一个线性算子半群的扰动

张利勋*
(电子科技大学光电子技术系 成都 610054)

【摘要】 考虑 E. Hille-E. Yosida线性算子(半)群和 Goldstein算子(半)群;在文献[1,2]基础上,提出了一个生成算子的扰动产生算子半群,证明了该算子半群的扰动具有的基本特征:算子依范数收敛,强连续性,唯一性及可微分性。从生成算子的角度说明这个算子半群的扰动与四阶闭环分布参数控制系统的关系。

关 键 词 Banach空间; 算子半群; 生成算子; 发展方程; 分布参数控制系统
中图分类号 O 177.1

60年代初期,现代控制理论的一个新分支——分布参数控制系统开始发展起来。用 Banach空间中的发展方程描述的控制系统模型的解主要依赖 E. Hille-E. Yosida算子(半)群和 Goldstein算子(半)群[3,4],当系统模型采用反馈控制时就涉及 E. Hille-E. Yosida算子(半)群的扰动。其发展方程通常是一或二阶的(即只能解某些一或二阶偏微分方程或偏微分—积分方程或积分方程)。文献[1]推广了 Goldstein算子(半)群,文献[2]在文献[1]的基础上可解任意阶发展方程。但解具有反馈的任意阶发展方程有一定的难度,本文在文献[1]的基础上,结合 E. Hille-E. Yosida算子(半)群的扰动,根据生成算子的扰动产生算子(半)群的扰动,提出了一个算子半群的扰动。证明了该算子半群的扰动具有的基本特征:算子依范数收敛,强连续性、唯一性及可微分性。从生成算子的角度说明这个算子半群的扰动与四阶闭环分布参数控制系统的关系。

1 Banach空间

设$\{\exp(tB); t\geqslant 0\}$是 Banach空间 E中算子 B生成的算子半群,零点在预解集 $\rho(B)$中,B^n(n是自然数)的定义域 $D(B^n)$上引入范数

$$\| x\|_{B^n} = (\langle x,x\rangle + \langle B^n x, B^n x\rangle)^{\frac{1}{2}}, \forall x\in D(B^n)$$

则 $D(B^n)$在该范数$\|\cdot\|_{B^n}$下是一个 Banach空间,记 $E_3= D(B^3)\times D(B^2)\times D(B)\times E$,在 E_3上引入范数

$$\forall y= (x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}\in E_3 \qquad \| y\|_{E_3} = \left(\sum_{j=1}^{3}\| x_j\|^2_{B^{4-j}} + \| x_4\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

E_3在范数$\|\cdot\|_{E_3}$下是一个 Banach空间。

2 定 理

设 B是 Banach空间 E中算子半群$\{\exp(tB); t\geqslant 0\}$的生成算子,$0\in\rho(B)$,$M_4=$

⑳ 1996年 5月 27日收稿
* 男 27岁 硕士

$\begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ B^4 & 0 \end{bmatrix}$ 是 Banach空间 E_3 中算子半群 $\{T_t; t\geqslant 0\}$的生成算子, $C_4\in L(E_3,E_3)$,则 M_4+C_4 生成算子半群 $\{S_t; t\geqslant 0\}$, $S_t=\sum_{j=0}^{\infty} S_t^j$, $S_t^0=T_t$,其中

$$S_t=(S_1(t),S_2(t),S_3(t),S_4(t))^T \qquad S_t^j=(S_1^j(t),S_2^j(t),S_3^j(t),S_4^j(t))^T$$

$$A_0(t)=\frac{1}{2}[\cosh(tB)+\cosh(itB)] \qquad A_1(t)=\frac{1}{2}B^{-1}[\sinh(tB)-i\sinh(tB)]$$

$$A_2(t)=\frac{1}{2}B^{-2}[\cosh(tB)-\cosh(itB)] \qquad A_3(t)=\frac{1}{2}B^{-3}[\sinh(tB)+i\sinh(itB)]$$

$$S_1^0(t)=(A_0(t),A_1(t),A_2(t),A_3(t)) \qquad G(t)=(A_3(t),A_2(t),A_1(t),A_0(t))^T$$

$$S_k^j(t)=\int_0^t G(t-\tau)CS_1^{j-1}(\tau)\,d\tau \qquad (k=1,2,3,4)(j=1,2,3,\cdots)$$

这里 $E_3=D(B^3)\times D(B^2)\times D(B)\times E$, $C\in L(E,E)$, $i^2=-1$

$$C_4=\begin{bmatrix} 0 & 0_3 \\ C & 0 \end{bmatrix} \qquad T_t=\sum_{k=0}^{3}A_k(i)\begin{bmatrix} 0 & I_{n-k} \\ B^4 I_k & 0 \end{bmatrix}$$

