时

$$\sup\{\|C_t(x)-C_{t_0}(x)\|: x\in\bar{G}\}<\varepsilon$$

再设 $\{y(t): 0\leqslant t\leqslant 1\}$为$X$中的连续曲线且$y(t)\notin cl[(A_t-C_t)(D\cap\partial G)]$对$\forall t\in[0,1]$成立。则 $\deg(A_t-C_t,D\cap G,y(t))$与 $t\in[0,1]$无关。

证明 不失一般性,假定 $D\cap G\neq\emptyset$,$y(t)=0$,由引理 2,$\forall t\in[0,1]$,存在$\lambda_t>0$,使得 $0\notin(\lambda I+A_t-C_t)(D(A)\cap\partial G)$,$\lambda\in(0,\lambda_t)$。只需证明 $\tau=\inf\{\lambda_t: t\in[0,1]\}>0$即可。因为根据定理 2,只要 $\lambda\in(0,\tau]$,则 $\deg(\lambda I+A_t-C_t,D(A)\cap G,0)$与 $t\in[0,1]$无关,本定理也由此得证。

事实上,若 $\tau=0$,则存在 $\mu_{t_i}>0(t_i\in[0,1])$使得 $\mu_{t_i}\to 0(i\to\infty)$满足

$$0\in(\mu_{t_i}I+A_{t_i}-C_{t_i})(D(A)\cap\partial G)$$

不妨设 $t_i\to t_0\in[0,1]$,则可证 $0\in cl[(A_{t_0}-C_{t_0})(D(A)\cap\partial G)]$,从而得到矛盾。

要证 $0\in cl[(A_{t_0}-C_{t_0})(D(A)\cap\partial G)]$,再假设 $d=d(0,cl[(A_{t_0}-C_{t_0})(D(A)\cap\partial G)])>0$,根据定理中条件 2)、4)及 G有界,可选充分大的 i,使得

$$\sup\{d_H(A_{t_0}(X),A_{t_i}(x)): x\in D(A)\cap\partial G\}<\frac{d}{4}$$

$$\sup\{\|C_{t_0}(x)-C_{t_i}(x)\|: x\in D(A)\cap\partial G\}<\frac{d}{4}$$

$$\sup\{\|\mu_{t_i}(x)\|: x\in D(A)\cap\partial G\}<\frac{d}{4}$$

注意 $0\in(\mu_{t_i}I+A_{t_i}-C_{t_i})(D(A)\cap\partial G)$,知存在 $x_0\in D(A)\cap\partial G$,$\mu_i\in A_{t_i}(x_0)$,使得

$$0=\mu_{t_i}x_0+\mu_i-C_{t_i}x_0$$

而另一方面,存在 $u_0\in A_{t_0}(x_0)$,使得$\|u_0-u_i\|<\frac{d}{4}$,于是

$$\|u_0-C_{t_0}(x_0)\|\leqslant\|u_0-u_i\|+\|C_{t_0}(x_0)-C_{t_i}(x_0)\|+\|\mu_{t_i}x_0\|+$$

$$\|\mu_{t_i}x_0+u_i-C_{t_i}(x_0)\|\leqslant\frac{d}{4}+\frac{d}{4}+\frac{d}{4}+0=\frac{3d}{4}$$

这与 $d\leqslant\|u_0-C_{t_0}(x_0)\|$矛盾。 证毕

参 考 文 献

1 田方增.非线性泛函分析国外近况简述.应用数学与计算数学.1979,5: 60~ 79

2 赵义纯,杨光红.扰动的极大单调映象的广义拓扑度.数学研究与评论,1989,9(2): 241~ 249

3 Hirango N. Some surjectivity theorems for cornpact perturbations of accretive operators. Nonlinear Analysis, 1984, 8: 765~ 774

4 陈文源.非线性泛函分析.甘肃:甘肃人民出版社,1982

5 Leoyd N D. Degree theory. New York: Carnbridge University Press, 1978

Generalized Topological Degree for *m*-Accretive Operators Perturbated by Condensing Mapping

He Mingxing
(Dept. of Basic Sci., Sichuan Institute of Technology Chengdu 610054)

Abstract The topological degree theory has important value in the sense that it gives information about the number of distinct solutions, continuous families of solutions and stability of solutions[1]. Recently, the solvability of the operator equation $y\in(A+C)x$ was discussed by means of topological degree theory[2,3]. In this paper, a generalized degree for m-accretive operator A perturbed by condensing mapping C is established, and an useful tool for solving the operator equation $y\in(A+C)x$ is supplied.

Key words m-accretive operator; condensing mapping; perturbation; topological degree; operator equation

编辑 徐培红

·科研成果介绍·

1300 V /1600 V 高压 IGBT的实现

主研人员: 杨谟华 黎展荣

该成果首次在国内外令 $a_n\neq a_p$ 导出了雪崩击穿方程关于 E_c 的二级近似解析解,从而把临界击穿电场 E_c 与雷崩区宽度 W_a 和耗尽层厚 W 有机联系起来,为功率器件外延材料的参数选取及 IGBT等器件的电气几何参数的优化设计提供了理论基础与模型。

在实现高压高性能 IGBT的诸多关键技术中,该成果具有下列独特创新点:线性加多重短路 MSS元胞模型;交互式栅源结构;在材料制备和工艺过程中的反自掺杂技术;特别的场板结构;版图弹性设计;超大面积的优质厚栅氧化技术以及封装中的特殊防静电处理。

该成果可在交流变频调速、逆变器、工业用机器人、UPS等电力电子领域产生十分可观的社会经济效益,并已带来了一定的经济效益。

该成果具有较高的学术价值、独创性和实际指导意义,属国内领先水平,接近国际 90年代初的先进水平。

InP-MIS结构界面特性的研究

主研人员: 谢孟贤 陈清法 陈 勇 李竞春

该课题研究 InP-MISFET不稳定的机理以及解决的措施。经研究发现:用常规的 PECVD法淀积的 SiO_2 中含有 SiH和 SiOH等有机团,它们对载流子起慢电子陷井效应作用,是造成 C-V 曲线滞后的主要原因。用射频溅射 SiO_2,再经适当的退火工艺,得到 InP-MIS结构的 C-V 曲线没有滞后现象。用这种方法制作 InP-MISFET的栅绝缘层,能解决该器件的漏极电流漂移问题。

该成果有一定的独创性,属于国内领先水平。

·科 卞·