0_3, I_k 分别是三阶零阵, k阶单位算子矩阵。

3 定理证明

记 $y_1=(I,B^{-1},B^{-2},B^{-3})$ $\qquad y_2=(B^{-3},B^{-2},B^{-1},I)$

$$\|\exp(tB)\|\leqslant M\exp(t\omega) \qquad M>0,\ \omega\geqslant 0$$

$$\|S_t^j\|_{E_3}\leqslant M\exp(t\omega)\|y_2\|_{E_3}\frac{(\|y_1\|_{E_3}\|C\|Mt)^j}{j!} \qquad (j=1,2,3,\cdots)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|S_t^j\|_{E_3}\leqslant \|T_t\|+M\|y_2\|_{E_3}\exp[(\omega+\|y_1\|_{E_3}\|C\|M)t]$$

故级数$\sum_{j=0}^{\infty}S_t^j$ 在算子范数下收敛,且在 t 的任一紧区间上绝对收敛, $\forall x\in E_3$, x 为 $n\times 1$矩阵。

$$S_t x=S_t^0x+\sum_{j=1}^{\infty}S_t^jx=S_t^0x+\int_0^t G(t-\tau)C\sum_{j=1}^{\infty}S^j(\tau)x\,d\tau=T_tx+\int_0^t G(t-\tau)CS_1(\tau)x\,d\tau \quad (1)$$

所以
$$\begin{cases} S_1(t)=S_1^0(t)+\int_0^t A_3(t-\tau)CS_1(\tau)\,d\tau \\ S_2(t)=\dfrac{ds_1(t)}{dt},\ S_3(t)=\dfrac{ds_2(t)}{dt},\ S_4(t)=\dfrac{ds_3(t)}{dt} \end{cases} \quad (2)$$

式(2)的唯一性得出式(1)的唯一性,若式(2)另有一解 $S^*(t)$,则

$$\|S_1(t)-S^*(t)\|_{B^3}\leqslant\int_0^t\|B^{-3}\|_{B^3}\|C\|M\exp((t-\tau)\omega)\|S_1(\tau)-S^*(\tau)\|_{B^3}\,d\tau$$

记
$$f(t)=\exp(-t\omega)\|S_1(t)-S^*(t)\|_{B^3}$$

$$f(t)\leqslant\int_0^t\|B^{-3}\|_{B^3}\|C\|Mf(\tau)\,d\tau \qquad f(0)=0$$

所以
$$f(t)=0,\ \forall t\in R;\ S_1(t)=S^*(t),\ \forall t>0 \quad (3)$$

现证 $\{S_t; t\geqslant 0\}$是半群,先证 $S_1(t)S_\tau=S_1(t+\tau)$, $\forall t,\tau\geqslant 0$,由(2)得

$$S_1(t+\tau)-S_1(t)S_\tau=S_1^0(t+\tau)+\int_0^{t+\tau}A_3(t-\sigma)CS_1(\sigma)\,d\sigma-[S_1^0(t)+$$

$$\int_0^t A_3(t-\tau)CS_1(\tau)\,d\tau][T_\tau+\int_0^\tau G(\tau-\sigma)CS_1(\sigma)\,d\sigma]=$$

$$\int_0^{t+\tau} A_3(t+\tau-\sigma) C S_1(\sigma)\,d\sigma - \int_0^{\tau} S_1^0(t) G(\tau-\sigma) C S_1(\sigma)\,d\sigma - \int_0^t A_3(t-\sigma) C S_1(\sigma) S_\tau\,d\sigma$$

又
$$S_1^0(t) G(\tau-\sigma) = A_0(t) A_3(\tau-\sigma) + A_1(t) A_2(\tau-\sigma) + A_2(t) A_1(\tau-\sigma) + A_3(t) A_0(\tau-\sigma) = A_3(t+\tau-\sigma)$$

所以
$$S_1(t+\tau) - S_1(t) S_\tau = \int_0^t A_3(t-\sigma) C (S_1(\tau+\sigma) - S_1(\sigma) S_\tau)\,d\sigma$$

类似于式(3)的证明得

$$S_1(t) S_\tau = S_1(t+\tau) \qquad \forall\, t,\tau \geqslant 0$$

$$\frac{d}{dt} S_k(t) S_\tau = \frac{d}{dt} S_k(t+\tau) \rightarrow S_{k+1}(t) S_\tau = S_{k+1}(t+\tau) \qquad k = 1, 2, 3$$

所以
$$S_t S_\tau = S_{t+\tau}, \quad \forall\, t,\tau \geqslant 0, \quad S_0 = I_4$$

$$\int_0^t S_{t-\tau}(M_4 + C_4)\,d\tau = \int_0^t T_{t-\tau} M_4\,d\tau + \int_0^t T_{t-\tau} C_4\,d\tau + \int_0^t\int_0^{t-\tau} G(t-\tau-\sigma) C S_1(\sigma)(M_4 + C_4)\,d\sigma\,d\tau =$$

$$T_t - I_4 + \int_0^t G(t-\tau) C\,d\tau + \int_0^t\int_\tau^t G(t-\tau) C S_1(\sigma-\tau)(M_4 + C_4)\,d\sigma\,d\tau =$$

$$T_t - I_4 + \int_0^t G(t-\sigma) C \Big[\int_0^\sigma S_1(\sigma-\tau)(M_4 + C_4)\,d\tau + I\Big]\,d\sigma$$

所以
$$\int_0^t S_{t-\sigma}(M_4 + C_4)\,d\sigma + I = T_t + \int_0^t G(t-\sigma) C \Big[\int_0^\sigma S_1(\sigma-\tau)(M_4 + C_4)\,d\tau + I\Big]\,d\sigma$$

是方程(1)的解，由上面已证该方程解的唯一性，已有一解 S_t，因此

$$S_t = \int_0^t S_{t-\sigma}(M_4 + C_4)\,d\sigma + I_4$$

$$s\text{-}\lim_{t\downarrow 0} \frac{S_t - I_4}{t} = s\text{-}\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t S_{t-\sigma}(M_4 + C_4)\,d\sigma = s\text{-}\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t S_\sigma(M_4 + C_4)\,d\sigma = M_4 + C_4$$

这说明算子半群 $\{S_t; t \geqslant 0\}$ 的生成算子是 $M_4 + C_4$

4 结 束 语

在分布参数系统的控制中，如果控制系统是用四阶发展方程表示

$$\begin{cases} \dfrac{d^4 x(t)}{dt^4} = A x(t) + C u(t) \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1, x^{(2)}(0) = x_2, x^{(3)}(0) = x_3 \end{cases}$$

式中 $x(t)$ 是系统的状态；$u(t)$ 是控制。系统的状态线性反馈控制律 $u(t) = K x(t)$ 代入系统的右端后得到闭环系统

$$\begin{cases} \dfrac{d^4 x(t)}{dt^4} = (A + CK) x(t) \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1, x^{(2)} = x_2, x^{(3)}(0) = x_3 \end{cases} \tag{4}$$

假定 $x(t) = x_1(t), x_1'(t) = x_2(t), x_2'(t) = x_3(t), x_3'(t) = x_4(t)$，式(4)为

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ A + CK & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_4(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x^{(3)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix}$$

如果 A 具备一定条件可分解成 B^4,由上述定理和 E. Hille-E. Yosida积分定理得方程(4)有解。限于篇幅,有关内容将另文发表。需要说明的是,算子 M_4 扰动(M_4+C_4)生成算子半群 $\{S_t; t\geqslant 0\}$ 就是算子半群的扰动,若 K 是 t 的函数,称生成算子的时变扰动,对应的发展方程称时变发展方程。

参考文献

1 张利勋.关于一个线性算子群的问题.电子科技大学学报,1997,1(26):89~92

2 张利勋,王康宁.线性算子群和 n 阶发展方程的积分.科学通报,1997,42(8):797~800

3 王康宁.分布参数控制系统.北京:科学出版社,1986

4 Golstein J A. Semigroup and second-order differential equations. J Func Anal, 1969, 4: 50~70

Disturbing Question about A Linear Operation Semigroup

Zhang Lixun

(Dept. of Optoelectronics Technology, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract Based on Ref. 1 and 2, E. Hille-E. Yosida or Goldstein operation (semigroup) group is considered in this paper. A distrurbed linear operation semigroup is discussed which processes convergent operator in norm, stiff continuous, and sole and differential characteristics. The relationship between disturbed linear operation semigroup and 4-order feedback evolution equation is presented in a view of generating operator.

Key words Banach space; operation semigroup; generating operator; evolution equation; closed circle control system

编辑 徐培红

· 科研成果介绍 ·

专家系统支持的网络管理系统模型研究

主研人员:周明天 徐 波 佘 坤

该项目对智能化 NMS的概念模型和 NMS中专家系统的建立机理进行了全面深入的研究。在自动故障管理(含可重构技术)和安全管理这两个军用 NMS关键技术问题上有所创新。根据当前异种机互联和网际互联的客观实际,提出并建立了一个具有多种故障管理模式的分布式智能网络管理系统模型(DIMM)。DIMM拥有面向 TCP/IP的故障管理知识,能够自动处理复杂的异构网络环境中发生的故障。在 UNIX系统上设计和实现了二级签证树模型,管理和维护公钥体制的秘密密钥和公开密钥。在保证了证书可靠性的同时大大减少了构造 FCPath的复杂度及其验证的开销。

该项目在利用专家系统进行网络管理方面,在理论和技术上均有所突破,达到国际先进水平。

· 科 卞 ·